Equazioni irrazionali

Dicesi equazione irrazionale un'equazione nella quale l'incognita compare sotto il segno di radice

Per risolvere un'equazione irrazionale bisogna eliminare la radice, ciò si ottiene elevando a potenza entrambi i membri dell'equazione.
Questo procedimento non dà in $\mathbb{R}$ un'equazione equivalente a quella data, poerchè se ad esempio consideriamo l'equazione

$$x = 2$$

ed eleviamo al quadrato otteniamo

$$x^2 = 4$$

che fornisce le soluzioni ± 2. (-2 non è soluzione dell'equazione data)
Consideriamo equazioni in cui l'indice n della radice è pari (caso particolare $n = 2$)

1) Equazioni del tipo

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \qquad (1)$$

per evitare di ottenere radici cosiddette estranee trasformiamo la (1) nel sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$$

le soluzioni dell'equazione vanno ricercate nelle soluzioni del sistema

2) Equazioni del tipo

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$

in questo caso otteniamo il sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

3) Equazioni del tipo

$$\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = h(x)$$

(si dovrà trasformare l'equazione in modo da ottenere i due membri positivi)
quindi

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = h(x)$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ h(x) \ge 0 \\ \left[\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\right]^2 = [h(x)]^2 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ h(x) \ge 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} = [h(x)]^2 \end{cases}$$

e quindi sviluppando l'ultima equazione, le soluzioni vanno ricercare nel sistema:

$$\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ h(x) \ge 0 \\ [h(x)]^2 - f(x) - g(x) \ge 0 \\ 4f(x)g(x) = \left\{[h(x)]^2 - f(x) - g(x)\right\}^2 \end{cases}$$

4) Equazioni del tipo

$$\sqrt{f(x)} + h(x) = \sqrt{g(x)}$$

Dobbiamo distinguere due casi

1°) $h(x) \ge 0$

2°) $h(x) < 0$

1°) Caso

$h(x) \ge 0$

Si ha il sistema

$$\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ h(x) \ge 0 \\ \left[\sqrt{f(x)} + h(x)\right]^2 = g(x) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ h(x) \ge 0 \\ f(x) + [h(x)]^2 + 2h(x)\sqrt{f(x)} = g(x) \end{cases}$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ g(x) - f(x) - [h(x)]^2 \geq 0 \\ 4[h(x)]^2 f(x) = \left\{ g(x) - f(x) - [h(x)]^2 \right\}^2 \end{cases}$$

2°) Caso

$h(x) < 0$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) < 0 \\ f(x) = \left[h(x) + \sqrt{g(x)} \right]^2 \end{cases}$$

Si risolve quindi come il caso precedente

5) Equazioni del tipo

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$$

In questo caso le soluzioni vanno ricercate tra quelle che appartengono al dominio della equazione:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \end{cases}$$

e che soddisfano l'equazione

$$\left[\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \right]^2 = h(x)$$

per cui avremo:

$$f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} = h(x)$$

e quindi

$$2\sqrt{f(x)g(x)} = h(x) - f(x) - g(x)$$

che si trasformano nel sistema

$$\begin{cases} h(x) - f(x) - g(x) \geq 0 \\ 4f(x)g(x) = [h(x) - f(x) - g(x)]^2 \end{cases}$$

6) Equazioni del tipo

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$$

Per essere certi di non incorrere in soluzioni incompatibili è necessario scrivere l'equazione in modo da avere entrambi i membri positivi, cioè nella forma

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{g(x)}$$

e trovato il dominio dell'equazione considerare le soluzioni che soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} f(x) - g(x) - g(x) \geq 0 \\ [f(x) - g(x) - h(x)]^2 = 4g(x)h(x) \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema, appartenenti al dominio dell'equazione, saranno le soluzioni dell'equazione.

ESEMPI:

Esempio 1

Risolvere l'equazione

$$x - \sqrt{3x+1} - 1 = 0$$

Isolando il radicale avremo

$$\sqrt{3x+1} = x - 1 \qquad (1)$$

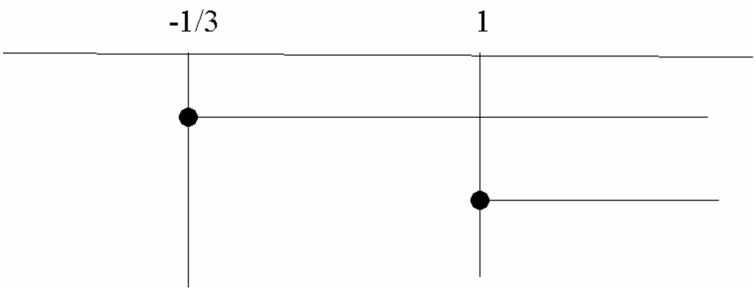
e quindi:

