DAL GRAFICO DI F(X) AL GRAFICO DI G(X)

Dal grafico della funzione $f(x)$ al grafico della funzione $g(x)=\sqrt{f(x)}$

La funzione $g(x)=\sqrt{f(x)}$ è definita nel dominio dato da $f(x)\geq 0$, pertanto il grafico della funzione $g(x)$ si troverà al di sopra dell'asse x.

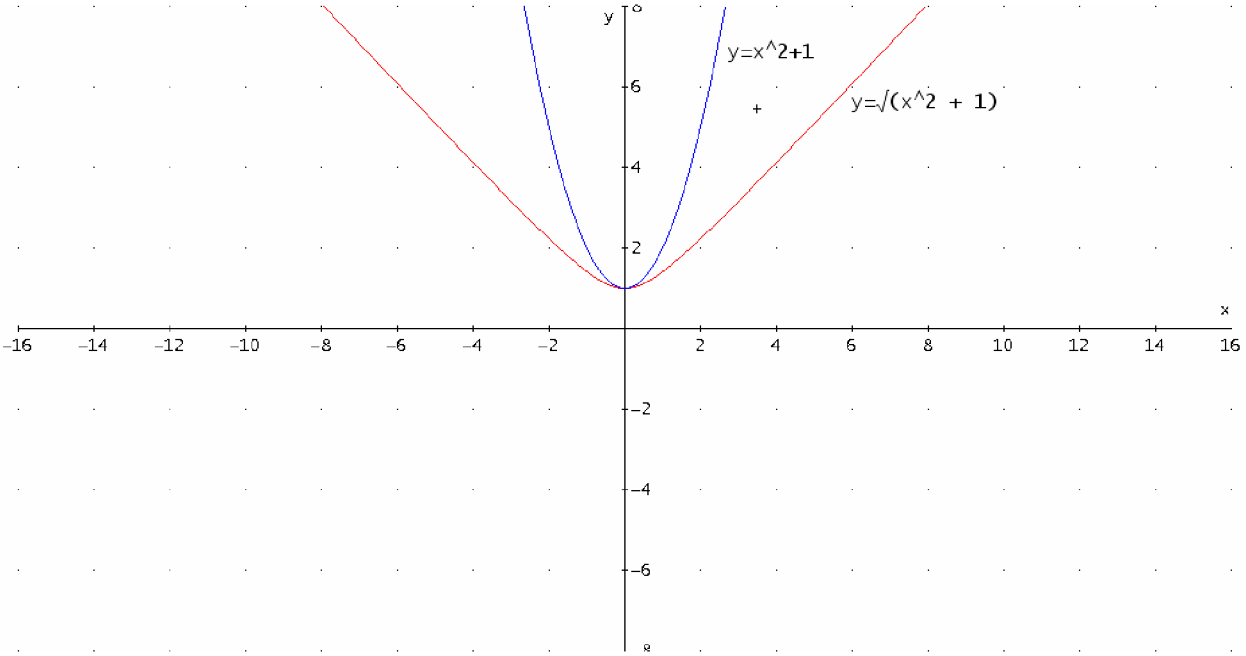
- ß Nei punti in cui si annulla la funzione $f(x)$ si annulla anche la funzione $g(x)=\sqrt{f(x)}$**,** per cui le due curve $f(x)$ e $g(x)=\sqrt{f(x)}$ incontrano l'asse x nei medesimi punti.
- ß Nei punti in cui $y=f(x)=1$ risulta anche $y=\sqrt{f(x)}=1$ per cui i punti aventi ordinata 1 risultano coincidenti per entrambe le curve
- ß Gli asintoti verticali che si deducono da $\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$, essendo $\lim_{x\to c}\sqrt{f(x)}=+\infty$ coincidono, cioè sono asintoti verticali per entrambe le curve.
- ß Se la funzione $f(x)$ ammette limite positivo k per $x\to\pm\infty$, la funzione $g(x)=\sqrt{f(x)}$ ammetterà limite $\sqrt{k}$, per cui se $y=k$ è un asintoto orizzontale per la $f(x)$, $y=\sqrt{k}$ sarà un asintoto orizzontale per la $g(x)=\sqrt{f(x)}$
- ß Se la funzione $f(x)$ è crescente sarà crescente anche la funzione $g(x)=\sqrt{f(x)}$, se la $f(x)$ è decrescente sarà decrescente anche la $g(x)=\sqrt{f(x)}$, se la funzione $f(x)$ ha un massimo o un minimo in $\left(x_0; f(x_0)\right)$, la funzione $g(x)$ avrà un massimo o un minimo in $\left(x_0;\sqrt{f(x_0)}\right)$

