NUMERI COMPLESSI

Come sappiamo, non esistono nel campo dei numeri reali le radici di indice pari dei numeri negativi.
Ammettiamo pertanto l'esistenza della radice quadrata del numero – 1. Questo nuovo ente numerico che indicheremo con la lettera i o j non può essere un numero reale e viene chiamato unità immaginaria. Si rese necessario quindi ampliare il campo dei numeri reali.
Def – 1 Dicesi numero complesso l'espressione

$$a+ib$$

dove il numero a è detto parte reale, ib parte immaginaria. Il numero complesso $a+ib$ viene indicato con le lettere z, w …

Due numeri complessi

$$z=a+ib \quad \text{e} \quad w=c+id$$

sono uguali se

$$a=c \quad e \quad b=d$$

cioè se hanno la stessa parte reale e uguali i coefficienti delle parti immaginarie.
Def. – 2 Dato il numero complesso $z=a+ib$, si dice opposto di z il numero $-z=-a-ib$, per cui il numero complesso $z=a+ib$ è nullo se e solo se $a=b=0$.

Nel campo dei numeri complessi non si introducono i concetti di maggiore e di minore.

Rappresentazione cartesiana dei numeri complessi

a) Rappresentazione mediante i punti del piano

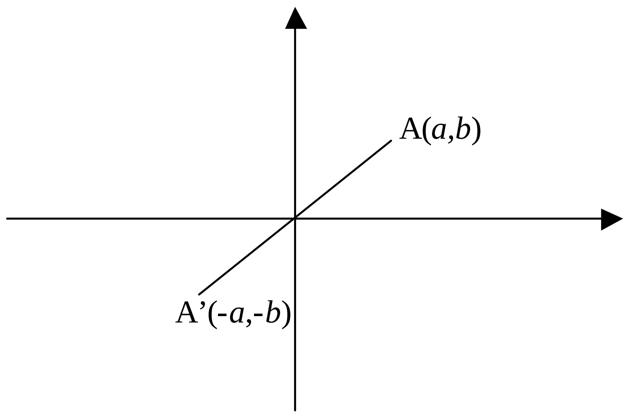
Fissiamo un sistema di assi cartesiani Oxy. Al numero complesso $z=a+ib$ associamo un punto $\mathrm{A}(a,b)$ e inversamente al punto $\mathrm{A}(a,b)$ facciamo corrispondere il numero complesso $z=a+ib$.
Rimane così stabilita una corrispondenza biunivoca fra i numeri complessi ed i punti del piano. Ai punti dell'asse x corrispondono i numeri reali, per cui l'asse x prende il nome di asse reale, mentre l'asse y a cui corrispondono i numeri immaginari prende il nome di asse immaginario. Infatti i punti dell'asse x sono in corrispondenza biunivoca con i numeri

$$z=a+i0=a,$$

mentre i punti dell'asse y sono in corrispondenza biunivoca con i numeri del tipo

$$z=0+ib=ib$$

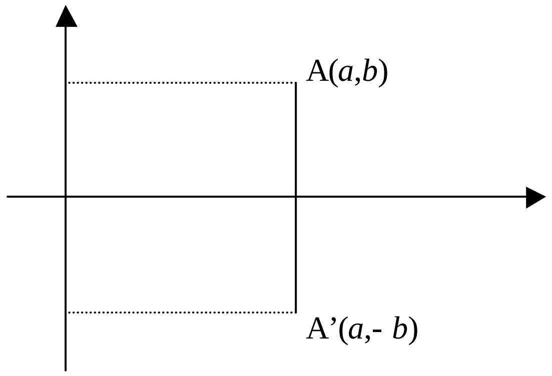
Due numeri complessi tra loro opposti $a+ib$ e $-a-ib$ hanno per immagine, o indici, punti simmetrici rispetto all'origine.



Def. – 3 I numeri complessi

$z = a + i\,b$ e $\bar{z} = a - i\,b$

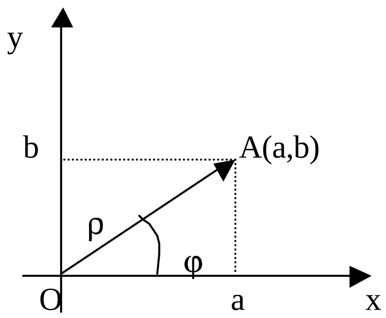
prendono il nome di ***numeri complessi coniugati*** ed hanno gli indici simmetrici rispetto all'asse x.

