

Calcolo combinatorio

Consideriamo un insieme di n oggetti di natura qualsiasi. Indicheremo questi oggetti con a_1, a_2, \dots, a_n .

Con questi n oggetti si vogliono formare dei gruppi, ciascuno formato da uno stesso numero k di oggetti con $k \leq n$.

Disposizioni semplici di n oggetti

Definizione: Dati n oggetti e detto k un numero intero positivo minore o uguale a n , si chiamano disposizioni semplici di questi n oggetti presi a k a k o della classe k , tutti i gruppi che si possono formare con gli n oggetti dati in modo che ogni gruppo contenga soltanto k degli oggetti dati, e che due gruppi qualunque differiscano fra loro o per qualche oggetto, oppure per l'ordine con cui gli oggetti sono disposti.

Esempio – Dati tre oggetti, indicati con le lettere A,B,C, le disposizioni di classe 2 sono tutte le file realizzabili usando ogni volta due delle tre lettere:

AB, BA, AC, CA, BC, CB

Si tratta, quindi di sei file possibili.

Indichiamo quindi con $D_{n,k}$ il numero delle disposizioni semplici di n oggetti di classe k .

Teorema – Il numero delle disposizioni semplici di n oggetti di classe k è dato da:

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k-1)$$

cioè $D_{n,k}$ è uguale al prodotto dei k numeri consecutivi decrescenti a partire da n .

Dimostrazione Gli n elementi diversi

a_1, a_2, \dots, a_n

presi ad uno ad uno danno luogo, ovviamente, ad n disposizioni di classe uno

$$D_{n,1} = n \quad (1)$$

Per formare tutti i gruppi di classe 2 consideriamo, successivamente, ciascun gruppo di classe 1 e, di seguito poniamo uno alla volta ciascuno degli $n-1$ elementi estranei al gruppo considerato. Ogni gruppo di classe 1 genera così $n-1$ gruppi di classe 2.

Possiamo quindi scrivere

$$D_{n,2} = D_{n,1}(n-1) \quad (2)$$

Per formare tutti i gruppi di classe 3, consideriamo, successivamente, ciascun gruppo di classe 2 e, di seguito, poniamo uno alla volta ciascuno degli $n-2$ elementi estranei al gruppo considerato. Ogni gruppo di classe 2 genera così $n-2$ gruppi di classe 3. Possiamo quindi scrivere

$$D_{n,3} = D_{n,2}(n-2) \quad (3)$$

e così via. Per formare i gruppi di classe $k-1$ consideriamo ciascun gruppo di classe $k-2$ e poniamo uno alla volta ciascuno degli $n-(k-2) = n-k+2$ elementi estranei al gruppo considerato. Avremo quindi:

$$D_{n,k-1} = (n-k+2)D_{n,k-2} \quad (k-1)$$

Per formare infine tutti i gruppi di classe k , consideriamo ciascun gruppo di classe $k-1$ e poniamo, di seguito, uno alla volta ciascuno degli $n-(k-1) = n-k+1$ elementi estranei al gruppo considerato.

Avremo

$$D_{n,k} = (n-k+1)D_{n,k-1} \quad (k)$$

Moltiplicando membro a membro le k relazioni (1), (2), ..., (k) precedenti otteniam

$$D_{n,1} \cdot D_{n,2} \cdot \dots \cdot D_{n,k} = n D_{n,1} (n-1) D_{n,2} (n-2) \dots D_{n,k-2} (n-k+2) D_{n,k-1} (n-k+1)$$

cioè

$$D_{n,1} \cdot D_{n,2} \cdot \dots \cdot D_{n,k} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+2)(n-k+1) D_{n,1} D_{n,2} \dots D_{n,k-1}$$

Dividendo per i fattori comuni contenuti nei due membri otteniamo

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+2)(n-k+1)$$

Disposizioni con ripetizione

Siano dati n elementi distinti

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

proponiamoci di calcolare il numero dei gruppi che si possono formare prendendo k degli elementi dati, con k qualunque e con l'eventuale ripetizione di qualche elemento. Si ha

- Se è $k < n$ si ritrovano le disposizioni semplici, oltre a quelle nelle quali un elemento è ripetuto come nel caso dei seguenti 4 elementi a, b, c, d presi a tre a tre $abc; acd, \dots, aaa, bbc, \dots$
- Se $k > n$, qualche elemento dovrà essere necessariamente ripetuto, risultando così escluse le disposizioni semplici. E' il caso del gioco del totocalcio in cui gli elementi distinti sono $n = 3$ e, specificamente, i noti simboli 1, X, 2 con i quali si debbano costruire colonne di $k = 13$ elementi

Definizione Si dicono disposizioni con ripetizione di n elementi presi a k a k (o di classe k), tutti i possibili gruppi che si possono formare prendendo k degli elementi, con l'eventuale ripetizione di qualcuno di essi.

