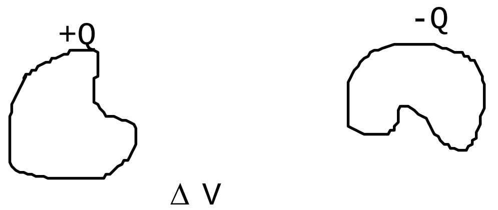
CAPACITA'

Ci occupiamo adesso delle proprietà dei condensatori, dispositivi che accumulano la carica elettrica. I condensatori vengono usati in vari tipi di circuiti.
Un condensatore è un insieme di due conduttori isolati, di forma arbitraria, (che saranno chiamati armature, indipendentemente dalla loro forma) caricati in modo che esista una differenza di potenziale fra i conduttori.
Si assume che essi siano totalmente isolati rispetto agli oggetti circostanti e che abbiano cariche dello stesso valore e segno opposto rispettivamente +Q e -Q Ogni linea di forza uscente da +Q finisce su -Q. Inoltre si suppone che i conduttori siano nel vuoto.



Definizione di capacità

Consideriamo due conduttori tra i quali è stabilita una differenza di potenziale V. Supponiamo che i conduttori abbiano cariche opposte ma di uguale modulo. Possiamo ottenere ciò collegando i due conduttori ai poli di una batteria.
La capacità C di un condensatore viene definita come il rapporto tra la carica Q e la differenza di potenziale ΔV. Essa è una costante che dipende solo dalla geometria del sistema.

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

od anche

$$C = \frac{Q}{V}$$

dove V indica la differenza di potenziale.
L'unità di capacità è il coulomb/volt che prende il nome di Farad in onore di Michael Faraday.
Si ha

1 farad = 1 coulomb/ 1 volt

Il farad è una unità di misura molto grande, nella pratica i condensatori ordinari hanno capacità che vanno dai microfarad ($1\ \mu F = 10^{-6}$ F) ai picofarad ($1\ pF = 10^{-12}$ F).

Calcolo di capacità

Calcoliamo la capacità di un conduttore sferico isolato di raggio R (si considera come secondo conduttore una sfera cava di raggio infinito) Se la carica sulla sfera è Q, il suo potenziale sarà

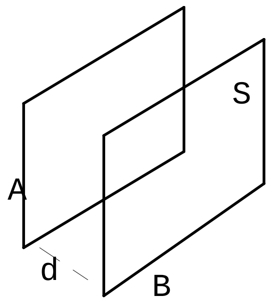
$$V = k\frac{Q}{R}$$

La capacità sarà data da:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{k\frac{Q}{R}} = \frac{R}{k} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Da cui si vede che la capacità di una sfera carica isolata è proporzionale al raggio e non dipende né dalla carica, né dalla differenza di potenziale.

Condensatore piano



Consideriamo un condensatore ad armature piane e parallele (condensatore piano), nel quale i conduttori sono due armature piane, parallele e di area S ad una distanza d. Se connettiamo le armature ai morsetti si una batteria comparirà la carica + q su una di esse e la carica - q sull'altra.

Se d è piccolo rispetto alle dimensioni delle armature, l'intensità del campo elettrico $\vec{E}$ tra le armature sarà uniforme. Per calcolare la capacità dobbiamo trovare la relazione tra V, differenza di potenziale tra le armature, e q , carica del condensatore.

Dal teorema di Gauss, essendo E costante, si ha :

$$\varepsilon_0 \Phi_E = q$$

e quindi, essendo

$$\Phi_E = E\,S$$

otteniamo

$$\varepsilon_0 E\,S = q\,.$$

Il lavoro necessario per portare una carica di prova q_0 da una armatura all'altra si può esprimere o come L = q_0 V oppure come prodotto della forza q_0 E per la distanza d, ossia

$$L = q_0 Ed$$

Eguagliando le due espressioni avremo

$$V = Ed$$

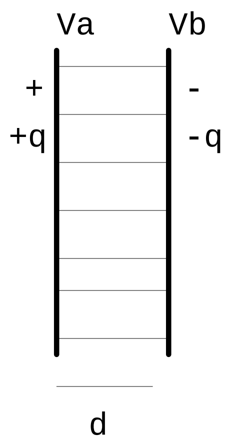
La capacità sarà

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 ES}{Ed} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

La relazione trovata mostra che la capacità di un condensatore dipende dalla geometria dei conduttori (armature) cioè da S e da d.