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0 & \text{dominio dell'equazione} \\ x-1 \geq 0 & \text{il secondo membro non può essere negativo} \end{cases}$$

otteniamo

$$\begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Avremo il grafico



e quindi

$$x \geq 1$$

elevando al quadrato la (1) *otteniamo*

$$3x - 1 = (x-1)^2$$

$$x^2 - 5x = 0$$

le cui soluzioni sono

$$x = 0 \qquad x = 5$$

La soluzione accettabile è solo

$$x = 5$$

Esempio 2

Risolvere l'equazione

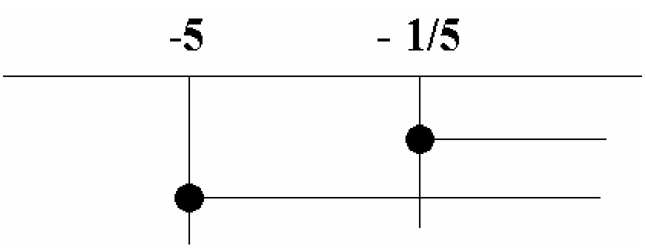
$$\sqrt{5x+1} = \sqrt{2x+10} \qquad (2)$$

Il dominio dell'equazione è dato dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} 5x+1 \geq 0 \\ 2x+10 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{5} \\ x \geq -5 \end{cases}$$

Si ha il grafico



da cui

$$x \geq -\frac{1}{5}$$

Elevando al quadrato ambo i membri della (2) *otteniamo*

$$5x+1 = 2x+10$$

e quindi

$$x = 3$$

La soluzione è quindi accettabile

Esempio 3

Risolvere l'equazione

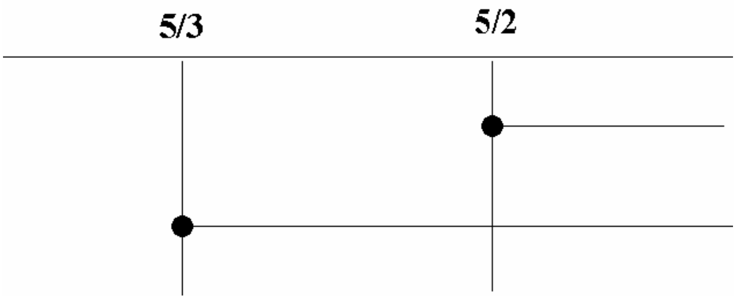
$$\sqrt{3x-5} - \sqrt{2x-5} = 1 \qquad (3)$$

Il dominio dell'equazione è dato da

$$\begin{cases} 3x-5 \geq 0 \\ 2x-5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{5}{3} \\ x \geq \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

si ha il grafico



da cui

$$x \geq \frac{5}{2}$$

Elevando al quadrato ambo i membri della (3) *otteniamo*

$$3x - 5 = \left(1 + \sqrt{2x-5}\right)^2$$

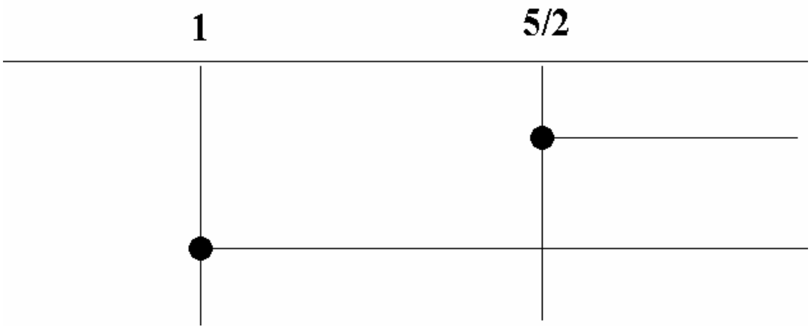
$$3x - 5 = 1 + 2\sqrt{2x-5} + 2x - 5$$

$$2\sqrt{2x-5} = x - 1 \qquad (4)$$

Le condizioni per l'esistenza di soluzioni saranno

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{5}{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

per cui si ha



e quindi

$$x \geq \frac{5}{2}$$

Elevando al quadrato ambo i membri della (4) otteniamo

$$4(2x-5) = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 2x - 8x + 1 + 20 = 0$$

$$x^2-10x+21=0$$

$$x=5\pm 2 \quad \begin{cases} 3 \\ 7 \end{cases}$$

Pertanto entrambe le soluzioni sono accettabili perché maggiori di $\frac{5}{2}$

Esempio 4

Risolvere l'equazione

$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+6}-\sqrt{16x+1}=0 \qquad (5)$$

Per essere certi di non incorrere in soluzioni incompatibolo, è necessarioi portare la (5) *nella forma*

