Appunti elaborati dal collega Prof. Vincenzo De Pasquale

Infinitesimi

Si dice che f è infinitesima o che è un infinitesimo per $x \to x_0$ se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Un infinitesimo, quindi è una variabile che tende a zero.

Es. 1- $y = \cos x$ è un infinitesimo per $x \to \frac{p}{2}$ poiché $\lim\limits_{x \to \frac{p}{2}} \cos x = 0$

$y = \ln x$ è un infinitesimo per $x \to 1$ poiché $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0$.

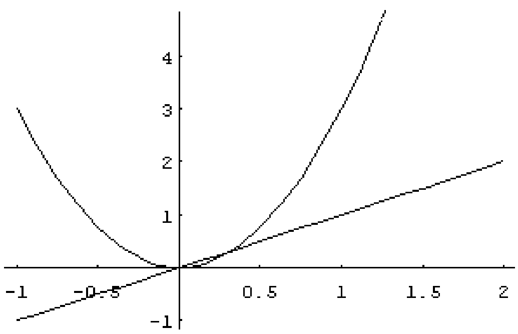
Dati due infinitesimi a e b, può accadere che essi tendano a zero con diversa rapidità.

Es. 2 $y_1 = x$ e $y_2 = x^2$

Sono entrambi infinitesimi per $x \to 0$

Per $x = 0{,}1$ $y_1 = 0{,}1$ e $y_2 = 0{,}011$

Per $x = 0{,}01$ $y_1 = 0{,}01$ e $y_2 = 0{,}0001$



Anche graficamente si nota che le ordinate y_2 diminuiscono più rapidamente di y_1 per $x \to 0$.

Per confrontare la diversa rapidità di tendenza a zero, si introduce il concetto di **ordine** di un infinitesimo.

1. Diciamo che due infinitesimi a e b sono dello stesso ordine se:

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{a}{b} = k \quad \text{con } k \neq 0 \text{ e finito.}$$

Es. 3 $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Quindi $\sin x$ e x sono infinitesimi dello stesso ordine.

Es. 4 $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$

Quindi $1 - \cos x$ e x^2 sono infinitesimi dello stesso ordine

2. Diciamo che l'infinitesimo α è di ordine superiore a β se

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{a}{b} = 0$$

Es. 5 $\lim_{x \longrightarrow \frac{p}{2}} \frac{1 - sin\,x}{\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \longrightarrow \frac{p}{2}} \frac{-\cos x}{-sin\,x} = 0$

Quindi $1 - sinx$ è di ordine superiore a $\cos x$

3. Diciamo che α è infinitesimo di ordine inferiore a β se

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{a}{b} = \infty$$

4. Se $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{a}{b}$ non esiste, i due infinitesimi non sono confrontabili (almeno con il criterio del rapporto).
5. Diciamo che α è un infinitesimo di ordine n per $x \to 0$ se α è dello stesso ordine di x^n, cioè se

   $$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{a}{x^n} = k \quad \text{con } k \neq 0 \text{ e finito.}$$

Es. 6 Dato che $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Concludiamo che $1 - \cos x$ è un infinitesimo del secondo ordine.

Per stabilire l'ordine di un infinitesimo α lo si confronta con x^n (con n incognito) eseguendo il calcolo del

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{a}{x^n}$$

fino a quando il limite risulta determinato.

Es. 7 Per determinare l'ordine di $y = x - sin\,x$ per $x \to 0$ si ha:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - sin\,x}{x^n} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{nx^{n-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{sin\,x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$$

Se $n - 3 = 0$ la forma non è più indeterminata, pertanto $x - sin\,x$ è infinitesimo del terzo ordine.

Siano a e b due infinitesimi dello stesso ordine , per cui

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{a}{b} = k \quad \text{con } k \neq 0$$

avremo

$$\frac{a}{b} = k + e$$

dove ε è un infinitesimo simultaneo con a e b . Segue che

$$a = b\,k + b\,e$$

l'infinitesimo $b\,k$ è dello stesso ordine di b $\left(\lim_{x \longrightarrow a} \frac{b\,k}{b} = k \right)$ e quindi anche di a .

$b\,e$ essendo il prodotto di due infinitesimi è un infinitesimo di ordine superiore a ciascuno dei due: in particolare è di ordine superiore a b .

