Teoremi sui limiti

Consideriamo il seguente:

Lemma: Sia a un numero reale tale che $|a|<\varepsilon$ con $\varepsilon>0$, alloradovrà essere $a=0$

Dim. Dimostriamo il lemma per assurdo. Supponiamo per assurdo che $a\neq 0$, per definizione di valore assoluto si ha $|a|>0$.

Essendo per ipotesi $|a|<\varepsilon\ \forall\ \varepsilon>0$ possiamo porre $\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}>0$, in quanto $|a|>0$, Risulta pertanto, essendo $|a|<\varepsilon$:

$$|a|<\frac{|a|}{2}\quad\Rightarrow\quad 2|a|<a$$

$2|a|-|a|<0$ e quindi $|a|<0$ che è un assurdo in quanto avevamo supposto che $|a|>0$. Pertanto dovrà essere $a=0$

TEOREMA DELL'UNICITA' DEL LIMITE

Se esiste il limite della funzione $f(x)$, per x tendente a x_0, tale limite è unico.

Dimostrazione

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che la funzione per $x\to x_0$, ammette due limiti l *ed* m ; cioè risulti:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=m \qquad (2)$$

Allora, considerando la (1) avremo

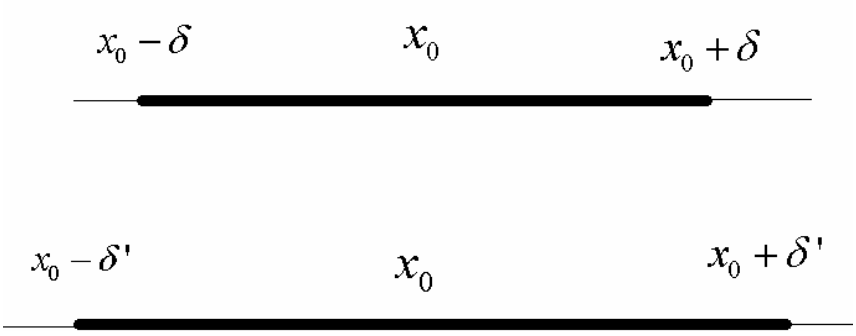
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall x\in I(x_0;\delta),\ con\ x\neq x_0$, risulta

$$|f(x)-l|<\varepsilon$$

Considerando la (2) avremo

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta' > 0 : \forall x \in I(x_0;\delta'),\, con\; x \neq x_0$ risulta

$\left| f(x) - m \right| < \varepsilon$



Allora avremo:

$\forall x \in I(x_0;r),\, con\; r = \min\{\delta;\delta'\}\; e\; x \neq x_0$

risulta

$\left| f(x) - l \right| < \varepsilon$ e

$\left| f(x) - m \right| < \varepsilon$

per cui si ha (sapendo che $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$)

$|l - m| = |l - f(x) + f(x) - m| \leq |l - f(x)| + |f(x) - m|$

essendo

$|l - f(x)| + |f(x) - m| = |f(x) - l| + |f(x) - m| < \varepsilon + \varepsilon$

otteniamo

$|l - m| =< 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

e per il lemma precedente avremo:

$l - m = 0$ e quindi

$l = m$

Ciò prova l’unicità del limite.

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Se una funzione $f(x)$ ($f: A \longrightarrow \mathbb{R}$) per x tendente ad x_0, , tende ad un limite finto $l \neq 0$, esiste un intorno $I(x_0;\delta)$ tale che per ogni suo punto $x \neq x_0$, la funzione $f(x)$ assume valori dello stesso segno del suo limite.

<u>Dimostrazione</u>

Per ipotesi abbiamo :

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \neq 0$$

quindi:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x \in I(x_0;\delta) \cap A$$

risulta

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

Posto allora $\varepsilon = |\, l \,| > 0$ avremo

$$l - |l| < f(x) < l + |l| \qquad (1)$$

a) Se $l > 0$, $|\, l \,| = l$ e quindi $l - |l| = l - l = 0$

dalla (1) risulta:

$0 < f(x) < 2l$ cioè

$f(x) > 0$

Pertanto la funzione $f(x)$ assume lo stesso segno del limite *l*.

b) Se *l*<0, $|l| = -l$ e $l + |l| = l - l = 0$, dalla (1) segue che:

$2l < f(x) < 0$ cioè

$f(x) < 0$

e la funzione $f(x)$ assume lo stesso segno di l.

Se $l=+\infty\ o\ (-\infty)\quad \exists I(x_0;\delta):\forall x\neq x_0$ la $f(x)$ risulterà positiva o negativa.

TEOREMA DEI DUE CARABINIERI.

Siano assegnate tre funzioni $f(x)$, $g(x)$ e $\varphi(x)$ sono tre funzioni definite nello stesso insieme A, eccetto al più un punto x_0 di questo, se per ogni *x* risulta:

$$f(x)\leq\varphi(x)\leq g(x),$$

e se, inoltre, è:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=l$$

allora risulta anche:

$$\lim_{x\to c}\varphi(x)=l.$$

Dimostrazione

Per definizione di limite, applicata alla funzione $f(x)$, si ha

$\varepsilon>0\ \exists I(x_0;\delta_1)\cap A:\forall x\neq x_0$ e quindi

$$l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon \qquad (1)$$

Applicando la definizione di limite alla funzione g(x) avremo

$\varepsilon>0\ \exists I(x_0;\delta_2)\cap A:\forall x\neq x_0$

$$l-\varepsilon<g(x)<l+\varepsilon \qquad (2)$$

Posto

$I(x_0;\delta)=I(x_0;\delta_1)\cap I(x_0;\delta_2)\cap A$

risultano simultaneamente verificate le (1) e (2) per cui

$\forall x\neq x_0\in I(x_0;\delta)\cap A$ si ha

$l-\varepsilon<f(x)\leq\varphi(x)\leq g(x)<l+\varepsilon$

e quindi

$l-\varepsilon<\varphi(x)<l+\varepsilon$

Pertanto, in base alla definizione di limite avremo

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=l$$

e il teorema è dimostrato