Esempio

Data la funzione $y=x^2+1$ dedurre il grafico della finzione $y=\sqrt{x^2+1}$

La funzione $y=x^2+1$ rappresenta una parabola avente vertice $V(0;1)$ con la concavità rivolta verso l'alto, non incontra l'asse x
La funzione $y=\sqrt{x^2+1}$ sarà sempre positiva,
$f(x)=1\Rightarrow\sqrt{f(x)}=1$ per $x=0$
Le due curve passano quindi per il punto $V(0;1)$.
Entrambe le curve non possiedono asintoti
Per $x<0$ la $f(x)$ è decrescente, anche la $\sqrt{f(x)}$ è decrescente
Per $x>0$ la $f(x)$ è crescente, anche la $\sqrt{f(x)}$ è crescente
Per $x=0$ la $f(x)$ ha un minimo, anche la $\sqrt{f(x)}$ ha un minimo
Per qualsiasi punto x_0 la sua ordinata sarà $f(x_0)$ per la $f(x)$ mentre sarà $\sqrt{f(x_0)}$ per la $\sqrt{f(x)}$.

I grafici delle due curve saranno



Dal grafico della funzione $f(x)$ al grafico della funzione $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

Il dominio della funzione $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ coincide con il dominio della $f(x)$ con la condizione $f(x)\neq 0$

Si ha inoltre

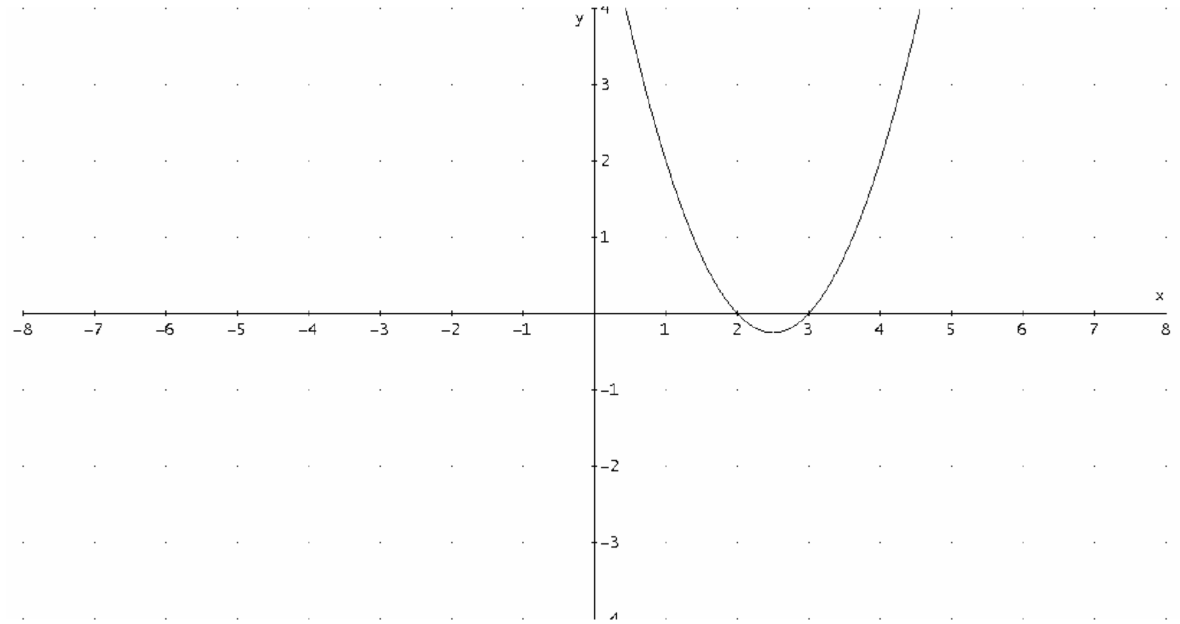
- Per i punti per cui $f(x)>0$ anche $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ risulta >0
- Per i punti per cui $f(x)<0$ anche $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ risulta <0
- Per i punti per cui $f(x)=1$ anche $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}=1$
- Per i punti per cui $f(x)=-1$ anche $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}=-1$
- Le due curve si incontrano nei punti aventi ordinate $+1$ e -1
- Se $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ si avrà $\lim_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$ per cui la retta $x=x_0$ risulta essere un asintoto verticale della curva $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$
- Se la retta $x=x_0$ è un asintoto verticale per la $f(x)$ cioè se $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ si ha $\lim_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$