Energia immagazzinata in un condensatore

Se le armature di un condensatore carico vengono collegate ad un conduttore, ad esempio un filo elettrico, la carica si trasferisce da un'armatura all'altra finché ambedue sono scariche. La scarica può essere osservata come una scintilla visibile. Se accidentalmente si toccano le armature di un condensatore carico, le dita fanno da conduttore, attraverso il quale il condensatore può scaricarsi e si prende la scossa che dipende dalla capacità e dalla differenza di potenziale applicata al condensatore.
Vediamo cosa avviene durante la carica di un condensatore.
Immaginiamo di avere un condensatore piano



sull'armatura avente la carica positiva si avrà il potenziale V_a, mentre sull'altra armatura si avrà il potenziale V_b. La differenza di potenziale sarà

$V_a - V_b = E\,d$ con $V_a > V_b$

Supponiamo di caricare il condensatore, cioè di aumentare le cariche. Si ha:

$$+q \rightarrow +q + dq$$
$$-q \rightarrow -q - dq$$

questo implica che un elemento di carica dq transita dalla piastra carica negativamente e va sulla piastra carica positivamente.
Ciò non può avvenire spontaneamente, per cui si dovrà compiere un lavoro contro le forze del campo.
Così come nel caso di un fluido è necessario spendere lavoro per pompare il fluido dal basso verso l'alto, così dobbiamo spendere lavoro per effettuare lo spostamento di cariche

contro la direzione normale che è quella che va da potenziale più alto a potenziale più basso. (sarà necessario un generatore) Il lavoro necessario contro le forze del campo è

$$dL = (V_A - V_B)dq$$ dove

$$V_A - V_B = \frac{q}{C}$$

Poiché dL accresce l'energia potenziale del sistema si ha:

$$dU = dL = \frac{q}{C}dq$$

Avremo quindi:

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2C}Q^2$$

essendo Q = V C otteniamo:

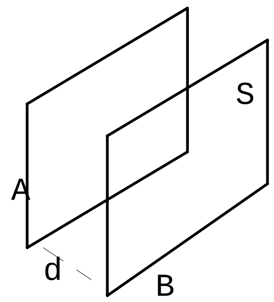
$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

Consideriamo l'energia potenziale

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

e calcoliamo la densità di energia, cioè l'energia per unità di volume

$$u = \frac{U}{Vol.}$$



Il volume sarà:

$$Vol. = S \cdot d$$

e quindi

$$u = \frac{1}{2}CV^2 \frac{1}{Sd}$$

essendo $$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

avremo

$$u = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S\ E^2\ \cancel{d}^2}{S\cancel{d}^2}$$

cioè

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad \frac{J}{m^3}$$

e non dipende dalle caratteristiche geometriche del campo elettrico presente nel condensatore.
Questo risultato vale anche in generale. Cioè la densità di energia del campo elettrostatico in un dato punto dello spazio è proporzionale al quadrato del campo in quel punto.

In tutte le regioni dello spazio dove è presente un campo elettrico $\vec{E}$ è associato punto per punto una densità di energia

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

dove $E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$ (prodotto scalare di $\vec{E}$ per se stesso).

Condensatori con dielettrici

Un dielettrico è un materiale non conduttore, come gomma, vetro o carta paraffinata. Quando si introduce un materiale dielettrico tra le armature di un condensatore, la capacità aumenta di un fattore ε_r che prende il nome di costante dielettrica relativa.

Consideriamo un condensatore piano di carica Q_0 e capacità C_0 in assenza di dielettrico. La differenza di potenziale misurata sarà

$$V_0 = \frac{Q_0}{C_0}$$

Se introduciamo un dielettrico tra le armature la differenza di potenziale diminuisce di un fattore ε_0, si ha:

$$V = \frac{V_0}{\varepsilon_r}$$

Essendo $V < V_0$, avremo che $\varepsilon_r > 1$.

Poiché la carica Q_0 del condensatore non cambia, la capacità sarà

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{V_0/\varepsilon_r} = \varepsilon_0 \frac{Q_0}{V}$$

e quindi:

$$C = \varepsilon_0 C_0$$

dove C_0 è la capacità in assenza di dielettrico.

Nel caso di un condensatore piano, se è completamente riempito con un dielettrico avremo:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$

Da quanto visto sembra che la capacità possa essere resa grande a piacere diminuendo d, distanza tra le armature. In pratica il minimo valore di d è limitato dalla scarica che può avvenire attraverso il dielettrico che separa le armature. Per ogni distanza d fissata, la differenza di potenziale massima che può essere applicata a un condensatore senza che si produca la scarica, dipende dalla **rigidità dielettrica** (*massima intensità del campo elettrico*) del dielettrico, (per l'aria è $3 \cdot 10^6\ V/m$.

Il modello atomico dei dielettrici

Poiché la differenza di potenziale tra le armature è uguale al prodotto del campo elettrico per la dìstanza d, anche il campo elettrico si riduce del fattore ε_r. Quindi, in presenza del dielettrico si ha:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

Si può interpretare ciò in termini di polarizzazione del dielettrico. A livello atomico, risulta polarizzato un materiale le cui cariche positive e negative sono lievemente separate. Se le molecole del dielettrico possiedono momento di dipolo, permanente anche in assenza di campo esterno, vengono chiamate molecole polari.

