

## INTEGRAZIONE INDEFINITA DI ALCUNE CLASSI DI FUNZIONI

### Integrazione delle funzioni razionali fratte

Se la frazione è impropria, cioè il grado del numeratore è maggiore o uguale a quello del denominatore, allora si può effettuare la divisione secondo le regole dell'algebra, si ha:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

e quindi:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

per cui avremo:

$$\int \frac{A(x)}{B(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{B(x)} dx$$

Si presentano i seguenti casi

#### 1) - Radici reali e distinte

Consideriamo la frazione propria

$$\frac{A(x)}{B(x)}$$

e supponiamo che l'equazione di grado n

$$B(x) = 0$$

abbia tutte le n radici reali e distinte, siano esse

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

E' possibile determinare n costanti  $K_1, K_2, \dots, K_n$  in modo che si abbia

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{K_1}{x-x_1} + \frac{K_2}{x-x_2} + \dots + \frac{K_n}{x-x_n}$$

Per cui l'integrale

$$\int \frac{A(x)}{B(x)} dx \text{ risulta dato dalla somma di n integrali facilmente calcolabili.}$$

#### 2) Radici reali e multiple

Supponiamo che l'equazione

$$B(x) = 0$$

non possieda tutte le radici distinte, anche se reali. Supponiamo che ammetta, per semplicità tre radici distinte  $x_1, x_2, x_3$ , la prima di molteplicità r (contata r volte), la seconda s, la terza t dove

$$r + s + t = n.$$

In questo caso avremo la scomposizione:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r} + \frac{B_1}{x-x_1} + \frac{B_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{B_s}{(x-x_1)^s} + \frac{C_1}{(x-x_1)} + \frac{C_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{C_t}{(x-x_1)^t}$$

In questo caso l'integrale della funzione

$\int \frac{A(x)}{B(x)}$  si scompone nella somma di più integrali .

### 3) - Radici complesse

Calcoliamo i seguenti integrali

$$I_1 = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$$

dove si suppone che l'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

abbia radici complesse coniugate.  $m \pm in$  Possiamo scrivere:

$$ax^2 + bx + c = a(x - m - in)(x - m + in) = a[(x - m)^2 + n^2] = an^2 \left[ \left( \frac{x - m}{n} \right)^2 + 1 \right]$$

si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{an^2} \int \frac{1}{\left( \frac{x - m}{n} \right)^2 + 1} dx = \frac{1}{an^2} \cdot n \int \frac{\frac{1}{n}}{\left( \frac{x - m}{n} \right)^2 + 1} dx = \\ &= \frac{1}{an} \arctan \frac{x - m}{n} + c \end{aligned}$$

Nel caso in cui il numeratore sia un polinomio di primo grado e non sia la derivata del denominatore, esso si può trasformare nella somma di una costante opportuna e della derivata del denominatore.

## INTEGRAZIONE DI FUNZIONI IRRAZIONALI.

Consideriamo i seguenti casi:

$$1) \int f \left( x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots \right) dx$$

Questo integrale si riduce a un integrale di funzione razionale mediante la seguente posizione:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n \text{ dove } n \text{ è il m.c.m.}(p,q)$$

Casi particolari dell'integrale considerato sono gli integrali del tipo

$$\int f\left(x, \sqrt[p]{(ax+b)^r}, \sqrt[q]{(ax+b)^s}, \dots\right) dx$$

$$\int f\left(x, \sqrt[p]{x^r}, \sqrt[q]{x^s}, \dots\right) dx$$

$$2) \text{.- } \int f\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx \quad (1)$$

Distinguiamo due casi  $a > 0$  ed  $a < 0$ .

**1° caso** - Sia  $a > 0$ . L'integrale (1) diviene un integrale di funzione razionale effettuando la sostituzione:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a} \cdot x + t$$

dove si può prendere indifferentemente il segno + o - .

**2° Caso** - Sia  $a < 0$  Indichiamo con  $x_1$  e  $x_2$  le radici dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Se queste radici sono complesse coniugate allora il polinomio  $ax^2 + bx + c$  risulta negativo per qualunque valore della  $x$  e quindi la funzione che si deve integrare non risulta reale, lo stesso accade se  $x_1 = x_2$ .

Escludendo questi casi, supponendo perciò che le radici siano reali, supponiamo che  $x_1 < x_2$ . In questo caso il trinomio  $ax^2 + bx + c$  risulta positivo per  $x_1 < x < x_2$  e l'integrale

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

si trasforma in un integrale di funzione razionale ponendo:

$$\sqrt{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}} = t$$

cioè:

$$x - x_1 = t^2(x_2 - x_1)$$

per cui si ha :

$$x = \frac{x_2 t^2 + x_1}{1 + t^2} \quad dx = \frac{2(x_2 - x_1)t}{(1 + t^2)^2} dt$$

Sostituendo l'integrale si trasforma in un integrale di funzione razionale.