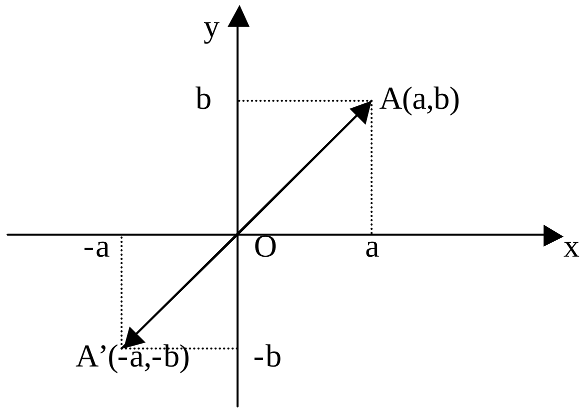


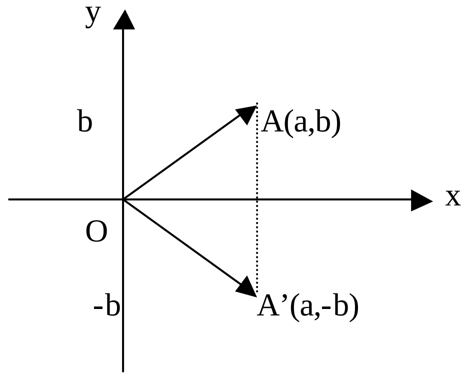
b) Rappresentazione mediante vettori

Ad ogni punto A(a,b) del piano possiamo associare il vettore OA. Di conseguenza ad ogni numero complesso $z = a + i\,b$ si può far corrispondere il vettore OA e inversamente.

Si stabilisce così una corrispondenza biunivoca tra i numeri complessi e i punti del piano di origine O. Il vettore OA sarà quindi il vettore rappresentativo del numero complesso $z = a + i\,b$; a rappresenta la proiezione del vettore sull'asse x ed il coefficiente b rappresenta la proiezione del vettore sull'asse y. I vettori rappresentativi di due numeri complessi opposti, sono tra loro opposti, i vettori rappresentativi di due numeri complessi coniugati sono simmetrici rispetto all'asse x.







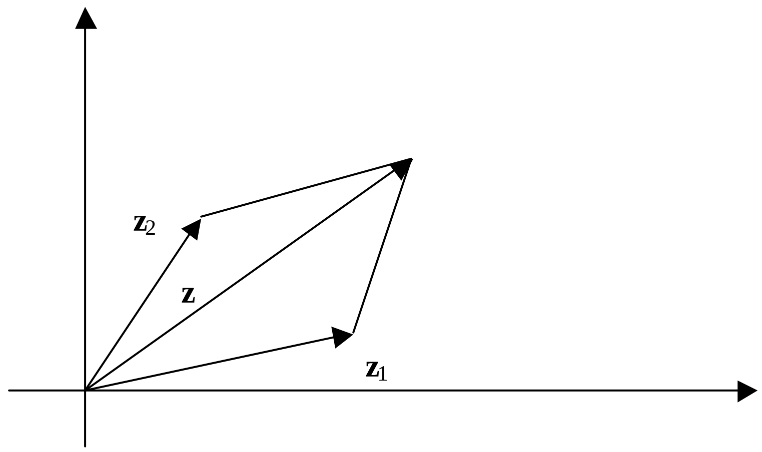
Operazioni Fra numeri complessi

Addizione

Consideriamo due numeri complessi $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$.
La somma di z_1 e z_2 sarà

$$z = z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = ac + i(b + d)$$

Indicando con $P_1(a,b)$ e $P_2(c,d)$ gli indici dei due numeri complessi, l'indice corrispondente a $z = z_1 + z_2$ sarà il punto $Q(a+c, b+d)$ avente come ascissa la somma delle ascisse e come ordinata la somma delle ordinate dei punti P_1 e P_2.
Vettorialmente si ha che il vettore **z** sarà la somma dei vettori $\mathbf{z}_1$ e $\mathbf{z}_2$.



