EQUAZIONI ESPONENZIALI -- LOGARITMI

Funzione Esponenziale

Dato un numero reale a positivo consideriamo la funzione $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ che ad ogni elemento $x \in$ R fa corrispondere l'elemento $y = a^x$.
Se a = 1, f è costante:

$$f(x) = 1^x = 1, \; per \quad ogni \;\; x \in \mathbf{R}$$

Questa funzione:

$$y = a^x$$

se a > 0 ed $a \neq 1$ si chiama funzione esponenziale di base a.
Una importante proprietà della funzione esponenziale è data dalla:
Proposizione: - Se a è un numero reale positivo e diverso da 1, allora la funzione esponenziale:

$$y = a^x$$

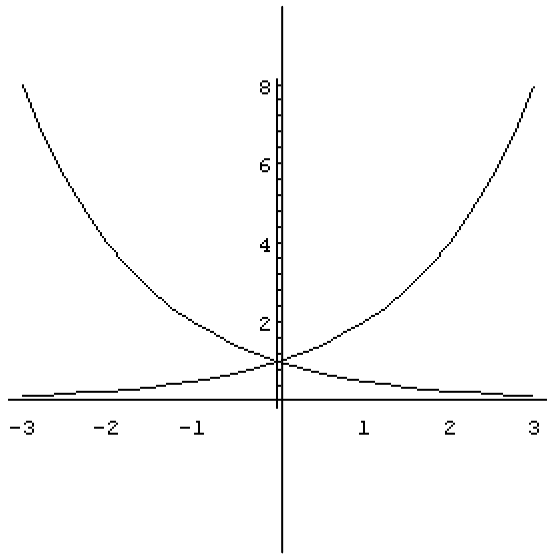
assume, uno alla volta, come valore, qualsiasi numero positivo b.

Pertanto si ha che:
i).- La funzione esponenziale è biiettiva, (cioè una corrispondenza biunivoca tra $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{R}^+$.).
ii) -La funzione esponenziale è monotona:
-- strettamente crescente, se a >1,
-- strettamente decrescente, se $0 < a < 1$.
Per cui la funzione esponenziale è invertibile in $\mathbf{R}$.
Per studiare il grafico di detta funzione esponenziale distinguiamo due casi:

1° Caso - Sia a > 1.

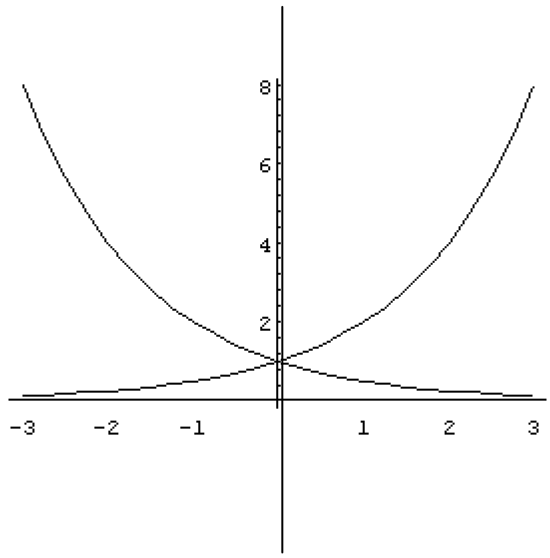
Possiamo osservare che, essendo a^x sempre positiva si ha:
a) Per x = 0, y = 1, quindi il grafico incontra l'asse y nel punto.(0, 1)
b) Per valori positivi di x, la y assume valori che crescono al crescere dell'esponente e tendono a diventare grandi quanto si vuole.
c) Per valori negativi di x, crescenti in valore assoluto, la y assume valori positivi via via decrescenti e tende a diventare sempre più piccola.

Il grafico della funzione esponenziale è pertanto tutto situato nel semipiano delle ordinate positive e precisamente: nel secondo quadrante, dove x < 0 la curva si avvicina asintoticamente all'asse x, mentre nel primo quadrante tende ad allontanarsi dai due assi.



2° Caso $0 < a < 1$**.**

In questo caso, siccome a < 1, l'ordinata cresce indefinitamente per valori negativi di x, passa per il punto (0, 1) e tende asintoticamente all'asse x per valori positivi della variabile x. La curva che si ottiene è simmetrica, rispetto all'asse y di quella tracciata precedentemente.



3° Caso a = 1.

In questo caso la funzione, per ogni valore della x, assume sempre valore 1. Il grafico è quindi rappresentato dalla retta parallela all'asse x, che incontra l'asse y nel punto (0, 1).

