Appunti elaborati dalle lezioni del Prof. Boieri

PROPRIETA' DELLE FUNZIONI

La funzione composta

Consideriamo due funzioni f e g di variabile reale e indichiamo :

A = dom f
B = im f
C = dom g
D = im g

Vogliamo studiare la possibilità di costruire la funzione composta di f e g.
Possiamo porre il problema nei seguenti termini : Supponiamo di considerare un elemento $x \in d$ om f , vogliamo vedere se è possibile calcolare la funzione $f(x)$

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$

e poi calcolare g dal valore così ottenuto ottenendo un nuovo numero reale. Ciò può essere possibile oppure no. Nel caso in cui è possibile, risulta definita una nuova funzione che opera da A a D che è la composizione di f e di g ; Questa nuova funzione viene indicata con $g \circ f$ (g composta con f)
Assegnato x nel dominio di f si ha quindi per definizione

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Si applica la x ad f e sul risultato ottenuto si applica g.
Indichiamo con x l'elemento di A, $f(x)$ è l'immagine di x che chiamiamo y ; ad y applichiamo la funzione g e indichiamo con $z = g(y)$ l'immagine di y. Otteniamo :

$$x \xrightarrow{f} y = f(x) \xrightarrow{g} z = g(y)$$

Esempio 1 - *Determinare la funzione composta* $g \circ f$ di

$$f(x) = x + 1 \qquad \text{e}$$
$$g(y) = y^2$$

Consideriamo alcuni punti nel dominio di f ad esempio

$$-2, -1, 0, 1, 2$$

per ognuno di essi calcoliamo $f(x)$ ottenendo così i numeri $-1, 0, 1, 2, 3$.
Calcoliamo infine il valore di g in questi punti. Riassumiamo i passaggi in un unico quadro tale che ad x corrisponda $(g \circ f)(x)$.
Avremo la tabella

x	$f(x)$
-2	1
-1	0
0	1

$f(x)$	$g(f(x))$
-1	1
0	0
1	1

x	$(g \circ f)(x)$
-2	1
-1	0
0	4

1	2	2	4	1	4
2	3	3	9	2	9

Il procedimento visto si può applicare ad ogni punto x del dominio di f.
Calcoliamo prima $f(x)$; otteniamo $y = x+1$, a questo numero applichiamo la funzione g. Si ha :

$$z = g(y) = y^2 = (x+1)^2$$

Abbiamo quindi una funzione che ad x associa $(x+1)^2$

$$\underbrace{x \xrightarrow{f} (x+1) \xrightarrow{g} (x+1)^2}_{g \circ f}$$

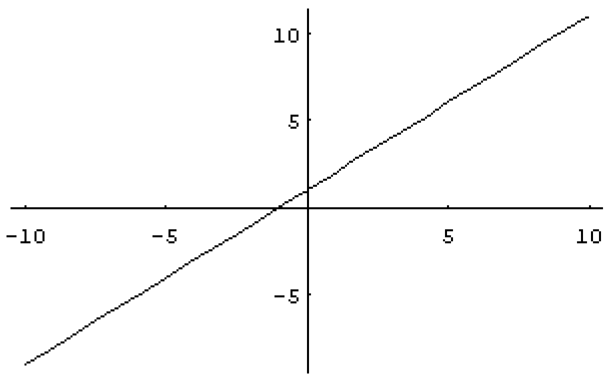
L'effetto globale è quello di passare da

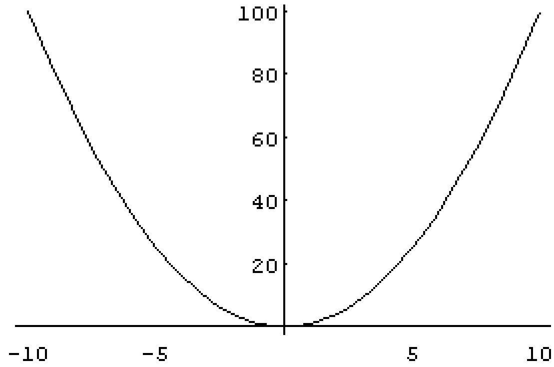
$$x \longrightarrow (x+1)^2$$

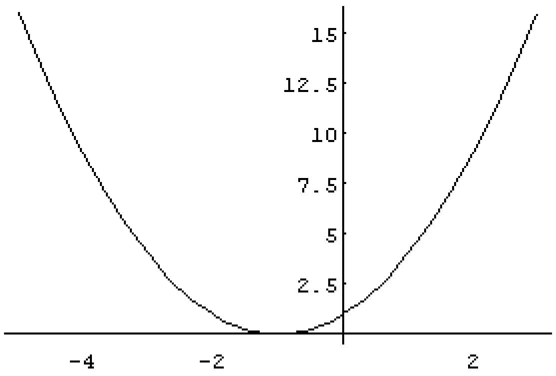
La funzione composta sarà

$$(g \circ f)(x) = (x+1)^2$$

I grafici di f, di g e di $g \circ f$ sono







Studiamo il dominio e l'immagine delle tre funzioni f, g e $g \circ f$.

