

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

$$\sqrt[n]{f(x)} \underset{>}{\underset{<}{\geq}} g(x)$$

Primo caso - n dispari

$$f(x) \underset{>}{\underset{<}{\geq}} [g(x)]^n$$

Secondo caso - n pari (n = 2)

$$\text{a) } \sqrt{f(x)} < g(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \sqrt{f(x)} > g(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{array} \right.$$

si ha inoltre:

$$\text{i) } g(x) > \sqrt{f(x)} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ [g(x)]^2 > f(x) \end{array} \right.$$

$$\text{ii) } g(x) < \sqrt{f(x)} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ [g(x)]^2 < f(x) \end{array} \right.$$

Per risolvere una disequazione del tipo

$$\sqrt{f(x)} > |g(x)|$$

dovremmo risolvere i sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{array} \right.$$

Poiché il primo sistema non ammette soluzioni essendo $|g(x)|$ non negativo, basta risolvere solamente la disequazione

$$f(x) > |g(x)|^2$$

in quanto

$$|g(x)| \geq 0 \text{ è sempre verificata.}$$

Se la disequazione è del tipo

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

dovremmo risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < |g(x)|^2 \end{cases}$$

Poiché $|g(x)| > 0$ è sempre verificata, basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < |g(x)|^2 \end{cases}$$

ovvero

$$f(x) < |g(x)|^2$$

nel dominio della disequazione. (Per risolvere una disequazione irrazionale è opportuno determinare il dominio della disuguaglianza, cioè gli intervalli in cui essa ha significato in \mathbb{R})