Equazione Esponenziale

Definizione - Dicesi equazione esponenziale ogni equazione in cui l'incognita compare all'esponente di una o più potenze.
La più semplice equazione è della forma

$$a^x = b \qquad (1)$$

Nel campo R dei numeri reali, la (1) può avere soluzioni se e solo se a > 0 e b > 0. Infatti:

- i)- Il primo membro della (1), che è una potenza reale, ha significato solo se a è positivo.
- ii) - Inoltre a^x risulta sempre positiva per ogni valore della x, pertanto l'equazione (1) può avere soluzioni solo se anche b è positivo.

Esaminiamo alcuni casi particolari nell'ipotesi che a > 0 e b > 0:
a) - Sia a = 1, b = 1. L'equazione diviene

$$1^x = 1$$

che è un'identità.
b) - Sia a = 1, b $\neq$ 1. L'equazione diviene:

$$1^x = b$$

evidentemente impossibile per $b \neq 1$.
c) - Sia $a \neq 1\, e\, b = 1$,. L'equazione $a^x = 1$ ammette la soluzione x = 0 perché $a^0 = 1$.

Teorema: - Dati due numeri a, b $\in \mathbf{R}^+$ con $a \neq 1$, l'equazione

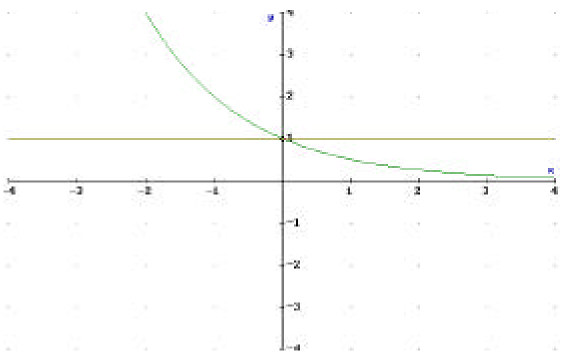
$$a^x = b$$

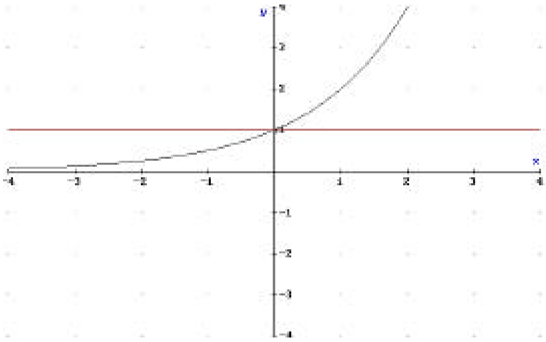
ammette una ed una sola soluzione.

Dimostrazione: Poniamo y = b. L'equazione esponenziale $a^x = b$ si può considerare come la risolvente del sistema:

$$\begin{cases} y = a^x \; (2) \\ y = b \; (3) \end{cases}$$

La (2) è l'equazione esponenziale; la (3) è l'equazione di un fascio di rette parallele all'asse x..
Le intersezioni del fascio di rette con la curva danno le soluzioni dell'equazione





esponenziale data.

Dai grafici risulta che per qualunque valore di $b > 0$ le rette del fascio incontrano la curva in un solo punto. L'equazione esponenziale ha pertanto, in R, una ed una sola soluzione.
Distinguiamo due casi:

1° caso - a > 1:

i) - Se $0 < b < 1$ si ha una soluzione negativa.
ii) - Se $b = 1$ si ha la soluzione nulla $x = 0$ che avevamo trovato in precedenza.
iii) - Se $b > 1$ si ha una soluzione positiva.

2° Caso - a < 1:

i) - Se $0 < b < 1$ si ha una soluzione positiva.
ii) - Se $b = 1$ si ha la soluzione nulla già trovata in precedenza.
iii) - Se $b > 1$ si ha una soluzione negativa.

LOGARITMI

Abbiamo visto che l'equazione esponenziale

$$a^x = b$$

con a e b numeri reali positivi ed $a \neq 1$ ha sempre nell'insieme $\mathbf{R}$, una ed una sola soluzione.

Il numero x che soddisfa l'equazione esponenziale si chiama logaritmo del numero b in base a e si indica con $\log_a b$.
Pertanto le due equazioni

$$a^x = b \quad e \quad x = \log_a b$$

sono tra loro equivalenti.
Il numero b si chiama argomento del logaritmo e deve essere un numero positivo.

Definizione - Si chiama logaritmo di un numero reale positivo, in una data base positiva e diversa da 1, l'esponente che bisogna dare a tale base per avere il numero dato.