- ß Se la curva $f(x)$ possiede un asintoto orizzontale $y=k$ cioè se $\lim_{x\to\infty} f(x)=k$ allora $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{k}$, anche la curva $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ possiede un asintoto orizzontale la cui equazione è $y=\frac{1}{k}$
- ß Inoltre ove $f(x)$ è crescente ,la $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ è decrescente e viceversa ove la $f(x)$ è decrescente la $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ è crescente
- ß Se nel punto $(x_0; f(x_0))$ la $f(x)$ ha un massimo, nel punto $\left(x_0;\frac{1}{f(x_0)}\right)$ la $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ ha un minimo, e viceversa se nel punto $(x_0; f(x_0))$ la $f(x)$ ha un minimo, nel punto $\left(x_0;\frac{1}{f(x_0)}\right)$ la $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ ha un massimo

Esempio

Data la funzione $y=x^2-5x+6$ **dedurre il grafico della finzione** $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$

La funzione $y=x^2-5x+6$ è una parabola avente vertice in $V\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{4}\right)$, incontra l'asse x nei punti $(2;0)$ e $(3;0)$
Il grafico sarà



La funzione $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ risulta positiva ove è positiva la $f(x)$ e negativa ove è negativa la $f(x)$ si ha quindi

$$f(x)>0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}>0 \qquad \text{per } x<2 \text{ e } x>3$$

$$f(x)<0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}<0 \qquad \text{per } 2<x<3$$

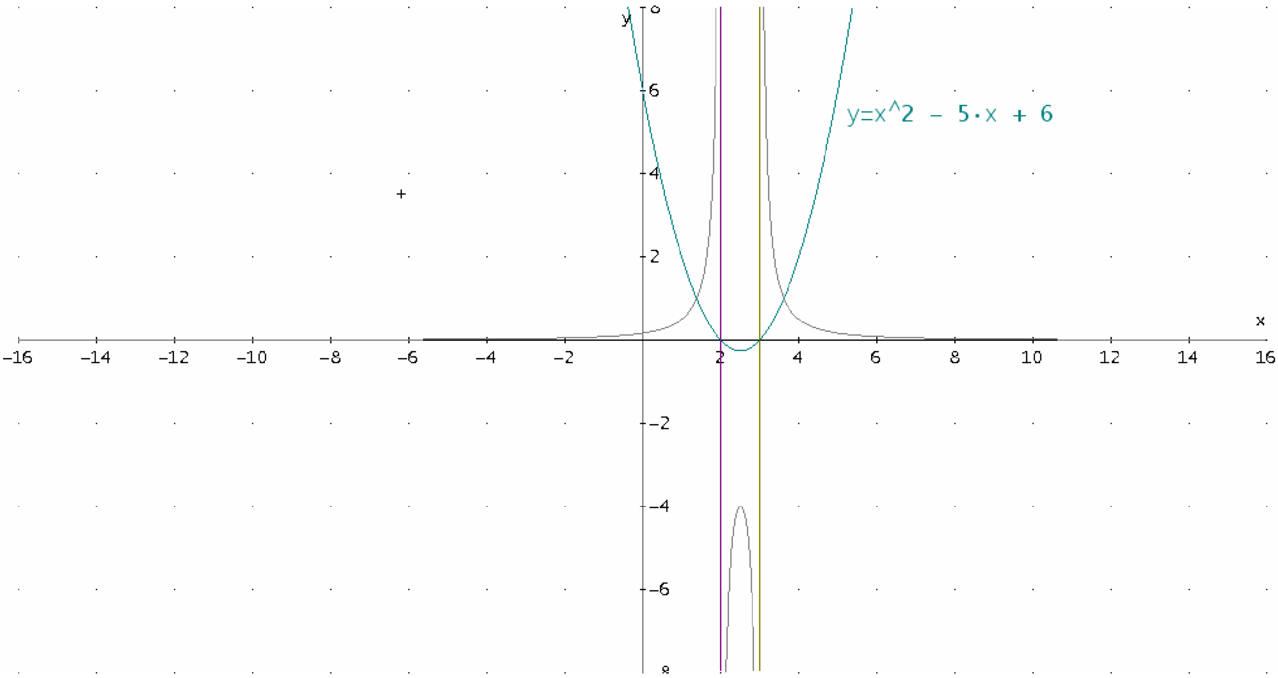
risulta evidente che le rette $x=2$ e $x=3$ sono asintoti verticali

