

Equazioni irrazionali

Dicesi equazione irrazionale un'equazione nella quale l'incognita compare sotto il segno di radice

Per risolvere un'equazione irrazionale bisogna eliminare la radice, ciò si ottiene elevando a potenza entrambi i membri dell'equazione.

Questo procedimento non dà in \mathbb{R} un'equazione equivalente a quella data, poerchè se ad esempio consideriamo l'equazione

$$x = 2$$

ed eleviamo al quadrato otteniamo

$$x^2 = 4$$

che fornisce le soluzioni ± 2 . (-2 non è soluzione dell'equazione data)

Consideriamo equazioni in cui l'indice n della radice è pari (caso particolare $n = 2$)

1) Equazioni del tipo

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \quad (1)$$

per evitare di ottenere radici cosiddette estranee trasformiamo la (1) nel sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$$

le soluzioni dell'equazione vanno ricercate nelle soluzioni del sistema

2) Equazioni del tipo

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$

in questo caso otteniamo il sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

3) Equazioni del tipo

$$\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = h(x)$$

(si dovrà trasformare l'equazione in modo da ottenere i due membri positivi)

quindi

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = h(x)$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ \left[\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \right]^2 = [h(x)]^2 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} = [h(x)]^2 \end{cases}$$

e quindi sviluppando l'ultima equazione, le soluzioni vanno ricercare nel sistema:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ [h(x)]^2 - f(x) - g(x) \geq 0 \\ 4f(x)g(x) = \left\{ [h(x)]^2 - f(x) - g(x) \right\}^2 \end{cases}$$

4) Equazioni del tipo

$$\sqrt{f(x)} + h(x) = \sqrt{g(x)}$$

Dobbiamo distinguere due casi

1°) $h(x) \geq 0$

2°) $h(x) < 0$

1°) Caso

$$h(x) \geq 0$$

Si ha il sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ \left[\sqrt{f(x)} + h(x) \right]^2 = g(x) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ f(x) + [h(x)]^2 + 2h(x)\sqrt{f(x)} = g(x) \end{cases}$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ g(x) - f(x) - [h(x)]^2 \geq 0 \\ 4[h(x)]^2 f(x) = \{g(x) - f(x) - [h(x)]^2\}^2 \end{cases}$$

2°) Caso

$$h(x) < 0$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) < 0 \\ f(x) = [h(x) + \sqrt{g(x)}]^2 \end{cases}$$

Si risolve quindi come il caso precedente

5) Equazioni del tipo

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$$

In questo caso le soluzioni vanno ricercate tra quelle che appartengono al dominio della equazione:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \end{cases}$$

e che soddisfano l'equazione

$$[\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}]^2 = h(x)$$

per cui avremo:

$$f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} = h(x)$$

e quindi

$$2\sqrt{f(x)g(x)} = h(x) - f(x) - g(x)$$

che si trasformano nel sistema

$$\begin{cases} h(x) - f(x) - g(x) \geq 0 \\ 4f(x)g(x) = [h(x) - f(x) - g(x)]^2 \end{cases}$$

6) Equazioni del tipo

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$$

Per essere certi di non incorrere in soluzioni incompatibili è necessario scrivere l'equazione in modo da avere entrambi i membri positivi, cioè nella forma

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{g(x)}$$

e trovato il dominio dell'equazione considerare le soluzioni che soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} f(x) - g(x) - h(x) \geq 0 \\ [f(x) - g(x) - h(x)]^2 = 4g(x)h(x) \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema, appartenenti al dominio dell'equazione, saranno le soluzioni dell'equazione.

ESEMPI:

Esempio 1

Risolvere l'equazione

$$x - \sqrt{3x+1} - 1 = 0$$

Isolando il radicale avremo

$$\sqrt{3x+1} = x - 1 \quad (1)$$

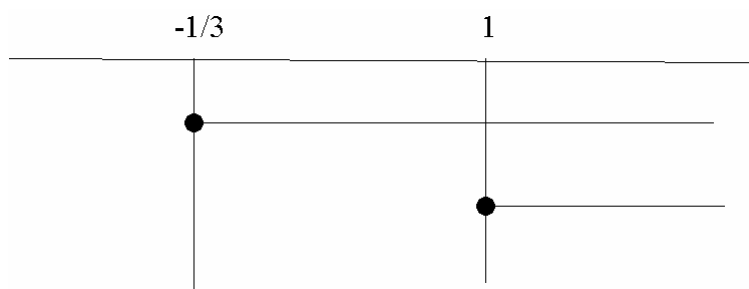
e quindi:

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0 & \text{dominio dell'equazione} \\ x-1 \geq 0 & \text{il secondo membro non può essere negativo} \end{cases}$$

otteniamo

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Avremo il grafico



e quindi

$$x \geq 1$$

elevando al quadrato la (1) otteniamo

$$3x - 1 = (x - 1)^2$$

$$x^2 - 5x = 0$$

le cui soluzioni sono

$$x = 0 \quad x = 5$$

La soluzione accettabile è solo

$$x=5$$

Esempio 2

Risolvere l'equazione

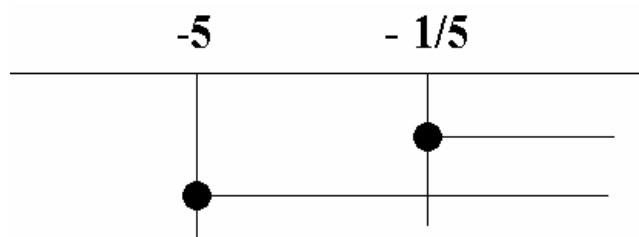
$$\sqrt{5x+1} = \sqrt{2x+10} \quad (2)$$

Il dominio dell'equazione è dato dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} 5x+1 \geq 0 \\ 2x+10 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{5} \\ x \geq -5 \end{cases}$$

Si ha il grafico



da cui

$$x \geq -\frac{1}{5}$$

Elevando al quadrato ambo i membri della (2) otteniamo

$$5x+1 = 2x+10$$

e quindi

$$x=3$$

La soluzione è quindi accettabile

Esempio 3

Risolvere l'equazione

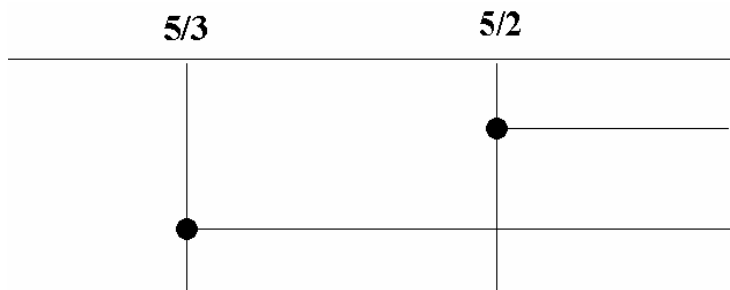
$$\sqrt{3x-5} - \sqrt{2x-5} = 1 \quad (3)$$

Il dominio dell'equazione è dato da

$$\begin{cases} 3x-5 \geq 0 \\ 2x-5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

si ha il grafico



da cui

$$x \geq \frac{5}{2}$$

Elevando al quadrato ambo i membri della (3) otteniamo

$$3x-5 = (1+\sqrt{2x-5})^2$$

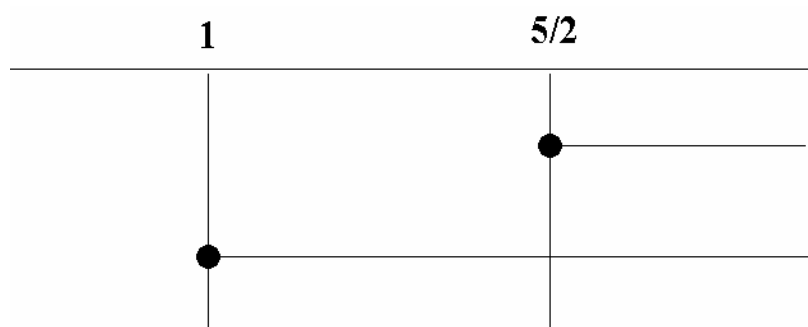
$$3x-5 = 1+2\sqrt{2x-5}+2x-5$$

$$2\sqrt{2x-5} = x-1 \quad (4)$$

Le condizioni per l'esistenza di soluzioni saranno

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

per cui si ha



e quindi

$$x \geq \frac{5}{2}$$

Elevando al quadrato ambo i membri della (4) otteniamo

$$4(2x-5) = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 2x - 8x + 1 + 20 = 0$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$x = 5 \pm 2 \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \searrow 7 \end{array}$$

Pertanto entrambe le soluzioni sono accettabili perché maggiori di $\frac{5}{2}$

Esempio 4

Risolvere l'equazione

$$\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+6} - \sqrt{16x+1} = 0 \quad (5)$$