Per la funzione f si ha

$A = d\,\text{om}\ f = \mathbf{R}$

$B = imf = \mathbf{R}$

Per la funzione g si ha

$C = d\,\text{om}\, g = \mathbf{R}$

$D = im\ f = [0,+\infty[$

Vediamo il dominio della funzione composta e la sua immagine.

Si parte da un x reale generico, tramite la f si arriva ad un generico valore reale, a partire da questo valore calcoliamo la g. Il risultato è un numero reale al quadrato, cioè $[0,+\infty[$.

Per cui avremo :

dom ($g \circ f$) = $\mathbf{R}$ che coincide con A, mentre

im ($g \circ f$) = $[0,+\infty[$ che coincide con D.

L'operazione di calcolo di f e poi di g è quindi eseguibile senza limitazioni.

Esempio 2 - *Determinare la funzione composta* $g \circ f$ *di*

$f(x) = x^2$ e

$g(y) = y + 1$

Avremo

$x \xrightarrow{f} y = x^2 \xrightarrow{g} z = x^2 + 1 \quad (z = g(y) = y + 1 = x^2 + 1)$

per cui $(g \circ f)(x)$ si ottiene partendo da x, calcolando x^2 e, sostituendo al posto di y x^2 otteniamo

$(g \circ f)(x) = x^2 + 1$

Si ha

A = dom f = **R**

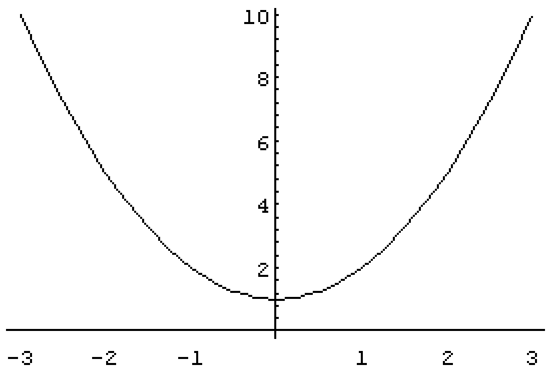
B = im f = $[0,+\infty[$

C = dom g = **R**

D = im g = **R**

La f ha come dominio **R** e come immagine $[0,+\infty[$, mentre la g ha come dominio **R** e come immagine **R.**

Partendo da un x reale, applichiamo f, calcolando il quadrato otteniamo un x non negativo ; ci chiediamo se è possibile applicare la nuova operazione : ciò è possibile perché $[0,+\infty[\subset \mathbf{R}$. Si ha quindi



dom $(g \circ f)$ = **R** **e** im$(g \circ f) = [1,+\infty[$

che non coincide con D.

Notiamo che nell'esempio 2)sono composte le stesse funzioni dell'esempio 1) ma in ordine inverso : *Si ottengono come risultati due funzioni diverse.*

Vale quindi la seguente

Proposizione 1 - *La composizione di funzioni non è operazione commutativa. Il risultato dipende, in generale, dall'ordine in cui sono applicate le funzioni.*

Esempio 3 - *Studiare la composizione delle funzioni*

$f(x) = x + 5$

$g(y) = \frac{1}{y}$

Si ha

A = dom f = **R**

B = im f = **R**
C = dom g = $\mathbf{R}\setminus\{\mathbf{0}\}$
D = im g = $\mathbf{R}\setminus\{\mathbf{0}\}$
Inoltre

$$x \xrightarrow{f} y = x+5 \xrightarrow{g} z = \frac{1}{x+5}$$

Se, dopo aver calcolato f, vogliamo applicare g, ci troviamo di fronte ad una difficoltà, per $x = -5$ non si può applicare la g perché $x = -5$ ha come immagine, tramite f il punto $y = 0$, nel quale la funzione g non è definita. Quindi è impossibile calcolare $g\left(f(-5)\right)$, mentre in tutti gli altri punti non ci sono problemi.
La funzione composta

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x+5}$$

risulta definita in $\mathbf{R}\setminus\{-5\}$ ed a valori in $\mathbf{R}\setminus\{\mathbf{0}\}$

Esempio 4 - *Studiare la funzione composta di*

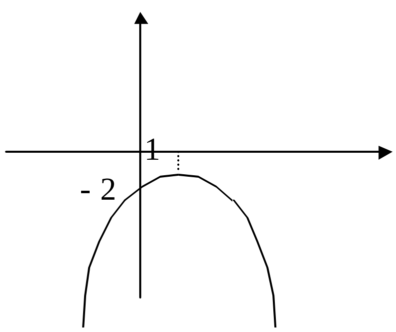
$f(x) = -x^2 + 2x - 3$ e di $g(y) = \sqrt{y}$.

