Equazioni lineari

Data l'equazione

$$a\ sinx + b\cos x + c = 0$$

dividendo per $\sqrt{a^2 + b^2}$ otteniamo:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} sin\, x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \qquad (1)$$

Poniamo

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = k \quad \text{e} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = h$$

si ha:

$$h^2 + k^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1$$

Essendo

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1 \quad \text{e} \quad \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$$

possiamo porre

$$k = \cos\varphi \qquad h = sin\ \varphi$$

cioè

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi \qquad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$$

Sostituendo nella (1), otteniamo

$$\sin x \quad \sin\varphi + \cos x \quad \sin\varphi + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

cioè

$$sin(x+\varphi) = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Ponendo

$$x + \varphi = z$$

avremo

$$sin\, z = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Posto $A = \sqrt{a^2+b^2}$ si ha

$$A\, sin(x+\varphi) = -c$$

Se $c = 0$ otteniamo

$$A\, sin(x+\varphi) = -c$$

Esempio – *Risolvere l'equazione*

$$\sqrt{3} sin\, 4x + \cos 4x = 1$$

Poniamo

$$4x = \alpha$$

Si ha:

$$\sqrt{3} sin\, \alpha + \cos\alpha = 1$$

e quindi

$$a = \sqrt{3} \qquad b = 1$$

per cui

$$\sqrt{a^2+b^2} = 2$$

otteniamo

$$\frac{\sqrt{3}}{2} sin\, \alpha + \frac{3}{2}\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

Inoltre

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\alpha \qquad \frac{1}{2} = sin\, \alpha$$

e quindi

$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$

L'equazione diviene

$$sin\, \alpha \cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha\, sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

cioè

$$sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Avremo quindi

1) $\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$$\alpha = 2k\pi$$

essendo

$4x = \alpha$ otteniamo

$$4x = 2k\pi$$

$$x = k\frac{\pi}{2}$$

2) $\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$$\alpha = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

cioè

$$4x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$$