Funzioni periodiche

Una funzione

$$f : A \longrightarrow \mathbf{R}$$

si dice periodica di periodo *T* se, ponendo $x+T$ al posto di *x* si ottiene ancora la stessa funzione, cioè:

$$\forall x \in A, \quad x+T \in A$$

$$f(x+T) = f(x) \qquad \mathbf{(1)}$$

Proprietà – *Se la funzione $f(x)$ è periodica di periodo , anche ogni multiplo di T, cioè kT con $k \in \mathbf{Z}$, è periodo di $f(x)$, cioè*

$$f(x+kT) = f(x) \ \blacksquare$$

Infatti dalla definizione di funzione periodica si ha

$$f(x+2T) = f[(x+T)+T] = f(x+T) = f(x)$$

$$f(x+3T) = f[(x+2T)+T] = f(x+2T) = f(x)$$

Si ha anche

$$f(x-T) = f[(x-T)+T] = f(x)$$

$$f(x-2T) = f[(x-2T)+T] = f(x-T) = f(x)$$

Pertanto possiamo dire che

$$f(x+kT) = f(x)$$

Generalmente si sceglie come periodo il più piccolo numero positivo per cui vale la (1) e si chiama **periodo principale o periodo minimo**. ■

Esempi:

■ Determinare il periodo della funzione

$$y = sin\,3x$$

Si ha:

$$sin\,3(x+T) = sin\,3x \quad \text{quindi}$$

$$3x + 3T = 3x + 2kp$$

$$T = \frac{2}{3}kp$$

Per $k = 1$ si ha

$$T = \frac{2}{3}p \ \blacksquare$$

■ Determinare il periodo della funzione

$$y = sin\frac{x}{2}$$

$$sin\frac{x+T}{2} = sin\frac{x}{2}$$

$$\frac{x+T}{2} = \frac{x}{2} + 2kp$$

$$\frac{x}{2}+\frac{T}{2}=\frac{x}{2}+2kp$$

$$T=4kp$$

Per $k=1$ si ha

$$T=4p$$ ■

■ Determinare il periodo della funzione

$$y=tg\,2x$$

si ha $tg\,2(x+T)=tg\,2x$

$$2x+2T=2x+kp$$

quindi

$$2T=kp$$

$$T=k\frac{p}{2}$$

per $k=1$ si ha

$$T=\frac{p}{2}$$ ■

Calcolo del periodo della funzione

$$f(x)=A\sin(w\,x+j\,)$$

Se T è il periodo minimo di $f(x)$ si ha

$f(x+T)=f(x)$ e quindi

$$A\sin(w\,(x+T)+j\,)=A\sin(w\,x+j\,)$$

dovrà essere quindi

$$w\,x+w\,T+j=w\,x+j\,+2p$$

pertanto si ha

$$T=\frac{2p}{w}$$ ■

Allo stesso modo si procede per la funzione

$$f(x)=A\cos(w\,x+j\,)$$

Calcolo del periodo della funzione

$$f(x)=Atg(w\,x+j\,)$$

Se T è il periodo minimo di $f(x)$ si ha

$f(x+T)=f(x)$ e quindi

$$Atg(w\,(x+T)+j\,)=Atg(w\,x+j\,)$$

dovrà essere quindi

$$w\,x+w\,T+j=w\,x+j\,+p$$

pertanto si ha

$$T=\frac{p}{w}$$ ■