

Funzioni periodiche

Una funzione

$$f : A \longrightarrow \mathbf{R}$$

si dice **periodica di periodo T** se, ponendo $x+T$ al posto di x si ottiene ancora la stessa funzione, cioè:

$$\forall x \in A, \quad x+T \in A$$

$$f(x+T) = f(x) \quad (1)$$

Proprietà – Se la funzione $f(x)$ è periodica di periodo, anche ogni multiplo di T , cioè kT con $k \in \mathbf{Z}$, è periodo di $f(x)$, cioè

$$f(x+kT) = f(x) \quad \blacksquare$$

Infatti dalla definizione di funzione periodica si ha

$$f(x+2T) = f[(x+T)+T] = f(x+T) = f(x)$$

$$f(x+3T) = f[(x+2T)+T] = f(x+2T) = f(x)$$

Si ha anche

$$f(x-T) = f[(x-T)+T] = f(x)$$

$$f(x-2T) = f[(x-2T)+T] = f(x-T) = f(x)$$

Pertanto possiamo dire che

$$f(x+kT) = f(x)$$

Generalmente si sceglie come periodo il più piccolo numero positivo per cui vale la (1) e si chiama **periodo principale o periodo minimo**. ■

Esempi:

■ Determinare il periodo della funzione

$$y = \sin 3x$$

Si ha:

$$\sin 3(x+T) = \sin 3x \quad \text{quindi}$$

$$3x+3T = 3x+2k\pi$$

$$T = \frac{2}{3}k\pi$$

Per $k=1$ si ha

$$T = \frac{2}{3}\pi \quad \blacksquare$$

■ Determinare il periodo della funzione

$$y = \sin \frac{x}{2}$$

$$\sin \frac{x+T}{2} = \sin \frac{x}{2}$$

$$\frac{x+T}{2} = \frac{x}{2} + 2k\pi$$

$$\frac{x}{2} + \frac{T}{2} = \frac{x}{2} + 2k\mathbf{p}$$

$$T = 4k\mathbf{p}$$

Per $k = 1$ si ha

$$T = 4\mathbf{p} \blacksquare$$

■ Determinare il periodo della funzione

$$y = \operatorname{tg} 2x$$

si ha $\operatorname{tg} 2(x+T) = \operatorname{tg} 2x$

$$2x + 2T = 2x + k\mathbf{p}$$

quindi

$$2T = k\mathbf{p}$$

$$T = k \frac{\mathbf{p}}{2}$$

per $k = 1$ si ha

$$T = \frac{\mathbf{p}}{2} \blacksquare$$

Calcolo del periodo della funzione

$$f(x) = A \sin(\mathbf{w}x + \mathbf{j})$$

Se T è il periodo minimo di $f(x)$ si ha

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{e quindi}$$

$$A \sin(\mathbf{w}(x+T) + \mathbf{j}) = A \sin(\mathbf{w}x + \mathbf{j})$$

dovrà essere quindi

$$\mathbf{w}x + \mathbf{w}T + \mathbf{j} = \mathbf{w}x + \mathbf{j} + 2\mathbf{p}$$

pertanto si ha

$$T = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{w}} \blacksquare$$

Allo stesso modo si procede per la funzione

$$f(x) = A \cos(\mathbf{w}x + \mathbf{j})$$

Calcolo del periodo della funzione

$$f(x) = A \operatorname{tg}(\mathbf{w}x + \mathbf{j})$$

Se T è il periodo minimo di $f(x)$ si ha

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{e quindi}$$

$$A \operatorname{tg}(\mathbf{w}(x+T) + \mathbf{j}) = A \operatorname{tg}(\mathbf{w}x + \mathbf{j})$$

dovrà essere quindi

$$\mathbf{w}x + \mathbf{w}T + \mathbf{j} = \mathbf{w}x + \mathbf{j} + \mathbf{p}$$

pertanto si ha

$$T = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{w}} \blacksquare$$