Utilizzando il completamento dei quadrati, possiamo scrivere la funzione f nella forma :

$f(x) = -x^2 + 2x - 3 = -(x^2 - 2x + 1 - 1) - 3 = -(x^2 - 2x + 1) - 2$ cioè

$f(x) = -(x-1)^2 - 2$

Il grafico è una parabola con la concavità rivolta verso il basso, con vertice nel punto $(1,-2)$ e asse la retta $x = 1$.
Il dominio di f è **R** e l'immagine è $]-\infty,-2]$.
Risulta quindi :
A = dom f = **R**
B = im f = $]-\infty,-2]$
C = dom g = $[0,+\infty[$
D = im g = $[0,+\infty[$



Pertanto non si può definire la funzione composta in nessun punto di A: la f fornisce solo valori strettamente negativi, di cui non si può calcolare la radice quadrata.

$x \xrightarrow{f} y = -(x-1)^2 - 2 \xrightarrow{g} z = \sqrt{-(x-1)^2 - 2}$

Gli esempi trattati pongono alcuni problemi :

i)Quali condizioni devono soddisfare f e g affinché sia possibile definire la funzione composta

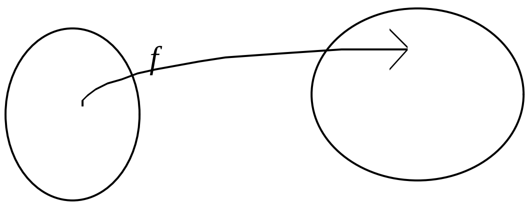
ii) Se è definita la funzione composta, quali sono le relazioni tra il dominio e l'immagine di f e di g e il dominio dell'immagine di $g \circ f$.

Dagli esempi visti, la condizione che ci permette di calcolare la funzione composta in un punto x_0 ($x_0 \in \mathrm{dom} f$) è che partendo da un x_0 si arriva ad un valore $f(x_0)$ che sta nell'immagine di f , che deve appartenere al dominio di g.

La condizione è quella che l'insieme

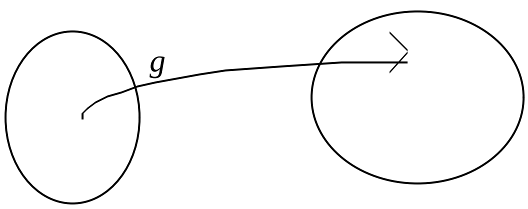
$S = \mathrm{im} f \cap \mathrm{dom} g \neq \varnothing$.