$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+6}=\sqrt{16x+1}$$

Le soluzioni vanno ricercate nel dominio dell'equazione

Si ha il sistema

$$\begin{cases} 5x+1\geq 0 \\ x+6\geq 0 \\ 16x+1\geq 0 \end{cases}$$

da cui $x\geq -\frac{1}{16}$

Elevando al quadrato ambo i membri della (5) otteniamo

$$5x+1+x+6+\sqrt{(5x+1)(x+6)}=16x+1$$

$$2\sqrt{(5x+1)(x+6)}=10x-6$$

$$\sqrt{(5x+1)(x+6)}=5x-3 \qquad (6)$$

Le condizioni per l'esistenza di soluzioni saranno

$$\begin{cases} x\geq -\frac{1}{16} \\ x\geq \frac{3}{5} \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad x\geq \frac{3}{5}$$

Elevando al quadrato ambo i membri della (6) otteniamo

$$5x^2+30x+x+6=25x^2-30x+9$$

$$20x^2-61x+3=0$$

e quindi $x=\frac{1}{20}$ *e* $x=3$

Pertanto solo la soluzione $x=3$ *risulta accettabile.*

Esempio 5

Risolvere l'equazione

$\sqrt{x-4}=\sqrt{x-9}-\sqrt{x-1}$ (7)

determiniamo il dominio dell'equazione mediante il sistema

$$\begin{cases} x-4\geq 0 \\ x-9\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases}$$

e osserviamo che deve essere

$x\geq 9$ (8)

Elevando al quadrato la (6) dopo semplici calcoli, si ottiene

$x-6=2\sqrt{x^2-10x+9}$ (9)

Questa è vera quando $x\geq 6$

che, associata alla (8'), impone $x\geq 9$

Elevando al quadrato la (3') si ottiene

$3x^2-28x=0$

che dà come soluzione ,ipoteticamente accettabile $x=\dfrac{28}{3}$

Se si esegue la verifica della (1') si riscontra che tale radice non soddisfa l'equazione data, pur essendo maggiore di 9

Risolviamo adesso la (7) portandola nella forma:

$\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}=\sqrt{x-9}$

Elevando al quadrato, si ha

$2\sqrt{x^2-5x+4}=-4-x$

e questa è vera per $x\leq -4$.

Dovendo valere anche la (8) si deduce che l'equazione data non ha soluzioni, come in effetti deve essere.

Altri esempi di equazioni irrazionali

<u>Esempio n°6</u>

Risolviamo l'equazione:

$\sqrt{3x-1}=\sqrt{4x-5}-\sqrt{x+4}$ (1'')

Mediante il sistema:

$$\begin{cases} 3x-1\geq 0 \\ 4x-5\geq 0 \\ x+4\geq 0 \end{cases}$$

ricaviamo che deve essere: $x\geq \frac{5}{4}$ (2'')

ed elevando al quadrato la (1''), *dopo semplici calcoli, otteniamo:*

$$\sqrt{(4x-5)(x+4)}=x \qquad (3'')$$

Da cui: $x\geq 0$ *E, dovendo valere anche la* (2''), *si ha che* $x\geq \frac{5}{4}$

Elevando al quadrato la (3''), *dopo semplici passaggi, si perviene a*

$$3x^2+11x-20=0$$

la cui unica soluzione ipoteticamente accettabile è $x=\frac{4}{3}$

Se eseguiamo la verifica dell'equazione data riscontriamo che tale radice non la soddisfa, pur essendo maggiore di $\frac{5}{4}$

Se invece, portiamo la (1'') *nella forma*

$$\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+4}=\sqrt{4x-5}$$

ed eleviamo al quadrato, otteniamo:

$$\sqrt{(3x-1)(x+4)}=-4$$

dalla quale deduciamo che l'equazione data è impossibile, come in effetti deve essere.

Esempio n°7

Risolviamo l'equazione

$$\sqrt{x-4}=3-\sqrt{4x-7} \qquad (1''')$$

Determiniamo il dominio dell'equazione mediante il sistema:

$$\begin{cases} x-4\geq 0 \\ 4x-7\geq 0 \end{cases}$$

e otteniamo $x\geq 4$ (2''')

Elevando al quadrato la (1''') abbiamo:

$$x+2=2\sqrt{4x-7} \qquad (3''')$$

Da cui ricaviamo $x\geq -2$ *che, associata alla* (2'''), *fornisce:* $x\geq 4$

Elevando al quadrato la (3''') *otteniamo come soluzioni ipoteticamente accettabili*

$x=4$ e $x=8$

La seconda di esse non soddisfa la (1'''), *pur essendo maggiore di* 4.

Se invece portiamo l'equazione data nella forma:

$$\sqrt{x-4}+\sqrt{4x-7}=3$$

ed eleviamo al quadrato otteniamo: $2\sqrt{(x-4)(4x-7)}=20-5x$

da cui si ricava $x\leq 4$

Osservando che deve valere anche la (2''') *si deduce che l'unica soluzione da accettare è*

$x=4$.