In conclusione: Ogni infinitesimo a si può decomporre nella somma di due infinitesimi

$a = a_1 + a_2$ in cui a_1 è dello stesso ordine di a ed è detto **parte principale** di a , mentre a_2 è di ordine superiore rispetto ad a ed è detto **parte complementare** di a .

Principio di sostituzione degli infinitesimi

Il limite del rapporto di due infinitesimi è uguale al limite del rapporto delle loro parti principali.
Infatti se a e b sono infinitesimi simultanei si ha decomponendoli

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{a}{b} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{a_1\left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right)}{b_1\left(1 + \frac{b_2}{b_1}\right)} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{a_1}{b_1}$$

Poiché

$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{a_2}{a_1} = 0$ perché a_2 è di ordine superiore rispetto ad a_1 e

$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{b_2}{b_1} = 0$ perché b_2 è di ordine superiore rispetto ad b_1

concludiamo che

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{a}{b} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{a_1}{b_1}$$

Segue che il limite del rapporto di due infinitesimi non si altera eliminando gli infinitesimi di ordine superiore (ciò semplifica il calcolo)

Es. 8 $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{8\sin x + 2x^2 + x\sin x}{3x - x^2 \sin x}$

Al numeratore : $\sin x$ è del primo ordine

x^2 è del secondo ordine

$x \sin x$ è del secondo ordine

Al denominatore x è del primo ordine

$x^2 \sin x$ è del terzo ordine

Pertanto

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{8\sin x + 2x^2 + x\sin x}{3x - x^2 \sin x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{8\sin x}{3x} = \frac{8}{3}$$

Es. 9 Le due funzioni

$a = x - \ln(1+x)$ e $b = 1 - \cos x$

per $x \to 0$ sono due infinitesimi. Confrontare β con α

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{a}{b} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1-\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{1+x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{(1+x)^2}}{\cos x} = 1$$

I due infinitesimi sono dello stesso ordine

Es. 10 Confrontare l'infinitesimo $a = 1 - \cos x - \dfrac{x^2}{2}$ con l'infinitesimo $b = tg\, x - x$.

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{a}{b} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - \dfrac{x^2}{2}}{tg\, x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{1 + tg^2 x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2tg\, x(1+tg^2 x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\left[1 + tg^2 x + 3tg^2 x(1+tg^2 x)\right]} = \frac{0}{2} = 0$$

Pertanto α è di ordine superiore rispetto a β

Confrontare l'infinitesimo $a = x - \sin x$ con l'infinitesimo $b = tg^2 x - \sin^2 x$

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{a}{b} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{tg^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{2tg\, x(1+tg^2 x) - 2\sin x \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{sin\, x}{2\left[1+tg^2 x+3(1+tg^2 x)-\cos^2 x+sin^2 x\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2\left[2tg\, x(1+tg^2 x)+3\left[2tg\, x(1+tg^2 x)+3tg^2 x(1+tg^2 x)\right]+4sin\, x\cos x\right]} = \infty$$

Si conclude che α è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a β

Es. 11 La funzione $y = xsin\frac{1}{x}$ se x tende a zero, tende a zero, perciò y è un infinitesimo. Confrontare y con l'infinitesimo x.

Il rapporto è

$$\frac{y}{x} = \frac{xsin\frac{1}{x}}{x} = sin\frac{1}{x}$$

e quindi il

$$\lim_{x\to 0} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0} sin\frac{1}{x}$$

non esiste.

Dobbiamo concludere che l'infinitesimo $xsin\frac{1}{x}$, per $x \to 0$ non è confrontabile con l'infinitesimo x, cioè non è dello stesso ordine di x, né di ordine superiore.

Es. 12 Riguardando x come infinitesimo di confronto, determinare l'ordine e la parte principale dell'infinitesimo, determinare la parte principale dell'infinitesimo

$$\frac{8x^3}{x^2+4}$$

Siccome si può scrivere

$$\frac{y}{x^3} = \frac{8}{x^2+4}$$

essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{y}{x^3} = \frac{8}{4} = 2 \neq 0$$

si conclude che y è infinitesimo del 3° ordine rispetto ad x e che la sua parte principale è $2x^3$. Pertanto si può scrivere

$$y = 2x^3 + e\, x^3$$

ove $\lim_{x\to 0} e = 0$.