Dalla definizione di logaritmo si ha:

$$b = a^{\log_a b}$$

Si hanno le seguenti proprietà:

a) - $\log_a 1 = 0$ *perchè* $a^0 = 1$; cioè qualunque sia la base, il logaritmo di 1 è uguale a zero.

b) - $\log_a a = 1$ *perchè* $a^1 = a$ cioè, qualunque sia la base, il logaritmo di un numero uguale alla base è uguale a 1.

c) - Il $\log_a b$ è positivo se:

$$\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}$$

d) - Il $\log_a b$ *è negativo se*:

$$\begin{cases} a > 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > 1 \end{cases}$$

- Si ha quindi: Se la base è maggiore di 1,i numeri minori di 1 hanno logaritmi negativi ed i numeri maggiori di 1 hanno logaritmi positivi.
- Se la base è minore di 1, i numeri minori di 1 hanno logaritmi positivi ed i numeri maggiori di 1 hanno logaritmi negativi.

e) - Se la base a è maggiore di 1, al crescere del numero b, cresce anche il logaritmo di quest'ultimo.

f) - Se la base a è minore di 1, al crescere del numero b il logaritmi decresce.

Infine:

Non si può parlare di logaritmo di un numero rispetto alla base 1 (perché l'equazione $1^x = b$ è impossibile se $b \neq 1$ o indeterminata se b = 1) o rispetto ad una base negativa o nulla (perché la potenza a^x è definita per a > 0

PROPRIETÀ' DEI LOGARITMI

Qualunque sia la base, i logaritmi godono delle seguenti proprietà:

Teorema 1 Il logaritmo di un prodotto di due (o più) numeri b e c è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori, cioè

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

Infatti posto

$$x = \log_a b \quad e \quad y = \log_a c$$

per definizione di logaritmo si ha:

$$a^x = b \qquad e \qquad a^y = c$$

Moltiplicando membro a membro otteniamo

$a^x \cdot a^y = bc$ e quindi:

$a^{x+y} = bc$

Da questa uguaglianza si deduce che x + y è l'esponente che bisogna dare ad a per avere bc cioè, per definizione di logaritmo si ha:

$\log_a(bc) = x + y$

ossia, per le posizioni fatte otteniamo:

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

La stessa dimostrazione si esegue nel caso in cui il numero dei fattori sia maggiore di due.

Teorema 2.- Il logaritmo di un quoziente di due numeri positivi b e c è uguale alla differenza fra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Posto $\log_a b = x$ *e* $\log_a c = y$

per definizione di logaritmo si ha:

$a^x = b$ *e* $a^y = c$

Dividendo membro a membro otteniamo:

$$a^{x-y} = \frac{b}{c}$$

Ricordando la definizione di logaritmo, otteniamo:

$\log_a \frac{b}{c} = x - y$ e quindi

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Teorema 3 - Il logaritmo di una potenza ad esponente reale e base positiva è uguale al prodotto dell'esponente della potenza per il logaritmo della base della potenza.

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

Posto

$$\log_a b = x \qquad (1)$$

si ha:

$$a^x = b$$

elevando i due membri a potenza n-esima si ha:

$$a^{mx} = b^m$$

da cui, per definizione di logaritmo

$$\log_a b^m = mx$$

e tenendo conto della (1) otteniamo:

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

Teorema 4.- Il logaritmo di un radicale è uguale al prodotto dell'indice del radicando per il reciproco dell'indice del radicale.

$$\log_a \sqrt[n]{b^m} = \frac{m}{n} \log_a b$$

Dalla identità

$$\sqrt[n]{b^m} = b^{\frac{m}{n}}$$

e per il teorema precedente si ha:

$$\log_a \sqrt[n]{b^m} = \log_a b^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_a b.$$

PASSAGGIO DA UN SISTEMA DI LOGARITMI AD UN ALTRO

Supponiamo sia noto il logaritmo di un numero positivo N in una certa base a, proponiamoci di calcolare il logaritmo dello stesso numero N in un'altra base b.

Indichiamo con x il nuovo logaritmo in base b, cioè:

$$x = \log_b N$$

Per definizione di logaritmo abbiamo

$$b^x = N$$

Prendendo i logaritmi in base a dei due membri avremo:

$$\log_a b^x = \log_a N$$

applicando il teorema (3) della potenza si ha:

$$x \log_a b = \log_a N$$

da cui:

$$x = \frac{\log_a N}{\log_a b} \quad \text{e quindi} \quad \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

I sistemi di logaritmi più usati sono:
i) - il sistema a base 10 detto sistema di logaritmi decimali, o volgari o di Briggs.
ii) - il sistema a base e (e numero irrazionale che vale 2,71828182845......) detto sistema di logaritmi naturali o neperiani e viene indicato con ln a invece di $\log_e a$.