Sottrazione

Per differenza tra due numeri complessi

$z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$

e si indica con $z = z_1 - z_2$ si intende il numero complesso $x + iy$ tale che

$(x + iy) + (c + id) = a + ib$

quindi

$x + c + i(y + d) = a + ib$

Per il principio di identità dei polinomi si ha:

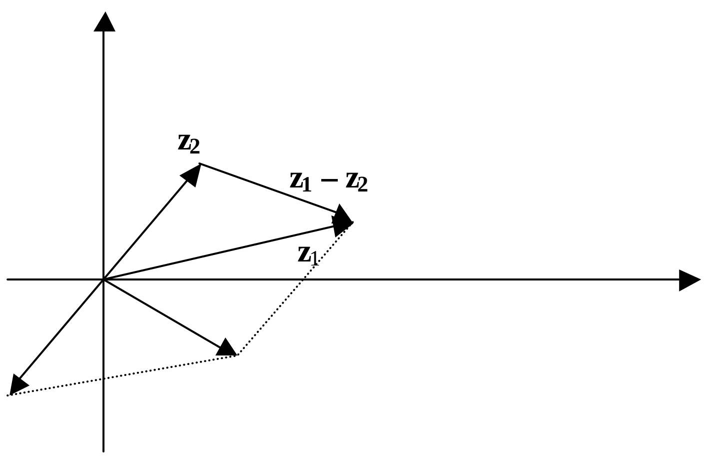
$x + c = a \quad \Rightarrow \quad x = a - c$

$y + d = b \quad \Rightarrow \quad y = b - d$

per cui

$z_1 - z_2 = x + iy = a - c + i(b - d)$

Il vettore $z = z_1 - z_2$ è rappresentato in fig.



Moltiplicazione

Dati i numeri complessi

$z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$

il prodotto di z_1 per z_2 è dato da

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

Si ha anche che la somma e il prodotto di due numeri complessi coniugati sono numeri reali. Infatti, se

$z = a + ib$

$\bar{z} = a + ib$

sono numeri complessi coniugati, avremo

$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a$

$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$

Il termine $a^2 + b^2$ viene chiamato anche norma del numero complesso $a + ib$.

Potenza ad esponente intero positivo

In modo analogo al campo reale si ha che, dato il numero complesso

$z = a + ib$

$z^0 = (a + ib)^0 = 1$

$z^1 = (a + ib)^1 = a + ib$

$z^n = (a + ib)^n = \underbrace{(a + ib)(a + ib).....(a + ib)}_{n\ vplte}$

inoltre si ha:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

Poiché le potenze si ripetono periodicamente ogni 4 volte, le potenze di i formano un gruppo ciclico di ordine 4.

$i^{4n} = i^0 = 1$

$i^{4n+1} = i^1 = i$

$i^{4n+2} = i^2 = -1$

$i^{4n+3} = i^3 = -i$

Divisione

Dati i numeri complessi

$z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + i\,d$

con $z_2 \neq 0$ definiamo quoziente di z_1 e z_2 quel numero complesso $z = x + iy$ tale che

$a + ib = (c + id) \cdot (x + iy)$

che si può anche scrivere

$a + ib = cx - dy + i(dx + cy)$ e quindi per il principio di identità dei polinomi si ha

$$\begin{cases} cx - du = a \\ dx + cy = b \end{cases}$$

Risolvendo il sistema con il metodo di Cramer si ha

$\det A = \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = c^2 + d^2 \neq 0$ perché somma di quadrati

$\det A_1 = \begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix} = ac + bd$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = bc - ad$

Avremo:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$$

$$x = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Il quoziente sarà

$$z = \frac{z_1}{z_2} = x + iy = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

In pratica il quoziente si può determinare moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato di z_2. Si ha:

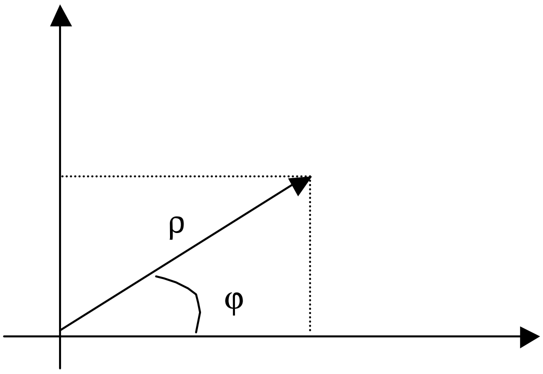
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Coordinate polari

Fissati nel piano un punto O, polo ed una semiretta , asse polare, uscente da O ed un verso di rotazione, ad un punto P del piano si associa la sua distanza ρ dal polo e l'ascissa angolare φ della semiretta OP. Alla a coppia (ρ, φ) si dà il nome di coordinate polari del piano. Esse sono legate alle coordinate cartesiane dalle relazioni:

$x = \rho \cos \varphi$

$y = \rho \sin \varphi$



ρ si chiama raggio vettore e φ anomalia del punto P.
Per passare dalle coordinate cartesiane a quelle polari eleviamo al quadrato le

$$\begin{cases} x = r \ \cos j \\ y = r \ sin\, j \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = r^{\ 2}\cos^2 j \\ y^2 = r^{\ 2} sin^2 j \end{cases}$$

sommando membro a membro otteniamo

$$x^2 + y^2 = r^{\ 2}(\cos^2 j + sin^2 j\ )$$

e quindi

$$x^2 + y^2 = r^{\ 2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Avremo quindi

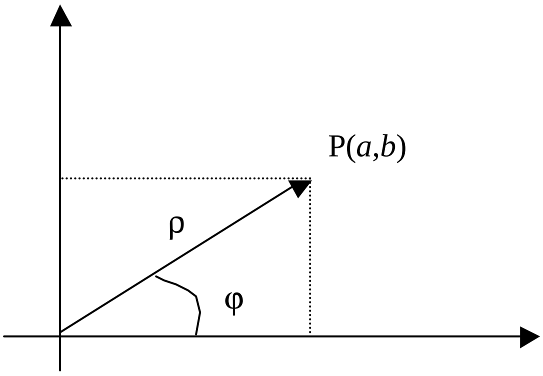
$$\cos j = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$sin\, j = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Forma trigonometrica dei numeri complessi

Si dicono modulo e argomento del numero complesso $z = a + i\,b$ rispettivamente il modulo ρ e l'anomalia φ, definita a meno di multipli di $2p$.

Consideriamo il numero complesso $z = a + i\,b$, sia P(a,b) il punto corrispondente piano complesso che individua il vettore rappresentativo corrispondente. Si ha



$$\begin{cases} a = \rho \cos\varphi \\ b = \rho \sin\varphi \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

da cui, supponendo $\cos\varphi \neq 0$ si ha anche

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b}{a}$$

Il numero complesso $z = a + i\,b$ assumerà la forma

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Moltiplicazione di numeri complessi

Chiamiamo prodotto di due numeri complessi un numero complesso che ha modulo uguale al prodotto dei moduli dei fattori e argomento uguale alla somma degli argomenti dei fattori.

Dati i numeri complessi

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

$$z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

avremo:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos j_1 + i \sin j_1) \cdot (\cos j_2 + i \sin j_2) =$$
$$= r_1 r_2 (\cos j_1 \cos j_2 + i \cos j_1 \sin j_2 + i \sin j_1 \cos j_2 - \sin j_1 \sin j_2) =$$
$$r_1 r_2 ((\cos j_1 \cos j_2 - \sin j_1 \sin j_2) + i (\sin j_1 \cos j_2 + \cos j_1 \sin j_2))$$

e quindi

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(j_1 + j_2) + i \sin(j_1 + j_2)]$$

Il teorema si estende al caso di un prodotto di più fattori, dimostrando che se $z_1, z_2, ..., z_n$ sono numeri complessi, $r_1, r_2, ..., r_n$ i loro moduli e $j_1, j_2, ..., j_n$ i loro argomenti, risulta:

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n [\cos(j_1 + j_2 + ... + j_n) + i \sin(j_1 + j_2 + ... + j_n)]$$

Divisione di numeri complessi

Se (r_1, j_1) è il modulo e l'argomento di z_1 e (r_2, j_2) il modulo e l'argomento di z_2 e se $z_2 \neq 0$ avremo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos j_1 + i \sin j_1)}{r_2(\cos j_2 + i \sin j_2)} = \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos j_1 + i \sin j_1) \cdot (\cos j_2 - i \sin j_2)}{(\cos j_2 + i \sin j_2) \cdot (\cos j_2 + i \sin j_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \frac{\cos j_1 \cos j_2 - i \cos j_1 \sin j_2 + i \sin j_1 \cos j_2 + \sin j_1 \cos j_2}{\cos^2 j_2 + \sin^2 j_2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2} (\cos j_1 \cos j_2 - i \cos j_1 \sin j_2 + i \sin j_1 \cos j_2 + \sin j_1 \cos j_2) =$$
$$= \frac{r_1}{r_2} (\cos j_1 - j_2) - i \sin(j_1 - j_2))$$

Quindi il quoziente di due numeri complessi è un numero complesso avente modulo uguale al quoziente dei moduli dei fattori e argomento uguale alla differenza degli esponenti dei fattori.

