INTEGRAZIONE INDEFINITA DI ALCUNE CLASSI DI FUNZIONI

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Se la frazione è impropria, cioè il grado del numeratore è maggiore o uguale a quello del denominatore, allora si può effettuare la divisione secondo le regole dell'algebra, si ha:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

e quindi:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

per cui avremo:

$$\int \frac{A(x)}{B(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{B(x)} dx$$

Si presentano i seguenti casi

1) - Radici reali e distinte

Consideriamo la frazione propria

$$\frac{A(x)}{B(x)}$$

e supponiamo che l'equazione di grado n

$$B(x) = 0$$

abbia tutte le n radici reali e distinte, siano esse

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

E' possibile determinare n costanti $K_1, K_2, \dots\dots, K_n$ in modo che si abbia

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{K_1}{x - x_1} + \frac{K_2}{x - x_2} + \dots\dots + \frac{K_n}{x - x_n}$$

Per cui l'integrale

$\displaystyle\int \frac{A(x)}{B(x)}$ risulta dato dalla somma di n integrali facilmente calcolabili.

2) Radici reali e multiple

Supponiamo che l'equazione

$$B(x) = 0$$

non possieda tutte le radici distinte, anche se reali. Supponiamo che ammetta, per semplicità tre radici distinte x_1, x_2, x_3, la prima di multiplicità r (contata r volte), la seconda s, la terza t dove

r + s + t = n.

In questo caso avremo la scomposizione:

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{A_1}{(x-x_1)}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(x-x_1)^r}+\frac{B_1}{x-x_1}+\frac{B_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{B_s}{(x-x_1)^s}+$$
$$+\frac{C_1}{(x-x_1)}+\frac{C_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{C_t}{(x-x_1)^t}$$

In questo caso l'integrale della funzione

$\int \frac{A(x)}{B(x)}$ si scompone nella somma di più integrali .

3) - Radici complesse

Calcoliamo i seguenti integrali

$$I_1=\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

dove si suppone che l'equazione

$$ax^2+bx+c=0$$

abbia radici complesse coniugate. $m\pm in$ Possiamo scrivere:

$$ax^2+bx+c=a(x-m-in)(x-m+in)=a\left[(x-m)^2+n^2\right]=an^2\left[\left(\frac{x-m}{n}\right)^2+1\right]$$

si ottiene quindi:

$$I_1=\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx=\frac{1}{an^2}\int\frac{1}{\left(\frac{x-m}{n}\right)^2+1}dx=\frac{1}{an^2}\cdot n\int\frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{x-m}{n}\right)^2+1}dx=$$
$$=\frac{1}{an}arct\frac{x-m}{n}+c$$

Nel caso in cui il numeratore sia un polinomio di primo grado e non sia la derivata del denominatore, esso si può trasformare nella somma di una costante opportuna e della derivata del denominatore.

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI IRRAZIONALI.

Consideriamo i seguenti casi:

1) $\int f\left(x,\sqrt[p]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r},\sqrt[q]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^s},\ldots\right)dx$

Questo integrale si riduce a un integrale di funzione razionale mediante la seguente posizione:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$ dove n è il m.c.m.(p,q)

Casi particolari dell'integrale considerato sono gli integrali del tipo

$$\int f\left(x, \sqrt[p]{(ax+b)^r}, \sqrt[q]{(ax+b)^s}, \dots\right) dx$$

$$\int f\left(x, \sqrt[p]{x^r}, \sqrt[q]{x^s}, \dots\right) dx$$

2) .- $\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ (1)

Distinguiamo due casi a > 0 ed a < 0.

1° caso - Sia a > 0. L'integrale (1) diviene un integrale di funzione razionale effettuando la sostituzione:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\cdot x + t$$

dove si può prendere indifferentemente il segno + o - .

2° Caso - Sia a < 0 Indichiamo con x_1 e x_2 le radici dell'equazione

$$ax^2+bx+c=0$$

Se queste radici sono complesse coniugate allora il polinomio ax^2+bx+c risulta negativo per qualunque valore della x e quindi la funzione che si deve integrare non risulta reale , lo stesso accade se $x_1 = x_2$.

Escludendo questi casi, supponendo perciò che le radici siano reali, supponiamo che $x_1 < x_2$. In questo caso il trinomio ax^2+bx+c risulta positivo per $x_1 < x < x_2$ e l'integrale

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

si trasforma in un integrale di funzione razionale ponendo:

$$\sqrt{\frac{x-x_1}{x_2-x}} = t$$

cioè:

$$x - x_1 = t^2(x_2 - x)$$

per cui si ha :

$$x = \frac{x_2 t^2 + x_1}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2(x_2-x_1)t}{(1+t^2)^2} dt$$

Sostituendo l'integrale si trasforma in un integrale di funzione razionale.

