Infiniti

Un infinito è una variabile che diverge.
Siano $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ 2 infiniti per $x \to x_0$, cioè sia

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \infty \qquad \lim_{x\to x_0} \beta(x) = \infty$$

e supponiamo che esista il limite del loro rapporto.
Si possono allora presentare i tre casi seguenti:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \begin{cases} 0 \\ \infty \\ k \neq 0 \end{cases}$$

Nel primo caso: $\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$ si dice che α è un infinito di **ordine inferiore** rispetto a β,

nel secondo caso : $\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$ α è un infinito di **ordine superiore** rispetto a β;

nel terzo caso $\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = k \neq 0$ si dice che α e β sono due infiniti dello stesso ordine.

Se il limite del rapporto non esiste, si dice che gli infiniti α e β non sono fra loro confrontabili.
Si dice che α è un infinito di **ordine n,** con n >0, rispetto all'infinito β quando risulta $\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta^n} = k \neq 0$

Es. 1 – Confrontare i due infiniti $\alpha = \ln x$, $\beta = ctg\, x$ per $x \to 0^+$.
Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{ctg\, x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{sin\, x}{x} - sin\, x \right) = 0$$

Pertanto l'infinito $\ln x$ è di ordine inferiore rispetto a $ctg\, x$.

Es.2 – Confrontare i due infiniti $\alpha = x^3 - 4x + 2$, $\beta = x^2 + x - 1$ per $x \to \infty$.
Si ha

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 4x + 2}{x^2 + x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 4}{2x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{2} = \infty$$

e quindi α è un infinito di **ordine superiore** rispetto a β̃

Es. 3 – Confrontiamo l'infinito $\beta = \frac{1}{(sinx - \cos x)^2}$ per $x \to \frac{\pi}{4}$ con $\alpha = \frac{1}{x - \frac{\pi}{4}}$

Si ha

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{(\sin x-\cos x)^2}}{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{x-\frac{\pi}{4}}{(\sin x-\cos x)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2(\sin x-\cos x)(\cos x-\sin x)}=\frac{1}{0}=\infty$$

Possiamo quindi concludere che $\beta=\frac{1}{(sinx-\cos x)^2}$ per $x\to\frac{\pi}{4}$ è un infinito di ordine superiore ad $\alpha=\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}$.

Se $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono 2 infiniti dello stesso ordine, per cui

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k \qquad \text{con } k\neq 0 \qquad \text{e finito}$$

scrivendo fuori dal limite possiamo porre

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k+\varepsilon \qquad \text{con } \varepsilon \text{ infinitesimo per } x\to x_0$$

Ne segue che

$$\alpha(x)=k\beta(x)+\varepsilon\,\beta(x)$$

dove $k\beta(x)$ prende il nome di **parte principale** dell'infinito $\alpha(x)$.

Es.4 Riguardando x come infinito principale (cioè con cui effettuare il confronto), determinare l'ordine e la parte principale dell'infinito

$$y=\frac{2x^3+5x^2+x-3}{3x^2-2}$$

Si ha

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2+x-3}{x(3x^2-2)}=\frac{2}{3}$$

Concludiamo che y è un infinito del primo ordine rispetto ad x e che la sua parte principale è $\frac{2}{3}x$

Principio di sostituzione degli infiniti

Il limite del rapporto di2 infiniti simultanei uguaglia il limite del rapporto delle rispettive parti principali.

Dim Come visto nel caso degli infinitesimi

Es. Calcolare $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(3x^2-1)^{\frac{1}{3}}+(2x+3)^{\frac{1}{5}}}{(2x^4-x)^{\frac{1}{6}}-(4-x)^{\frac{1}{4}}+x^{-1}}$

Applicando il principio di sostituzione degli infiniti.
Osserviamo che

$(3x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ è infinito di ordine $\dfrac{2}{3}$

$(2x+3)^{\frac{1}{5}}$ è infinito di ordine $\dfrac{1}{5}$

$(2x^4-x)^{\frac{1}{6}}$ è infinito di ordine $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

$(4-x)^{\frac{1}{4}}$ è infinito di ordine $\dfrac{1}{4}$

x^{-1} è un infinitesimo

$\sin x$ è una quantità finita

Pertanto trascuriamo:

al numeratore $(2x+3)^{\frac{1}{5}}$ e $\sin x$

al denominatore $(4-x)^{\frac{1}{4}}$ e $\sin x$

Possiamo quindi scrivere

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(3x^2-1)^{\frac{1}{3}}+(2x+3)^{\frac{1}{5}}}{(2x^4-x)^{\frac{1}{6}}-(4-x)^{\frac{1}{4}}+x^{-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(3x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{(2x^4-x)^{\frac{1}{6}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{3}(3x^2-1)^{-\frac{2}{3}}6x}{\frac{1}{6}(2x^4-x)^{-\frac{5}{6}}(8x^3-1)}$$

Siccome il grado del numeratore $1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$ è inferiore a quello del denominatore $-\dfrac{20}{6}+3=-\dfrac{1}{3}$ il limite sarà 0.