inoltre essendo per la $f(x)$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$ avremo $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$ per cui l'asse x sarà un asintoto orizzontale

poiché la funzione $f(x)$ è decrescente per $x<\dfrac{5}{2}$ e crescente per $x>\dfrac{5}{2}$ la $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ risulta crescente per $x<\dfrac{5}{2}$ e decrescente per $x>\dfrac{5}{2}$.

Per $x=\dfrac{5}{2}$ la $f(x)$ presenta un minimo in $V\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{1}{4}\right)$, la $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ presenta un massimo in $\left(\dfrac{5}{2};-4\right)$

Il grafici di $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ sarà



Dal grafico della funzione $f(x)$ al grafico della funzione $g(x)=e^{f(x)}$

ß La funzione $g(x)=e^{f(x)}$ ha lo stesso dominio della $f(x)$: $\operatorname{dom} f(x)=\operatorname{dom} e^{f(x)}$

- Risulta inoltre sempre positiva nel dominio
- Poiché se $x>0$ risulta $e^x>1$ si ha se $f(x)>0$ allora $e^{f(x)}>1$
- Se $x<0$ allora $0<e^x<1$ quindi se $f(x)<0$ allora $0<e^{f(x)}<1$
- Se $x=0$ allora $e^x=1$ quindi se $f(x)=0$ allora $e^{f(x)}=1$
- Se $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} e^{f(x)}=0$
- Se $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} e^{f(x)}=+\infty$ la retta $x=x_0$ è un asintoto verticale per entrambe le funzioni
- Se $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ allora $\lim_{x\to\infty} e^{f(x)}=e^l$ la retta $y=l$ è un asintoto orizzontale per la $f(x)$ mentre la retta $y=e^l$ è un asintoto orizzontale per la $g(x)=e^{f(x)}$
- Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$ allora $\lim_{x\to\pm\infty} e^{f(x)}=e^{-\infty}=0$ l'asse x sarà un asintoto orizzontale per la $g(x)=e^{f(x)}$
- Se la $f(x)$ è crescente o decrescente o decrescente la $g(x)=e^{f(x)}$ sarà crescente o decrescente, se la $f(x)$ ha un massimo o un minimo in $\left(x_0; f(x_0)\right)$, la $g(x)=e^{f(x)}$ ha un massimo o un minimo in $\left(x_0; e^{f(x_0)}\right)$

Esempio

Data la funzione $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ **dedurre il grafico della finzione** $y=e^{\frac{2x-1}{x+1}}$