Es. 13 Determinare l'ordine e la parte principale dell'infinitesimo

$$y = 1 - \cos x$$

Essendo

$$y = 1 - \cos x = 2 sin^2 \frac{x}{2}$$

basta dividere ambo i membri per x^2, si ha

$$\frac{y}{x^2} = \frac{2 sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{2}{x^2} sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{y}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{x^2} sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Si conclude che $y = 1 - \cos x$ è infinitesimo del secondo ordine rispetto ad x (per $x \to 0$) e la sua parte principale è $\frac{1}{2} x^2$.

L'infinitesimo si può scrivere

$$y = \frac{1}{2} x^2 + e\, x^2 \qquad \text{dove } \lim_{x \to 0} e = 0$$

Quando l'artificio di dividere per una opportuna potenza dell'infinitesimo di confronto non è evidente si deve procedere confrontando con x^n.

Es. 14 Determinare l'ordine dell'infinitesimo

$$y = \sqrt[3]{\frac{16x^5}{x^2 + 2}}$$

Per $x \to 0$ si ha

$$\frac{y}{x^n} = \frac{1}{x^n} \sqrt[3]{\frac{16x^5}{x^2 + 2}} = \sqrt[3]{\frac{16x^5}{x^{3n}(x^2 + 2)}} = y\sqrt[3]{\frac{16x^{5-3n}}{x^2 + 2}}$$

Poiché il denominatore non tende a zero per $x \to 0$, determiniamo n in modo che anche il denominatore non vi tenda, occorre quindi che sia $5 - 3x = 0$, da cui

$$n = \frac{5}{3}$$

Avremo pertanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{y}{x^{\frac{5}{3}}} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{\frac{16}{x^2 + 2}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Es. 15 Applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x + 2x^3 + sin^2 x \cos x}{4x + x tg x + sinx\, tg^2 x}$$

Al numeratore $3x$ è infinitesimo del 1° ordine rispetto ad x

$2x^3$ è infinitesimo del 3° ordine rispetto ad x

$sin^2 x \cos x$ è infinitesimo del 2° ordine rispetto ad x

Al denominatore $4x$ è infinitesimo del 1° ordine rispetto ad x

$tg\,x$ è infinitesimo del 2° ordine rispetto ad x

$sinx\,tg^2x$ è infinitesimo del 3° ordine rispetto ad x

Per cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+2x^3+sin^2x\cos x}{4x+xtg\,x+sinx\,tg^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}$$

Es. 16 Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x}{tg\,x-x}$$

E' immediato verificare che sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi (per $x\to 0$) e determinare l'ordine.

Per il numeratore

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-2}{nx^{n-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}}{n(n-1)x^{n-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{(1+x)^3}+\frac{2}{(1-x)^3}}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}=$$

Se poniamo $n=3$ il limite non è più indeterminato e si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{(1+x)^3}+\frac{2}{(1-x)^3}}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Pertanto la parte principale dell'infinitesimo è $\frac{2}{3}x^3$

Per il denominatore

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{1+tg^2x-1}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{2tg\,x+2tg^3x}{n(n-1)x^{n-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1+tg^2x)+6tg^2x(1+tg^2x)}{n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}}$$

Ponendo $n-3=0$ il limite risulta determinato. Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-x}{x^3}==\lim_{x\to 0}\frac{2(1+tg^2x)+6tg^2x(1+tg^2x)}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{3}$$

la parte principale dell'infinitesimo $tgx-x$ è $\frac{1}{3}x^3$

Il limite proposto sarà

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x}{tg\,x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^3}{\frac{1}{3}x^3}=2$$

Es. 17 Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^6-\text{arctg}^3\left(\sqrt[3]{x^2}\right)+sin^5 x}{\left(e^x-1\right)-7x^5-\left(5^x-1\right)^4}$$

La presenza delle potenze suggerisce di trascurare gli infinitesimi di ordine superiore

A. x^6 è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $sin^5 x$ e quindi si può trascurare

B. Premesso che $\text{arctg}^3\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$ sia infinitesimo del 3° ordine, poniamo

$$\sqrt[3]{x^2}=t$$
$$x^2=t^3$$
$$x=t^{\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\text{arctg}^3 t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{3\,\text{arctg}^2 t\,\frac{1}{1+t^2}}{3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+t^2}\lim_{t\to 0}\frac{\text{arctg}^2 t}{t^2}=1\cdot\lim_{t\to 0}\frac{2\,\text{arctg}\ t\,\frac{1}{1+t^2}}{2t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+t^2}=1$$

Pertanto $\text{arctg}^3 t$ e t^3 sono infinitesimi dello steso ordine, inoltre $t^3=x^2$ per cui $\text{arctg}^3\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$ è infinitesimo del 2° ordine rispetto ad x.