## Integrazione dei differenziali binomi

Si chiamano differenziali binomi i differenziali della forma

$$x^n (a + bx^n)^p dx$$

dove a e b sono costanti ed m, n, p sono numeri razionali.

L'integrale

$$\int x^n (a + bx^n)^p dx$$

diviene razionale nei seguenti tre casi:

1°) Se p è un numero intero, si pone:

$$x = t^k$$

dove k è il minimo comune multiplo dei denominatori di m ed n.

2°) Se  $\frac{m+1}{n}$  poniamo

$$a + bx^n = t^h$$

dove h è il denominatore di p

3°) Se  $\frac{m+1}{n} + p$  è un numero intero, poniamo:

$$\frac{a + bx^n}{x^n} = t^h$$

## INTEGRAZIONE DI FUNZIONI TRASCENDENTI

Consideriamo i casi

**a) Se f(x) è una funzione razionale delle variabili x e y consideriamo i seguenti integrali:**

$$\int f(\sin x, \cos^2 x) \cos x dx, \int f(\sin^2 x, \cos x) \sin x dx$$

che si possono trasformare nella forma

$$\int f(\sin x, 1 - \sin^2 x) \cos x dx, \int f(1 - \cos^2 x, \cos x) \sin x dx$$

si trasformano eseguendo la sostituzione  $\sin x = t$  nel primo integrale e la sostituzione  $\cos x = t$  nel secondo integrale.

**b) Sia dato l'integrale**

$$\int f(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cdot \cos x) dx$$

Si trasforma in un integrale di funzione razionale con la sostituzione:

$$\operatorname{tg} x = t$$

che implica  $x = \operatorname{arctg} t$  per cui  $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$  Inoltre si ha:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

Inoltre l'integrale

$$\int f(\operatorname{tg} x) dx$$

è un caso particolare del precedente se si pone

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x}$$

**c) Se l'integrale è della forma**

$$\int f(\sin x, \cos x) dx$$

dove  $f$  è una funzione razionale di  $\sin x$  e  $\cos x$  si pone:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

si ha

$$x = 2 \operatorname{arctg} t \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

essendo

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

**d) Integrali del tipo**

$$I = \int \sin^m x \cos^n x dx \quad (1)$$

dove  $m$  ed  $n$  sono numeri interi.

a) Se  $m = 2k + 1$  è un numero positivo dispari, si pone:

$$I = - \int \sin^{2k} x \cos^n x (-\sin x) dx = - \int (1 - \cos^2)^k \cos^n x (-\sin x) dx$$

Si procede in modo analogo se  $n$  è un numero positivo dispari

b) Se  $m$  ed  $n$  sono numeri positivi pari, l'espressione ( 1 ) si trasforma con l'ausilio delle formule:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

c) Se  $m = -\mu$  ed  $n = -\nu$  sono numeri negativi interi di stessa parità allora

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sin^\mu x \cos^\nu x} = \int \operatorname{cosec}^n x \sec^{\nu-2} x \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right)^{\frac{n}{2}} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{\nu-2}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{\mu+\nu-1}{2}}}{\operatorname{tg}^\mu x} \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{aligned}$$

Si può se necessario porre  $\operatorname{tg} x = t$  per cui  $\frac{1}{\cos^2 x} dx = dt$

In particolare, a questo caso si riducono gli integrali:

$$\int \frac{dx}{\sin^\mu x} = \frac{1}{2^{\mu-1}} \int \frac{\frac{1}{2}}{\sin^\mu \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos^\nu x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^\nu \left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

#### d) Gli integrali del tipo

$$\int \operatorname{tg}^m x dx \quad \text{oppure} \quad \int \operatorname{ctg}^m x dx$$

dove  $m$  è un numero intero positivi calcolano con l'ausilio della formula  
 $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 - 1$  0 rispettivamente  $\operatorname{ctg}^2 = \operatorname{cosec}^2 - 1$

#### Integrali del tipo

$$\int \sin m x \cos n x dx \quad \int \sin m x \sin n x dx \quad \int \cos m x \cos n x dx$$

In questi casi si usano le formule:

- 1)  $\sin m x \cos n x = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$
- 2)  $\sin m x \sin n x = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$
- 3)  $\cos m x \cos n x = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$

Integrali del tipo

$$\int f(e^x)dx$$

Con la sostituzione

$$e^x = t \quad x = \ln t \quad dx = \frac{1}{t} dt$$

si ha

$$\int f(e^x)dx = \int \frac{f(t)}{t} dt$$