Le due funzioni sono definite nello stesso dominio

$\operatorname{dom} f =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

la funzione $y=e^{\frac{2x-1}{x+1}}$ risulta positiva nel dominio

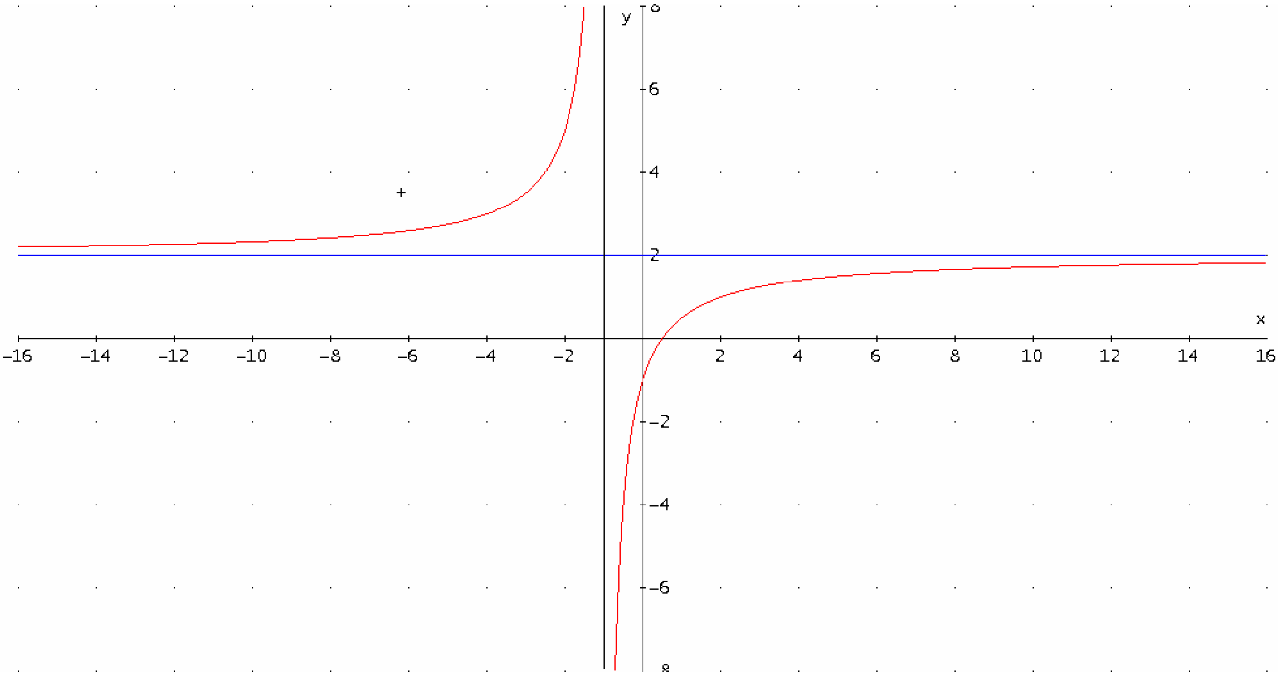
Consideriamo la funzione $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ essa è un'iperbole equilatera traslata i cui asintoti hanno equazioni $x=-\dfrac{d}{c}$ e $y=\dfrac{a}{c}$ cioè