Per essere certi di non incorrere in soluzioni incompatibili, è necessario portare la (5) nella forma

$$\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+6} = \sqrt{16x+1}$$

Le soluzioni vanno ricercate nel dominio dell'equazione

Si ha il sistema

$$\begin{cases} 5x+1 \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \\ 16x+1 \geq 0 \end{cases}$$

da cui $x \geq -\frac{1}{16}$

Elevando al quadrato ambo i membri della (5) otteniamo

$$5x+1+x+6+\sqrt{(5x+1)(x+6)} = 16x+1$$

$$2\sqrt{(5x+1)(x+6)} = 10x-6$$

$$\sqrt{(5x+1)(x+6)} = 5x-3 \quad (6)$$

Le condizioni per l'esistenza di soluzioni saranno

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{16} \\ x \geq \frac{3}{5} \end{cases} \quad \text{e quindi } x \geq \frac{3}{5}$$

Elevando al quadrato ambo i membri della (6) otteniamo

$$5x^2 + 30x + x + 6 = 25x^2 - 30x + 9$$

$$20x^2 - 61x + 3 = 0$$

e quindi $x = \frac{1}{20}$ e $x = 3$

Pertanto solo la soluzione $x = 3$ risulta accettabile.

Esempio 5

Risolvere l'equazione

$$\sqrt{x-4} = \sqrt{x-9} - \sqrt{x-1} \quad (7)$$

determiniamo il dominio dell'equazione mediante il sistema

$$\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x-9 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$$

e osserviamo che deve essere

$$x \geq 9 \quad (8)$$

Elevando al quadrato la (6) dopo semplici calcoli, si ottiene

$$x-6 = 2\sqrt{x^2-10x+9} \quad (9)$$

Questa è vera quando $x \geq 6$

che, associata alla (8'), impone $x \geq 9$

Elevando al quadrato la (3') si ottiene

$$3x^2 - 28x = 0$$

che dà come soluzione, ipoteticamente accettabile $x = \frac{28}{3}$

Se si esegue la verifica della (1') si riscontra che tale radice non soddisfa l'equazione data, pur essendo maggiore di 9

Risolviamo adesso la (7) portandola nella forma:

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x-9}$$

Elevando al quadrato, si ha

$$2\sqrt{x^2-5x+4} = -4-x$$

e questa è vera per $x \leq -4$.

Dovendo valere anche la (8) si deduce che l'equazione data non ha soluzioni, come in effetti deve essere.

Altri esempi di equazioni irrazionali**Esempio n° 6**

Risolviamo l'equazione:

$$\sqrt{3x-1} = \sqrt{4x-5} - \sqrt{x+4} \quad (1'')$$

Mediante il sistema:

$$\begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ 4x - 5 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases}$$

ricaviamo che deve essere: $x \geq \frac{5}{4}$ (2'')

ed elevando al quadrato la (1''), dopo semplici calcoli, otteniamo:

$$\sqrt{(4x-5)(x+4)} = x \quad (3'')$$

Da cui: $x \geq 0$ e, dovendo valere anche la (2''), si ha che $x \geq \frac{5}{4}$

Elevando al quadrato la (3''), dopo semplici passaggi, si perviene a

$$3x^2 + 11x - 20 = 0$$

la cui unica soluzione ipoteticamente accettabile è $x = \frac{4}{3}$

Se eseguiamo la verifica dell'equazione data riscontriamo che tale radice non la soddisfa, pur essendo maggiore di $\frac{5}{4}$

Se invece, partiamo la (1'') nella forma

$$\sqrt{3x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{4x-5}$$

ed eleviamo al quadrato, otteniamo:

$$\sqrt{(3x-1)(x+4)} = -4$$

dalla quale deduciamo che l'equazione data è impossibile, come in effetti deve essere.

Esempio n° 7

Risolviamo l'equazione

$$\sqrt{x-4} = 3 - \sqrt{4x-7} \quad (1''')$$

Determiniamo il dominio dell'equazione mediante il sistema:

$$\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 4x-7 \geq 0 \end{cases}$$

e otteniamo $x \geq 4$ (2''')

Elevando al quadrato la (1''') abbiamo:

$$x+2 = 2\sqrt{4x-7} \quad (3''')$$

Da cui ricaviamo $x \geq -2$ che, associata alla (2'''), fornisce: $x \geq 4$

Elevando al quadrato la (3''') otteniamo come soluzioni ipoteticamente accettabili

$$x = 4 \text{ e } x = 8$$

La seconda di esse non soddisfa la (1'''), pur essendo maggiore di 4.

Se invece portiamo l'equazione data nella forma:

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{4x-7} = 3$$

ed eleviamo al quadrato otteniamo: $2\sqrt{(x-4)(4x-7)} = 20 - 5x$

da cui si ricava $x \leq 4$

Osservando che deve valere anche la (2''') si deduce che l'unica soluzione da accettare è

$$x = 4.$$