Estratto da «Archimede» - Fasc. 3, 1996

UN... INSOLITO LIMITE

Per effettuare l'integrazione di una funzione razionale fratta del tipo $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, con $g(x)$ di grado n, è sempre possibile ricondursi al caso in cui il grado di $f(x)$ sia minore del grado di $g(x)$.

In tal caso, se le soluzioni di $g(x) = 0$ sono $x_1, x_2, \dots, x_n$ e sono tra loro reali e distinte, si ha :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}$$

dove a_0 è il coefficiente del termine di grado massimo di $g(x)$.

Come è noto, occorre considerare l'uguaglianza:

(1) $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{a_0}\left[\frac{K_1}{x-x_1} + \frac{K_2}{x-x_2} + \cdots\cdots + \frac{K_n}{x-x_n}\right]$$

Per determinare la generica costante K_i, moltiplichiamo la (1) per $x - x_i$ e consideriamo il limite:

$$\frac{1}{a_0}\lim_{x\to x_i}\frac{(x-x_i)f(x)}{(x-x_1)\cdots(x-x_i)\cdots(x-x_n)} = \frac{1}{a_0}\lim_{x\to x_i}\left[\frac{(x-x_i)K_1}{x-x_1} + \cdots + K_i + \cdots\cdots + \frac{(x-x_i)K_n}{x-x_n}\right]$$

da cui:

$$\lim_{x \to x_i} \frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots\cdots(x-x_n)} = K_i.$$

Questo metodo operativo, raramente affrontato nei testi di analisi, consente il calcolo rapido delle costanti K_i senza ricorrere all'uso di un sistema lineare.

ADOLFO SCIMONE - VINCENZO ZANGHI