$x=-1$ e $y=2$

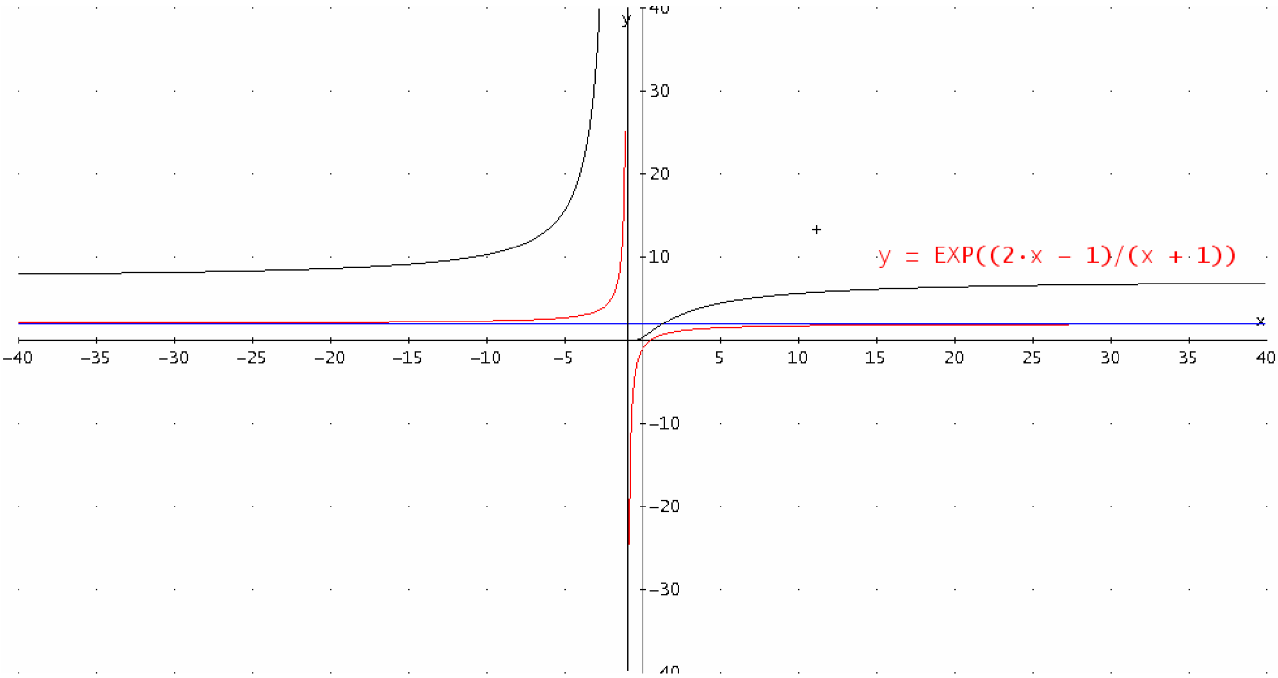
il centro è il punto $C(-1;2)$, incontra l'asse x nel punto $x=\dfrac{1}{2}$

la funzione risulta positiva $f(x)>0$ per $x<-1$ o per $x>\dfrac{1}{2}$ e negativa per $-1<x<\dfrac{1}{2}$

il grafico sarà



per $x < -1$ o per $x > \frac{1}{2}$ il grafico della funzione $y = e^{\frac{2x-1}{x+1}}$ si trova al di sopra della retta $y = 1$



La funzione risulta negativa $f(x) < 0$ per $-1 < x < \frac{1}{2}$ otteniamo quindi $x < e^{\frac{2x-1}{x+1}} < 1$

Il grafico della funzione $y=e^{\frac{2x-1}{x+1}}$ si troverà al di sotto della retta $y=1$ e al di sopra dell'asse x

Per $x=0$ si ha $y=e^{-1}=\frac{1}{e}$

La curva interseca l'asse y nel punto $A\left(0,\frac{1}{e}\right)$

Inoltre

$$\lim_{x\to-1^-} e^{\frac{2x-1}{x+1}} = e^{\frac{-2-1}{-1^-+1}} = e^{\frac{-3}{0^-}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} e^{\frac{2x-1}{x+1}} = e^{\frac{-2-1}{-1^++1}} = e^{\frac{-3}{0^+}} = e^{-\infty} = 0$$

la retta $x=1$ è un asintoto verticale sinistro per la funzione $g(x)$.

Essendo

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x+1}=2$$ si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{2x-1}{x+1}} = e^2$$

pertanto la retta $y=e^2$ è un asintoto orizzontale per la funzione $g(x)$

Inoltre

$$f'(x)=\frac{2(x-1)-2x+1}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}$$

essendo la derivata sempre positiva la funzione $f(x)$ risulta strettamente crescente, quindi anche la $g(x)$ $y=e^{\frac{2x-1}{x+1}}$ è strettamente crescente.

Dal grafico della funzione $f(x)$ al grafico della funzione $g(x)=\ln f(x)$

Dovendo essere $f(x)>0$ dobbiamo non considerare la parte della funzione $f(x)$ ove risulta $f(x)<0$.

