Teoremi sui limiti

Consideriamo il seguente:

Lemma: Sia a un numero reale tale che $|a| < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$, alloradovrà essere $a = 0$

Dim. Dimostriamo il lemma per assurdo. Supponiamo per assurdo che $a \neq 0$, per definizione di valore assoluto si ha $|a| > 0$.

Essendo per ipotesi $|a| < \varepsilon \ \forall \ \varepsilon > 0$ possiamo porre $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2} > 0$, in quanto $|a| > 0$, Risulta pertanto, essendo $|a| < \varepsilon$:

$$|a| < \frac{|a|}{2} \quad \Rightarrow \quad 2|a| < a$$

$2|a| - |a| < 0$ e quindi $|a| < 0$ che è un assurdo in quanto avevamo supposto che $|a| > 0$. Pertanto dovrà essere $a = 0$

TEOREMA DELL'UNICITA' DEL LIMITE

Se esiste il limite della funzione $f(x)$, per x tendente a x_0, tale limite è unico.

Dimostrazione

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che la funzione per $x \to x_0$, ammette due limiti $l \ ed \ m$; cioè risulti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = m \qquad (2)$$

Allora, considerando la (1) avremo

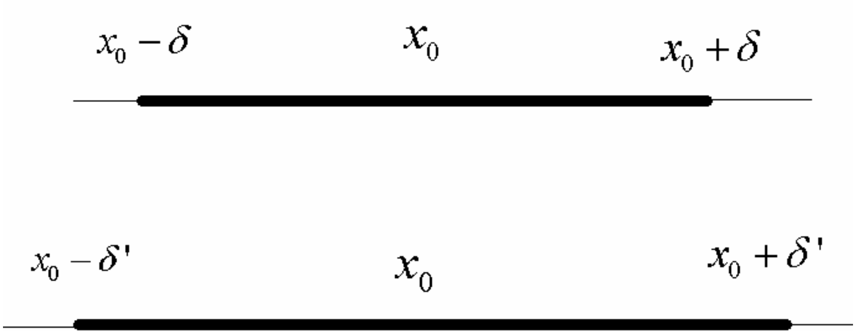
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in I(x_0; \delta), con \ x \neq x_0$, risulta

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

Considerando la (2) avremo

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta' > 0 : \forall x \in I(x_0; \delta'), con \; x \neq x_0$ risulta

$\left| f(x) - m \right| < \varepsilon$



Allora avremo:

$\forall x \in I(x_0; r), con \; r = \min\{\delta; \delta'\} \; e \; x \neq x_0$

risulta

$\left| f(x) - l \right| < \varepsilon$ e

$\left| f(x) - m \right| < \varepsilon$

per cui si ha (sapendo che $\left|\alpha + \beta\right| \leq \left|\alpha\right| + \left|\beta\right|$)

$\left| l - m \right| = \left| l - f(x) + f(x) - m \right| \leq \left| l - f(x) \right| + \left| f(x) - m \right|$

essendo

$\left| l - f(x) \right| + \left| f(x) - m \right| = \left| f(x) - l \right| + \left| f(x) - m \right| < \varepsilon + \varepsilon$

otteniamo

$\left| l - m \right| =< 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

e per il lemma precedente avremo:

$l - m = 0$ e quindi

$l = m$

Ciò prova l'unicità del limite.

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Se una funzione $f(x)$ ($f: A \longrightarrow \mathbb{R}$) per x tendente ad x_0, , tende ad un limite finto $l \neq 0$, esiste un intorno $I(x_0;\delta)$ tale che per ogni suo punto $x \neq x_0$, la funzione $f(x)$ assume valori dello stesso segno del suo limite.

<u>Dimostrazione</u>

Per ipotesi abbiamo :

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \neq 0$$

quindi:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x \in I(x_0;\delta) \cap A$$

risulta

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

Posto allora $\varepsilon = |l| > 0$ avremo

$$l - |l| < f(x) < l + |l| \qquad (1)$$

a) Se $l > 0$, $|l| = l$ e quindi $l - |l| = l - l = 0$

dalla (1) risulta:

$0 < f(x) < 2l$ cioè

$f(x) > 0$

Pertanto la funzione $f(x)$ assume lo stesso segno del limite *l*.

b) Se *l*<0, $|l| = -l$ e $l + |l| = l - l = 0$, dalla (1) segue che:

$2l < f(x) < 0$ cioè

$f(x) < 0$

e la funzione $f(x)$ assume lo stesso segno di l.

Se $l = +\infty \; o \; (-\infty) \quad \exists I(x_0;\delta): \forall x \neq x_0$ la $f(x)$ risulterà positiva o negativa.

TEOREMA DEI DUE CARABINIERI.

Siano assegnate tre funzioni $f(x)$, $g(x)$ e $\varphi(x)$ sono tre funzioni definite nello stesso insieme A, eccetto al più un punto x_0 di questo, se per ogni x risulta:

$$f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x),$$

e se, inoltre, è:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

allora risulta anche:

$$\lim_{x \to c} \varphi(x) = l\,.$$

<u>Dimostrazione</u>

Per definizione di limite, applicata alla funzione $f(x)$, si ha

$\varepsilon > 0 \; \exists I(x_0;\delta_1) \cap A : \forall x \neq x_0$ e quindi

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \qquad (1)$$

Applicando la definizione di limite alla funzione g(x) avremo

$\varepsilon > 0 \; \exists I(x_0;\delta_2) \cap A : \forall x \neq x_0$

$$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \qquad (2)$$

Posto

$I(x_0;\delta) = I(x_0;\delta_1) \cap I(x_0;\delta_2) \cap A$

risultano simultaneamente verificate le (1) e (2) per cui

$\forall x \neq x_0 \in I(x_0;\delta) \cap A$ si ha

$$l - \varepsilon < f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x) < l + \varepsilon$$

e quindi

$$l - \varepsilon < \varphi(x) < l + \varepsilon$$

Pertanto, in base alla definizione di limite avremo

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = l$$

e il teorema è dimostrato