Integrazione dei differenziali binomi

Si chiamano differenziali binomi i differenziali della forma

$$x^n \left(a + bx^n\right)^p dx$$

dove a e b sono costanti ed m, n, p sono numeri razionali.
L'integrale

$$\int x^n \left(a + bx^n\right)^p dx$$

diviena razionale nei seguenti tre casi:

1°) Se p è un numero intero, si pone:

$$x = t^k$$

dove k è il minimo comune multiplo dei denominatori di m ed n.

2°) Se $\dfrac{m+1}{n}$ poniamo

$$a + bx^n = t^h$$

dove h è il denominatore di p

3°) Se $\dfrac{m+1}{n} + p$ è un numero intero, poniamo:

$$\frac{a + bx^n}{x^n} = t^h$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI TRASCENDENTI

Consideriamo i casi

a) Se f(x) è una è una funzione razionale delle variabili x e y consideriamo i seguenti integrali:

$$\int f\left(sinx, \cos^2 x\right)\cos x dx, \int f\left(sin^2 x, \cos x\right)sinxdx$$

che si possono trasformare nella forma

$$\int f\left(sinx, 1 - sin^2 x\right)\cos x dx, \int f\left(1 - \cos^2 x, \cos x\right)sinxdx$$

si traformano eseguendo la sostituzione $\sin x = t$ nel primo integrale e la sostituzione $\cos x = t$ nel secondo integrale.

b) Sia dato l'integrale

$$\int f(sin^2 x, \cos^2 x, sinx \cdot \cos x)dx$$

Si trasorma in un integrale di funzione razionale con la sostituzione:

$$\operatorname{tg} x = t$$

che implica $x = \operatorname{arctg} t$ per cui $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$ Inoltre si ha:

$$sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad sinx \cdot \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

Inoltre l'integrale

$$\int f(tgx)dx$$

è un caso particolare del precedente se si pone

$$tg\, x = \frac{sin^2 x}{sin\, x \cos x}$$

c) Se l'integrale è della forma

$$\int f(sinx, \cos x)dx$$

dove f è una funzione razionale di sin x e cos x si pone:

$$tg\frac{x}{2} = t$$

si ha

$$x = 2\operatorname{arctg} t \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

essendo

$$sin\, x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \qquad sin\, x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

d) Integrali del tipo

$$I = \int sin^m x \cos^n x dx \qquad (1)$$

dove m ed n sono numeri interi.

a) Se m = 2k +1 è un numero positivo dispari, si pone:

$$I = -\int sin^{2k} x \cos^n x(-sinx)dx = -\int (1-\cos^2)^k \cos^n x(-sinx)dx$$

Si procede in modo analogo se n è un numero positivo dispari

b) Se m ed n sono numeri positivi pari, l'espressione (1) si trasforma con l'ausilio delle formule:

$$sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad sinx \cdot \cos x = \frac{1}{2} sin 2x$$

c) Se $m = -\mu$ ed $n = -\nu$ sono numeri negativi interi di stessa parità allora

$$I = \int \frac{dx}{sin^{\mu} x \cos^{\nu} x} = \int \cos ec^{n} x \sec^{\nu-2} x \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \left(1+\frac{1}{tg^2 x}\right)^{\frac{\eta}{2}} (1+tg^2 x)^{\frac{\nu-2}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{(1+tg^2 x)^{\frac{\mu+\nu}{2}-1}}{tg^{\mu} x} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

Si può se necessario porre tg x = t per cui $\frac{1}{\cos^2 x} dx = dt$

In particolare, a questo caso si riducono gli integrali:

$$\int \frac{dx}{sin^{\mu} x} = \frac{1}{2^{\mu-1}} \int \frac{\frac{1}{2}}{sin^{\mu} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{\nu} x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{sin^{\nu}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

d) Gli integrali del tipo

$\int tg^{m} x dx$ oppure $\int \mathrm{tg}^{\mathrm{m}} x dx$

dove m è un numero intero positivosi calcolano con l'ausilio della formula

$tg^2 x = \sec^2 - 1$ 0 rispettivamente $ctg^2 = \cos ec^2 - 1$

Integrali del tipo

$$\int sinmx \cos nx dx \int sinmx sinnx dx \int \cos mx \cos nx dx$$

In questi casi si usano le formule:

1) $sin\, mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[sin(m+n)x + sin(m-n)x\right]$

2) $sin\, mx\, sin\, nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$

3) $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]$

Integrali del tipo

$$\int f\left(e^{x}\right)dx$$

Con la sostituzione

$$e^{x}=t \qquad x=\ln t \qquad dx=\frac{1}{t}dt$$

si ha

$$\int f\left(e^{x}\right)dx=\int \frac{f(t)}{t}dt$$