Supponiamo di avere assegnata la funzione f

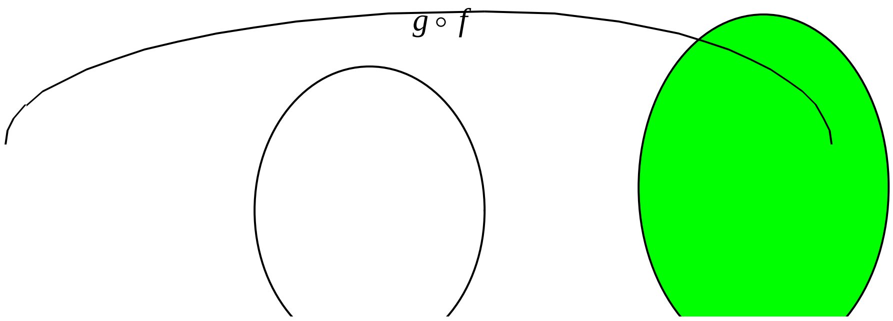


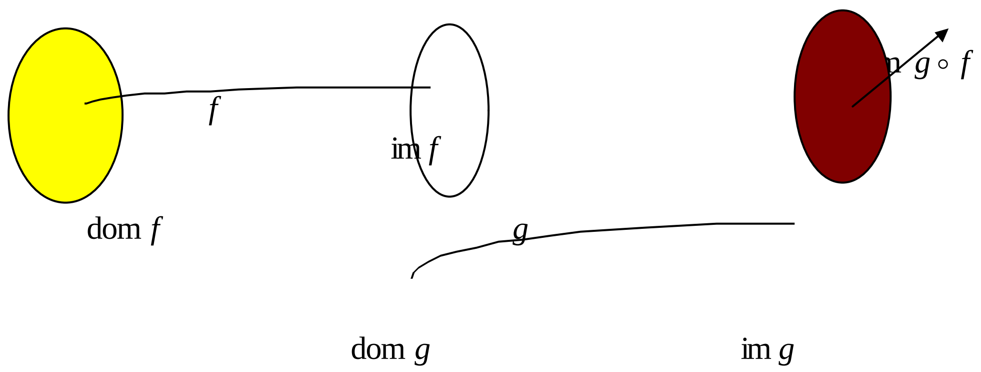
dom f im$f$

e la funzione g



dom g img



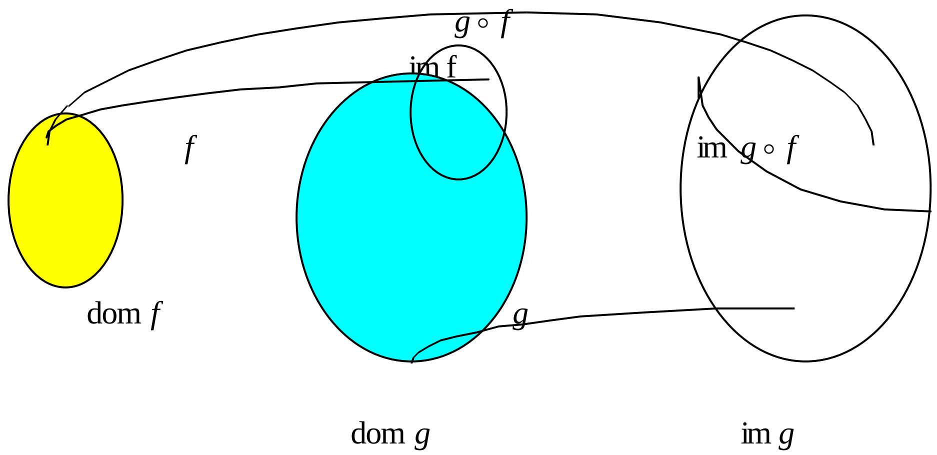


La f ha come immagine un insieme che è incluso nel dominio di g, cioè su tutti i valori ottenuti come im f, possiamo calcolare la funzione g.

$\mathrm{im}f \cap \mathrm{dom}g \neq \varnothing$

Applicando la g all'immagine di f otteniamo un sottoinsieme di im g.
L'operazione di composizione, in questo caso è sempre possibile e il risultato dell'operazione $g \circ f$ è un sottoinsieme di im g.

Nel caso seguente (es.3) si ha



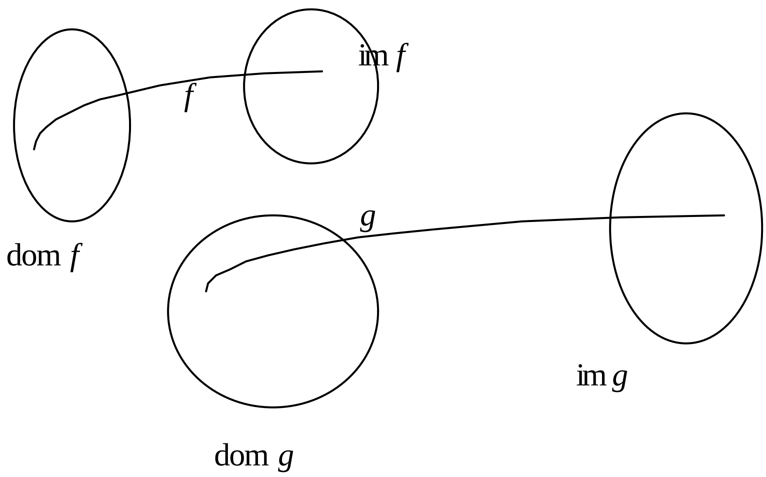
Partendo dal dom f vediamo che

$\mathrm{im}f \cap \mathrm{dom}g \neq \varnothing$

ma non coincide con B = im f, vi sono dei punti da cui non si può proseguire e dei punti da cui si può proseguire, si può applicare la g sui punti che sono contemporaneamente nell'immagine di f e nel dominio di g.
Otterremo quindi

im $(g \circ f)$

per cui è possibile l'operazione di composizione.
Nel caso seguente



Si ha $\mathrm{im} f \bigcap \mathrm{dom} g = \varnothing$
Gli insiemi im f e dom g sono disgiunti, non esiste nessun punto x nel dominio di f su cui possiamo calcolare la f, arrivare su un punto su cui applicare la g e arrivare su un punto di im g.