Indicando con D' il numero delle disposizioni di classe k di n elementi ed essendo

$$D'_{n,1} = n$$

$$D'_{n,2} = D'_{n,1} \cdot n = n^2$$

$$D'_{n,3} = D'_{n,2} \cdot n = n^3$$

.....

$$D'_{n,k} = n^k$$

Esempio Calcolare quante colonne di una schedina del totocalcio dovranno essere compilate per avere la certezza di ottenere un 13.

Si ha $n = 3 \quad k = 13$

$$D'_{3,13} = n^{13} = 1.594.233 \quad \text{colonne}$$

Permutazioni di n oggetti

Definizione Si chiamano permutazioni semplici di n oggetti (elementi) distinti le disposizioni semplici degli n elementi presi ad n ad n .

In altre parole si può anche dire : Le permutazioni di n oggetti distinti sono tutti i gruppi formati ciascuno da tutti gli n oggetti dati e che differiscono fra loro soltanto per l'ordine degli oggetti.

Indicando con P_n il numero delle permutazioni di n elementi, si ha

$$P_n = D_{n,n}$$

e quindi avremo ($k = n$)

$$P_n = n(n-1)(n-2) \dots \dots \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

cioè

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \dots \dots (n-1)n$$

cioè

Il numero delle permutazioni semplici di n oggetti distinti è uguale al prodotto dei primi n numeri naturali.

Definizione Se k è un numero intero maggiore di 1, chiamasi fattoriale del numero k , e si indica con $k!$, il numero che risulta dal prodotto dei primi n numeri interi, cioè

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k$$

Se è $k = 1$ o $k = 0$, si pone per definizione

$$1! = 1 \quad 0! = 1$$

Combinazioni semplici

Definizione Si chiamano combinazioni semplici di n elementi distinti presi a k a k (o di classe k) $k \leq n$, tutti i possibili gruppi di k oggetti che si possono formare con gli n elementi in modo da considerare distinti solo quei gruppi che differiscono per almeno un elemento.

Confrontando la precedente definizione con quella delle disposizioni semplici, potremo dire che, per esempio, i due gruppi

abc; acb

costituiscono due disposizioni diverse (differiscono per l'ordine degli elementi) ma formano la stessa combinazione

Risulta quindi evidente che ogni combinazione può generare tante disposizioni quante sono le permutazioni dei suoi k elementi. Si ha quindi

$$D_{n,k} = C_{n,k} \cdot k!$$

e quindi

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} \quad \text{cioè}$$

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

moltiplicando numeratore e denominatore per $(n-k)! \neq 0$

otteniamo

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\dots 2 \cdot 1}{k!(n-k)!}$$

essendo il numeratore $n!$, avremo

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (*)$$

che prende il nome di legge dei tre fattoriali.

Coefficienti binomiali

Diremo coefficiente binomiale e lo indichiamo con il simbolo

$$\binom{n}{k}$$

che si legge « n sopra k » il numero delle combinazioni semplici di n elementi diversi di classe k , cioè

$$\binom{n}{k} = C_{n,k}$$

Proprietà dei coefficienti binomiali

1^a Proprietà Legge delle classi complementari

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

cioè il numero delle combinazioni semplici di n elementi di classe k è eguale al numero delle combinazioni semplici degli stessi elementi di classe $n-k$.

Infatti, applicando la (*), abbiamo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{e quindi}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

e per la proprietà transitiva dell'uguaglianza si ha

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

che vale anche per $k=0$ purché si convenga che

$$\binom{n}{0} = 1$$

2^a proprietà Legge di Stiefel

Per $1 \leq k \leq n-1$ sussiste la relazione

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Si ha

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-k-1)!} \quad \text{essendo } p! = p(p-1)!$$

avremo

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-k-1)!} = \quad \text{raccolgendo a fattor comune il termine}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \quad \text{otteniamo}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right] = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \frac{k+n-k}{k(n-k)} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

3^a proprietà Legge di ricorrenza

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$$

Si ha

$$\begin{aligned}\binom{n}{k+1} &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k-1+1)}{(k+1)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)}{(k+1) \cdot k!} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}\end{aligned}$$

Questa proprietà ci permette di calcolare il numero delle combinazioni di classe $k+1$ (cioè della classe successiva) quando è noto il numero delle combinazioni di classe assegnata.