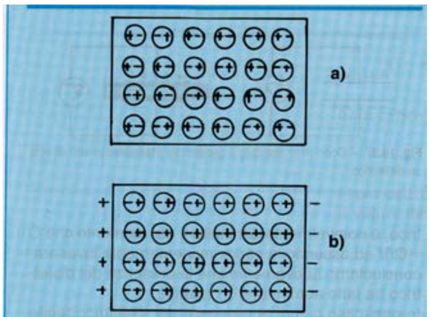


Fig. 19.38 - a) disposizione delle particelle cariche all'interno di un dielettrico in condizioni ordinarie; b) sotto l'azione del campo presente tra le armature del condensatore il dielettrico si *polarizza*

Se le molecole del dielettrico non possiedono un momento di dipolo permanente, vengono chiamate molecole non polari. In questo caso un campo elettrico esterno provoca una separazione di carica e i momenti di dipolo risultanti vengono detti *indotti* e tendono ad allinearsi con il campo esterno, causando una riduzione del campo elettrico interno.

Consideriamo un dielettrico in un campo elettrico uniforme E_0, le parti positive delle molecole vengono spostate nella direzione del campo elettrico e le parti negative vengono spostate nella direzione opposta. Quindi il campo elettrico applicato polarizza il dielettrico. L'effetto sul dielettrico è la formazione di una carica superficiale positiva di densità σ_i (indotta) sulla faccia destra e di una equivalente carica superficiale negativa sulla faccia sinistra. Queste cariche indotte sul dielettrico generano un campo elettrico indotto E_i opposto al campo E_0. Il campo elettrico totale sarà

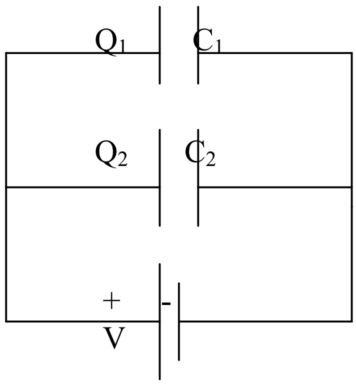
$$E = E_0 - E_i$$

Collegamento di condensatori

Condensatori in parallelo

Due condensatori collegati come in figura prendono il nome di collegamento in parallelo.

$V_1 = V_2 = V$



Le armature di sinistra sono collegate al polo positivo della batteria e risultano allo stesso potenziale analogamente quelle di destra sono collegate al polo negativo. La carica accumulata dai condensatori è

$Q = Q_1 + Q_2$

essendo

$Q_1 = C_1V$ e $Q_2 = C_2V$

avremo:

$Q = Q_1 + Q_2 = C_1V + C_2V$

Se sostituiamo i due condensatori con un altro di capacità equivalente avremo lo stesso effetto dei due originali, si ha quindi:

$Q = CV$

Sostituendo otteniamo

$CV = C_1V + C_2V$

e quindi

$C = C_1 + C_2$

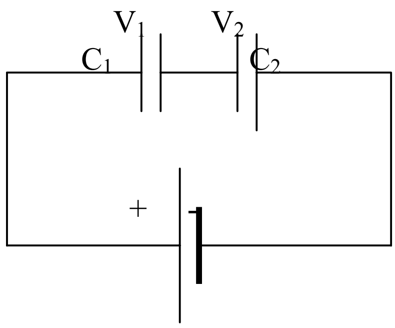
Estendendo il ragionamento a tre o più condensatori otteniamo

$C = C_1 + C_2 + ... + C_n$

Si ha La capacità equivalente di un insieme di condensatori collegati in parallelo è uguale alla somma delle capacità dei singoli condensatori ed è maggiore della capacità di ciascuno dei singoli condensatori.

Collegamento in serie

Due condensatori collegati come in figura prendono il nome di collegamento in serie



Per il collegamento in serie dei condensatori, il valore assoluto della carica deve essere lo stesso su tutte le armature.
La differenza di potenziale ai capi di ognuno dei condensatori sarà

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad \text{e} \quad V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

Se consideriamo un condensatore equivalente otteniamo

$$V = \frac{Q}{C}$$

Inoltre si ha

$$V = V_1 + V_2$$

Sostituendo otteniamo

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

semplificando Q, arriviamo alla relazione

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Applicando la stessa analisi a più condensatori in serie si trova

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}$$

Si ha L'inverso della capacità equivalente di un insieme di condensatori collegati in serie è uguale alla somma degli inversi delle capacità dei singoli condensatori ed è minore delle capacità di ciascuno dei singoli condensatori.