Elevazione a potenza

Applicando la formula precedentemente vista al caso di n fattori uguali otteniamo una regola che permette di elevare un numero complesso ad una potenza intera positiva.

$$[r (\cos j + i \sin j)]^n = r^n (\cos nj + i \sin nj)$$

cioè: Per elevare un numero complesso a una potenza intera positiva, è necessario elevare a questa potenza il modulo e moltiplicare l'argomento per l'esponente della potenza.
Dimostriamo che vale anche se n è un numero intero negativo.

Se $m > 0$ poniamo $n = -m$, avremo:

$$\left[r\,(\cos j + i\,sin\,j\,)\right]^{-m} = \frac{1}{\left[r\,(\cos j + i\,sin\,j\,)\right]^{m}} =$$

$$= \frac{1}{r^{m}\,(\cos m j + i\,sin\,m j\,)} = \frac{\cos mj - i\,sin\,mj}{r^{m}\,(\cos^{2} mj + sin^{2} mj\,)} =$$

$$= r^{-m}\,(\cos m j - i\,sin\,m j\,)$$

che si può scrivere:

$$\left[r\,(\cos j + i\,sin\,j\,)\right]^{-m} = = r^{-m}\left[\cos(-m j\,) + i\,sin\,(-m j\,)\right]$$

Radici di un numero complesso

Dato un numero complesso z e un numero intero positivo n, dicesi radice n – esima di z ogni numero complesso w tale che si abbia

$$w^{n} = z$$

Supposto $z \neq 0$ scriviamo z e w sotto forma trigonometrica. Si ha:

$$z = r\,(\cos j + i\,sin\,j\,)$$

$$w = r\,(\cos y + i\,sin\,y\,)$$

con ρ,φ numeri noti e r e ψ incogniti.

Se w è una radice n – esima di z dovrà aversi:

$$\left[r\,(\cos y + i\,sin\,y\,)\right]^{n} = r\,(\cos j + i\,sin\,j\,)$$

Per la formula di De Moivre avremo:

$$r^{n}\,(\cos ny + i\,sin\,ny\,) = r\,(\cos j + i\,sin\,j\,)$$

Affinché si verifichi l'eguaglianza, i numeri complessi dovranno avere lo stesso modulo e i loro esponenti devono differire di multipli di 2π . Dovrà risultare:

$$r^{n} = r \qquad ny = j + 2kp \qquad \text{con } k \in \mathbf{Z}$$

poiché $r > 0$, dovrà essere $r > 0$ e quindi

$$r = \sqrt[n]{r} \quad \text{e inoltre}$$

$$y = \frac{j + 2kp}{n}$$

Pertanto:

Le radici n – esime del numero complesso z sono tutti e soltanto i valori che si ottengono dalla formula

$$w_{k} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{j + 2kp}{n} + i\,sin\,\frac{j + 2kp}{n}\right)$$

Sembrerebbe che la formula fornisse infiniti valori per w_k poiché infiniti sono i numeri $k \in \mathbf{Z}$, vediamo invece che si possono dedurre solo n valori distinti.

Vediamo che gli n numeri complessi che si deducono attribuendo a k i valori

$$0,1,2,\ldots..n-1$$

sono tra loro distinti. Si ha

$$w_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{j}{n} + i\,sin\frac{j}{n}\right) \qquad \text{per k = 0}$$

$$w_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{j+2p}{n} + i\,sin\frac{j+2p}{n}\right) \qquad \text{per k = 1}$$

$$w_2 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{j+4p}{n} + i\,sin\frac{j+4p}{n}\right) \qquad \text{per k = 2}$$

....

$$w_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{j+2(n-1)p}{n} + i\,sin\frac{j+2(n-1)p}{n}\right) \qquad \text{per k = n – 1}$$

$$w_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{j+2np}{n} + i\,sin\frac{j+2np}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{j}{n}+2p\right) + i\,sin\left(\frac{j}{n}+2p\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{j}{n} + i\,sin\frac{j}{n}\right) = w_0 \qquad \text{per k = n}$$

Alla stessa conclusione si perviene se k è un numero negativo:

$$w_{-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{j-2p}{n} + i\,sin\frac{j-2p}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{j-2p}{n}+2p\right) + i\,sin\left(\frac{j-2p}{n}+2p\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{j+2(n-1)p}{n} + i\,sin\frac{j+2(n-1)p}{n}\right) = w_{n-1}$$

e così via.

Possiamo pertanto enunciare il

Teorema – Ogni numero complesso non nullo

$$z = r\,(\cos j + i\,sin\,j\,)$$

ammette n radici n – esime che sono date dalla

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{j+2kp}{n} + i\,sin\frac{j+2kp}{n}\right)$$

con $k = 0,1,2,.....,n-1$