

Moto rettilineo uniformemente accelerato

Poiché l'accelerazione risulta costante avremo

$$v = v_0 + at$$

In questo caso considerando un moto rettilineo la velocità media v_m è uguale alla media aritmetica delle velocità. Avremo quindi

$$v_m = \frac{v + v_0}{2}$$

Lo spazio percorso in un tempo t sarà

$$s = v_m t + s_0 \text{ cioè}$$

$$s = \frac{v + v_0}{2} t + s_0$$

essendo

$$v = v_0 + at$$

otteniamo

$$s = \frac{v_0 + at + v_0}{2} t + s_0$$

e quindi

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 + s_0$$

Calcolo della velocità

Essendo

$$v = v_0 + at$$

avremo

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

sapendo che in un moto ad accelerazione costante

$$s = v_m t \quad \text{dove}$$

$$v_m = \frac{v + v_0}{2}$$

otteniamo

$$s = \frac{v + v_0}{2} t$$

sostituendo $t = \frac{v - v_0}{a}$ avremo

$$s = \frac{v + v_0}{2} \frac{v - v_0}{a} \quad \text{e quindi}$$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad \text{da cui}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

Moto dei proiettili

Consideriamo un punto materiale (proiettile lanciato verso l'alto con una velocità iniziale v_0 che forma un angolo ϑ con la direzione orizzontale. Riferiamo il moto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy. Avremo

$$v_{0x} = v_0 \cos \vartheta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \vartheta$$

L'accelerazione è diretta verso il basso e non possiede componente lungo l'asse x. Si ha quindi

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

lungo l'asse x la velocità rimane costante perché l'accelerazione è nulla e si ha:

$$x = v_{0x}t$$

mentre lungo l'asse y varia secondo la legge del moto uniformemente accelerato e si ha:

$$v_y = v_{0y} - gt$$

Inoltre

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Pertanto le componenti del moto del proiettile saranno:

$$x = v_{0x}t$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Ricavando t dalla prima e sostituendo nella seconda otteniamo

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

e quindi

$$y = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2 \quad (1)$$

essendo

$$v_{0x} = v_0 \cos \vartheta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \vartheta$$

avremo

$$y = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \vartheta} + x \frac{v_0 \sin \vartheta}{v_0 \cos \vartheta}$$

$$y = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \vartheta} + x \operatorname{tg} \vartheta \quad (2)$$

che è l'equazione della traiettoria. Essendo un'equazione del tipo

$$y = -ax^2 + bx$$

rappresenta una parabola

la gittata X è il massimo spostamento in direzione orizzontale e viene calcolata ponendo nella (2)

$$y = 0$$

Avremo

$$-\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \vartheta} + x \operatorname{tg} \vartheta = 0$$

$$x \left(-\frac{1}{2}g \frac{x}{v_0^2 \cos^2 \vartheta} + \operatorname{tg} \vartheta \right) = 0 \quad \text{e quindi}$$

$$x = \frac{2 \operatorname{tg} \vartheta x v_0^2 \cos^2 \vartheta}{g}$$

$$x = 2 \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} v_0^2 \cos^2 \vartheta \frac{1}{g} \quad \text{cioè}$$

$$X = \frac{2 v_0^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{g} \quad \text{od anche} \quad X = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g}$$

L'altezza massima H del proiettile è l'ordinata del punto più alto della traiettoria e si ottiene in corrispondenza del valore $x = \frac{X}{2}$ (tenendo conto del fatto che la parabola è simmetrica rispetto al proprio asse). Avremo:

$$H = -\frac{1}{2}g \frac{X^2}{4v_{0x}^2} + \frac{X}{2} \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$$

Essendo

$$X = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g} \quad \text{avremo}$$

$$H = -\frac{1}{2}g \frac{4v_{0x}^2 v_{0y}^2}{4v_{0x}^2 g^2} + \frac{2v_{0x} v_{0y}^2}{2g v_{0x}}$$

$$H = -\frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g} + \frac{v_{0y}^2}{g} \quad H = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

Si ha anche

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \vartheta}{2g}$$

essendo inoltre

$$X = \frac{2 v_0^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{g} \quad \text{ricavando } v_0^2 \text{ otteniamo}$$

$$v_0^2 = \frac{Xg}{2 \sin \vartheta \cos \vartheta} \quad \text{e quindi}$$

$$H = \frac{Xg \sin^2 \vartheta}{2g 2 \sin \vartheta \cos \vartheta} = \frac{1}{4} X \operatorname{tg} \vartheta$$

La gittata massima si ha per $\vartheta = 45^\circ$ cioè per

$$X_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

Nel caso in cui un proiettile o un grave venga lanciato lungo una linea orizzontale, l'equazione della traiettoria è un arco di parabola e si ottiene ponendo $v_{0y} = 0$ nell'equazione (1); otteniamo:

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2}$$