Si ha

- Dove la curva $f(x)$ interseca l'asse x si ha
  $\lim_{x\to x_0}\ln f(x)=-\infty$

pertanto la funzione $g(x)$ possiede asintoti verticali del tipo $x=x_0$

- Inoltre se $f(x)=1$ allora $g(x)=\ln f(x)=0$ per cui essendo $y=f(x)=1$ una retta parallela all'asse x, la curva $g(x)$ interseca l'asse x nei punti che hanno per ascissa l'ascissa delle intersezioni della retta $y=1$ con la curva $f(x)$.
- Dove la $f(x)$ cresce, cresce anche la $g(x)$ e viceversa dove decresce la $f(x)$ decresce anche la $g(x)$,. Se nel punto $(x_0, f(x_0))$ la $f(x)$ ha un massimo o un minimo, la $g(x)$ avrà un massimo o un minimo in $(x_0, \ln f(x_0))$

Esempio

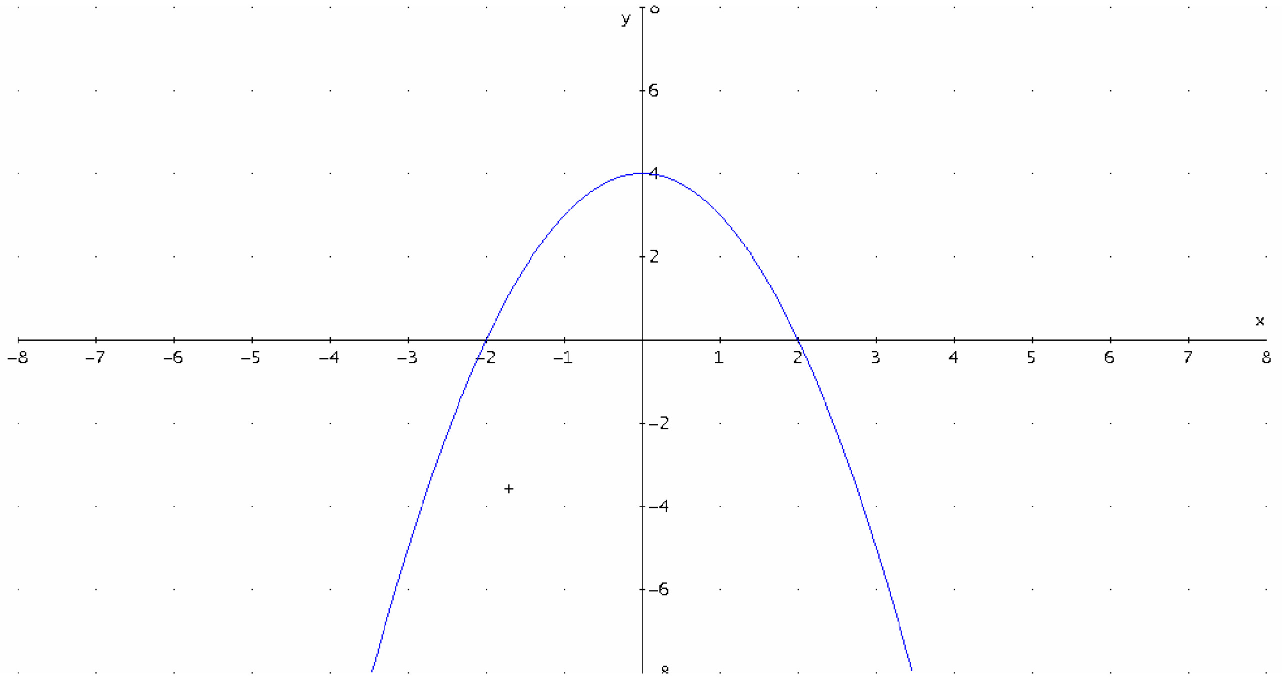
Data la funzione $y = 4 - x^2$ **dedurre il grafico della finzione** $y = \ln(4 - x^2)$