Quindi, il dominio della funzione composta è un sottoinsieme di A (dom f), esso coincide con l'insieme dei punti di A su cui f assume valori contenuti in

$$S = \mathrm{im} f \bigcap \mathrm{dom} g$$

L'immagine della funzione composta è invece il sottoinsieme D = im g costituito dai punti che sono immagine di un elemento di S tramite g.
Possiamo concludere con la seguente :

Proposizione 2 - La funzione composta $g \circ f$ è definita se e solo se

$$S = \mathrm{im} f \bigcap \mathrm{dom} g \neq \varnothing$$

Il suo dominio è il sottoinsieme di A = im f costituito da tutti i punti in cui f assume valori contenuti in $S = \mathrm{im} f \bigcap \mathrm{dom} g$; la sua immagine è il sottoinsieme degli elementi di D = im g ottenuti tramite g a partire da S.
Osservazione :
Esaminiamo gli esempi visti alla luce di quanto detto.
Nell'esempio 1 :

$$f(x) = x + 1 \qquad f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$g(y) = y^2 \qquad g : \mathbf{R} \longrightarrow [0, +\infty[$$

risulta $\mathrm{im} f \bigcap \mathrm{dom} g = \mathrm{im} f$, per cui il dominio della funzione composta coincide con $\mathrm{dom} f$. Essendo

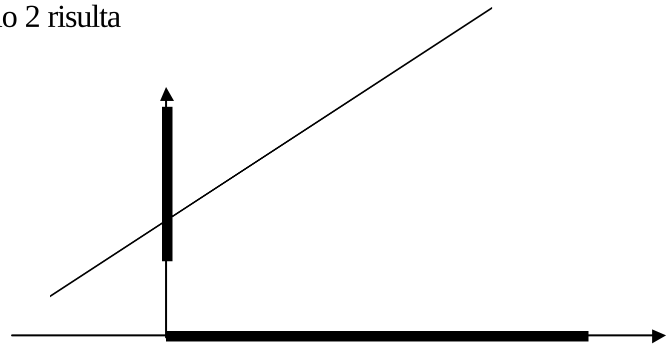
$$\mathrm{im} f = \mathrm{dom} g$$

l'immagine della funzione composta coincide con $\mathrm{im} g = [0, +\infty[$. Si ha

$\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathbf{R}$

$\mathrm{im}(g \circ f) = [0,+\infty[$

Nell'esempio 2 risulta



Adolfo Scimone anno scolastico 1997/98 pag. 8

$\mathrm{im}f \cap \mathrm{dom}g = \mathrm{im}f = [0,+\infty[$

per cui

$\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathbf{R} = \mathrm{dom}f$

In questo caso $S = \mathrm{im}f = [0,+\infty[$ è un sottoinsieme proprio di $\mathrm{dom}g = \mathbf{R}$.

L'immagine della funzione composta è l'insieme in cui viene trasformato S mediante la g. Si ha

$\mathrm{im}(g \circ f) = [1,+\infty[$

Nell'esempio 3 :

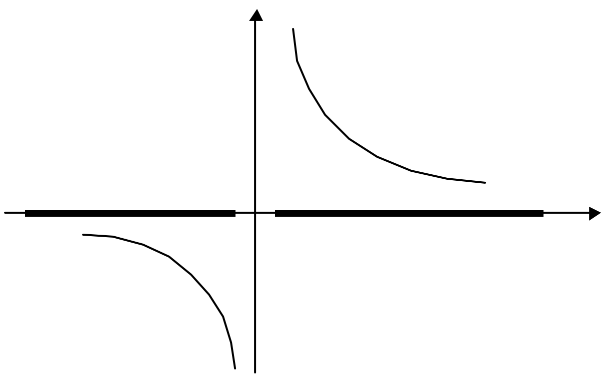
$f(x) = x + 5 \qquad f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$

$g(y) = \dfrac{1}{y} \qquad g: \mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$S = \mathrm{im}f \cap \mathrm{dom}g \neq \varnothing$

è un sottoinsieme proprio di B = $\mathrm{im}f$. Il dominio della funzione $g \circ f$ è formato da quei punti che hanno come immagine S. Dobbiamo escludere da A = $= \mathrm{dom}f$ i punti tali che $f(x) = 0$, cioè $x_0 = 5$.

Poiché S coincide con C = $= \mathrm{dom}g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, l'immagine di $g \circ f$ coincide con $\mathrm{im}g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.



Nell'esempio 4 $S = \varnothing$ e quindi non è possibile definire $g \circ f$.