Formula di Newton per lo sviluppo del binomio

Siano a e b due numeri qualunque ed n un numero intero e positivo.
Ci proponiamo di calcolare la potenza $(a+b)^n$
Si ha:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

o brevemente

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \qquad (1)$$

Dimostriamo la relazione mediante il principio di Maurolico (o principio di induzione)

a) p(1) è vera
b) Se p(n) è vera, dovrà essere vera anche p(n + 1)

Dim.

a) per $n=1$ si ha
$a+b=a+b$
per cui la (1) risulta vera per $n=1$.

b)Supponiamo che la (1) sia vera per $(a+b)^n$, dobbiamo provare che è vera anche per $(a+b)^{n+1}$.
Avremo:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \left[\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\right](a+b) =$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n}ab^n + \binom{n}{0}a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 +$$

$$+ \binom{n}{2}a^{n-2}b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

Essendo

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} \quad \text{ed} \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$$

otteniamo:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right]a^n b + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right]a^{n-1}b^2 + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right]ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

Per la legge di Stiefel

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}$$ avremo

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{0}=\binom{n+1}{1} \qquad \binom{n}{2}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2}$$

e così via.
In definitiva otteniamo:

$$(a+b)^{n+1}=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^{n}b+\binom{n+1}{2}a^{n-1}b^{2}+\ldots+\binom{n+1}{n}ab^{n}+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

quindi p(n + 1) risulta vera.
Pertanto la (1) risulta valida per ogni $n\in\mathbb{N}$.

Considerazioni sulla formula

i) Il numero degli addendi nel secondo membro è $n+1$

ii) In questi addendi gli esponenti della lettera a vanno diminuendo di uno qualunque al successivo, mentre gli esponenti della lettera b vanno sempre aumentando di una unità nel suddetto passaggio

iii) I coefficienti dei termini estremi ed i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi sono tra loro uguali. Si ha $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}$; $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}$, ……
Questa osservazione ci risparmia il calcolo di molti coefficienti: se n è dispari e quindi il numero $n+1$ dei termini dello sviluppo è pari, basta calcolare i primi $\frac{n+1}{2}$ coefficienti; se invece n è pari e quindi $n+1$ dispari, basta calcolare i primi $\frac{n}{2}+1$ coefficienti

iv) Il coefficiente di un termine qualunque dello sviluppo, a partire dal secondo, si ottiene moltiplicando il coefficiente del termine precedente per l'esponente che in esso ha la lettera a, e dividendo il risultato ottenuto per l'esponente della lettera *b* aumentato di una unità. Infatti si ha $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$