Ciò suggerisce di trascurare $sin^5 x$ rispetto all'arcotangente.

C. Verifichiamo l'0rdine di e^x-1

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{nx^{n-1}}$$

Se $n-1=0$ il limite è determinato, per cui e^x-1 è infinitesimo del 1° ordine.

Trascuriamo inoltre $7x^5$

D. Verifichiamo l'0rdine di $(5^x-1)^4$. Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{(5^x-1)^4}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{4(5^x-1)^3 5^x\ln 5}{4x^3}=\lim_{x\to 0}5^x\ln 5\lim_{x\to 0}\frac{(5^x-1)^3}{x^3}=$$

$$=\ln 5\lim_{x\to 0}\frac{3(5^x-1)^2 5^x\ln 5}{3x^2}=\ln 5\lim_{x\to 0}5^x\ln 5\lim_{x\to 0}\frac{(5^x-1)^2}{x^2}=\ln^2 5\lim_{x\to 0}\frac{2(5^x-1)5^x\ln 5}{2x}=$$

$$=\ln^3 5\lim_{x\to 0}\frac{5^x\ln 5}{1}=\ln^4 5$$

Pertanto $(5^x - 1)^4$ è infinitesimo del quarto ordine, e possiamo trascurarlo perchè di ordine superiore rispetto a $e^x - 1$.

Possiamo quindi scrivere

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^6 - \operatorname{arctg}^3\left(\sqrt[3]{x^2}\right) + sin^5 x}{\left(e^x - 1\right) - 7x^5 - \left(5^x - 1\right)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{arctg}^3\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(e^x - 1\right)} = -\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{arctg}^3 t}{e^{t^{\frac{3}{2}}} - 1} =$$

$$= -\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{arctg}^3 t}{e^{t^{\frac{3}{2}}} - 1} = -\lim_{t\to 0} \frac{3\operatorname{arctg}^2 t \dfrac{1}{1+t^2}}{e^{t^{\frac{3}{2}}} \dfrac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}} = -2\lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{1}{1+t^2}}{e^{t^{\frac{3}{2}}}} \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 t}{\sqrt{t}} =$$

$$= -2\cdot 1\cdot \lim_{t\to 0} \frac{2\operatorname{arctg} t \dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{1}{2}\sqrt{t}} = -\lim_{t\to 0} \sqrt{t}\cdot \operatorname{arctg} t = 0$$

Calcolare i seguenti limiti

☎ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{sin^2 x + 2sin^3 x - xtg^3 x}{x\ln(1+x) - x^3 - + xsin^3 x}$ $\boxed{1}$

☎ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - sin\, x \cos x + tg\, x}{x\, sin\, x}$ $\boxed{3}$

☎ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 tg\, x}{2x^3 + x^2 sin^2 x - tg^4 x}$ $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

☎ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x + x^3 + \cos x - sin^2 x}{x + xtg x + sin\, x tg^2 x}$ $\boxed{2}$

☎ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) + tg\sqrt{x} + e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{x}}{3\sqrt{x} + x\, sin\, x}$ $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+\cos x)^4 + x^5 + \sqrt{x} sin^3 x}{sin\, x + 7x^4}$

Al numeratore

$(1+\cos x)^4$ è infinitesimo di ordine 8 essendo $1+\cos x$ del 2° ordine

x^5 “ “ 5

$\sqrt{x} sin^3 x = x^{\frac{1}{2}} sin^3 x$ è infinitesimo di ordine $\frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$

Al denominatore

$sin\, x$ è infinitesimo del primo ordine

$7x^4$ è infinitesimo del quarto ordine

Possiamo pertanto scrivere

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)^4+x^5+\sqrt{x}sin^3x}{sin\,x+7x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}sin^3x}{sin\,x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x}sin^3x=0$$