FUNZIONE LOGARITMICA

Sappiamo che se a è un numero reale positivo diverso da 1, ad ogni numero reale positivo b corrisponde al numero reale $\log_a b$.
Si ha quindi la seguente:
Definizione -.Se a > 0 e a ≠ 1, la funzione $\mathbf{f}:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$\mathbf{f(x) = \log_a b}$$

prende il nome di funzione logaritmica di base a.

Da quanto abbiamo visto precedentemente si hanno le seguenti proprietà:
a) - la funzione logaritmica è monotona:

i) - strettamente crescente se a >1;
ii) - strettamente decrescente se 0 < a <1.
b) - la funzione logaritmica è biiettiva, cioè esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbf{R}^+$ **ed** $\mathbf{R}$

Pertanto la funzione logaritmica è invertibile in $\mathbf{R}$.

c) - la funzione logaritmica di base a è l'inversa della funzione esponenziale di base a. Infatti:

se $f(x) = a^x \quad e \quad g(x) = \log_a x$ si ha:

$x \xrightarrow{f} a^x \xrightarrow{g} \log_a a^x = x$

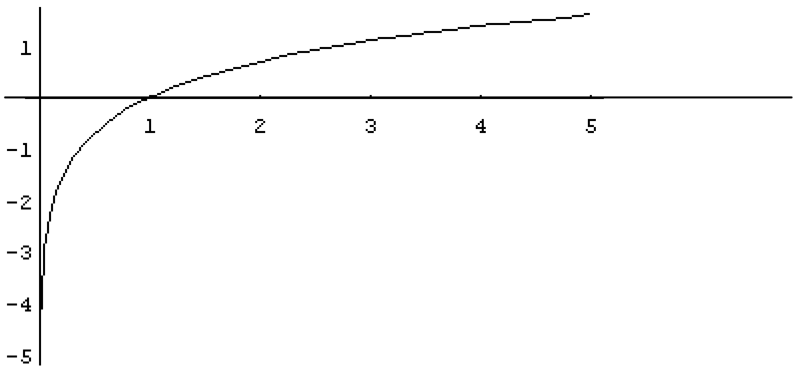
$x \xrightarrow{g} \log_a x \xrightarrow{f} a^{\log_a x} = x$

Grafico della funzione logaritmica $y = \log_a x$

Si hanno due casi:

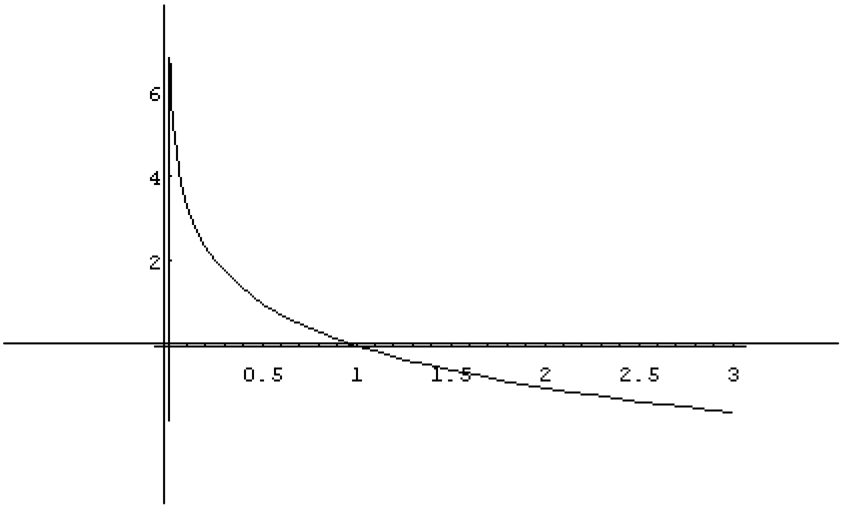
1° caso Sia a > 1: essendo: $d\text{om}\, f = \left]o, +\infty\right[$ il grafico della funzione G(f) si trova a destra dell'asse y.

Per x = 1 si ha y = 0 , per cui la curva interseca l'asse x nel punto (1, 0);
per x > 1 la y assume valori positivi e cresca al crescere dalla x;
per 0 < x< 1 la y assume valori negativi e quando x tende a zero i valori di y tendono a $-\infty$
Si ha quindi il grafico.



2° - Caso Sia 0 < a < 1.

Con considerazioni analoghe al caso precedente si ha che la funzione è decrescente ed assume valori positivi se 0 <x < 1, tende a $+\infty$ per valori della variabile x tendenti a zero ed assume valore zero per x = 1; assume valori negativi per x > 1.
Si ha il grafico



La curva che rappresenta il grafico della funzione

$$y = \log_a x$$

prende il nome di curva logaritmica.