Consideriamo la curva

$f(x) = y = 4 - x^2$ il cui dominio **è** $D_f =]-\infty; +\infty[$

la curva $g(x) = y = \ln(4 - x^2)$ avrà come dominio $D_g =]-2; +2[$

Il grafico della funzione data è una parabola con vertice $V(0;4)$, volge la concavità verso il basso e incontra l'asse delle x in $(-2;0)$ e $(2;0)$



Eliminiamo quindi il ramo posto nel semipiano $y < 0$

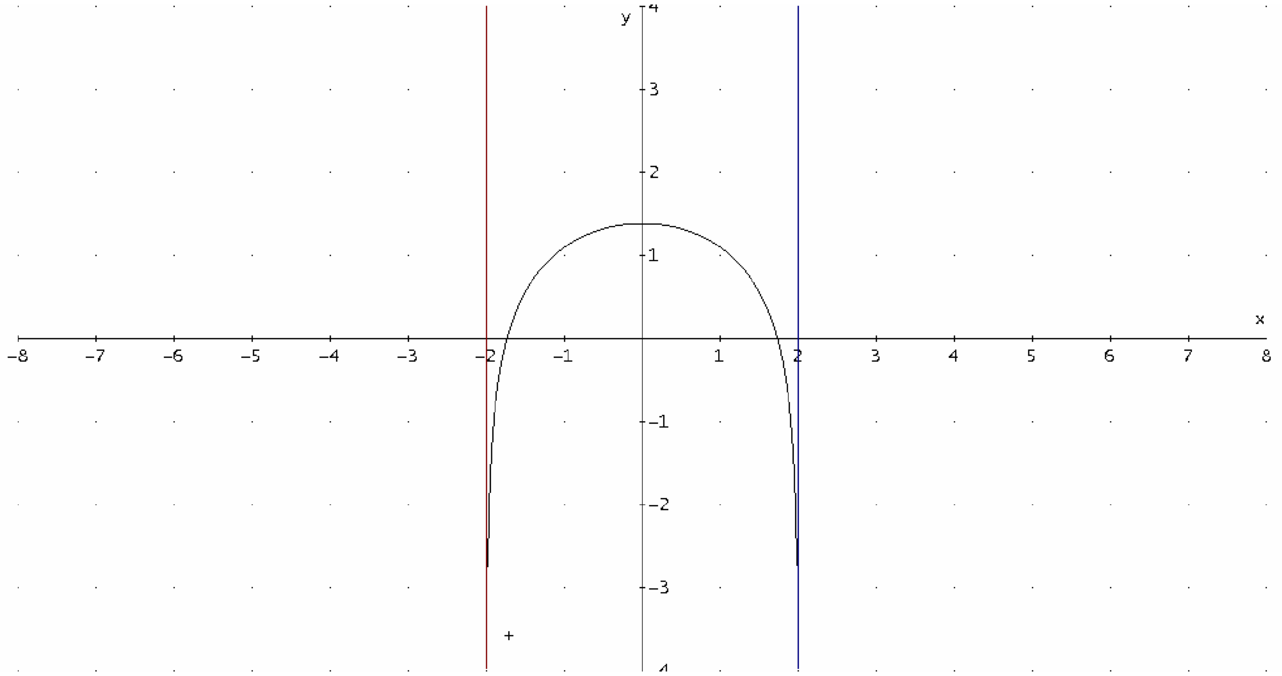
La curva logaritmica $g(x) = \ln(4 - x^2)$ presenta asintoti verticali nei punti in cui la curva $f(x)$ incontra l'asse x, cioè avremo $x = -2$ $x = 2$

Intersechiamo la $f(x)$ con la retta $y = 1$, avremo $x = \pm\sqrt{3}$.

Pertanto la curva $g(x)$ incontra l'asse x nei punti $(-\sqrt{3};0)$ e $(\sqrt{3};0)$

La $g(x)$ cresce nell'intervallo $]-2;0[$ decresce nell'intervallo $]2;0[$ e presenta un massimo nel punto $(0;\ln 4)$

Si ha il grafico


y
x
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4