TEORIA DELLE MATRICI

Dato un campo K , definiamo matrice ad elementi in K di tipo (m, n) un insieme di numeri ordinati secondo righe e colonne in una tabella rettangolare del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{dove} \quad a_{ij} \in K$$

i è l'indice di riga tale che $1 \le i \le m$
j è l'indice di colonna tale che $1 \le j \le n$
Una matrice A del tipo (m, n) è composta da $m \times n$ elementi disposti secondo m righe e secondo m colonne. Tutti gli elementi vengono indicati con doppio indice, il primo indica la riga, il secondo la colonna.
In modo compatto una matrice si può indicare con

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Se $m \neq n$ la matrice è rettangolare, se $m = n$ la matrice è quadrata. In quest'ultimo caso il numero delle righe (o colonne) prende il nome di ordine della matrice.
Diamo adesso delle definizioni di uso frequente.
Chiamasi linea della matrice indifferentemente una riga o una colonna, linee parallele più righe o più colonne.
In due linee parallele si dicono corrispondenti gli elementi di egual posto, cioè l'elemento p^{mo} dell'una con l'elemento p^{mo} dell'altra, qualunque sia p.
Una linea si dice identicamente nulla se tali sono tutti i suoi elementi.
Due linee si dicono uguali o proporzionali quando gli elementi dell'una sono uguali o proporzionali ai corrispondenti dell'altra.
Una matrice si dice nulla se ha nulli tutti i suoi elementi.
Due matrici si dicono simili quando hanno lo stesso numero di righe e di colonne, in due matrici simili si dicono corrispondenti gli elementi di ugual posto.
Due matrici di $m \times n$ *elementi*: $A = (a_{ij})$ *e* $B = (b_{ij})$ sono uguali se sono uguali tutti i corrispondenti elementi, cioè se $a_{ij} = b_{ij}$ per ogni i e per ogni j.
In una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine n, gli elementi a_{ij} *con* $i = j$ (cioè gli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$) costituiscono la diagonale principale, mentre gli elementi $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ costituiscono la diagonale secondaria.
In una matrice quadrata, due elementi a_{ik} , a_{ki} che hanno gli stessi indici, ma in ordine inverso, si dicono coniugati, i loro posti sono simmetrici rispetto alla diagonale principale.

Gli elementi che stanno sulla diagonale principale sono coniugati di se stessi. Nel caso particolare che gli elementi siano tra loro uguali, cioè sia $a_{ik} = a_{ki}$,la matrice quadrata si dice simmetrica.
L'insieme di tutte le matrici $m \times n$ a coefficienti in K si indica con $K^{m,n}$.
Definiamo vettore riga una matrice formata da una sola riga.
Es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Definiamo vettore colonna una matrice formata da una sola colonna
Es.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Data una matrice quadrata $A \in K^{n,n}$ definiamo diagonale principale l'insieme degli elementi di A che hanno uguale indice

$$a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$$

mentre definiamo matrice identica una matrice quadrata nella quale gli elementi che costituiscono la diagonale principale sono tutti uguali a 1 e tutti gli altri sono nulli. Una matrice identica si indica con I_n

Es.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una matrice quadrata $A \in K^{n,n}$ si dice simmetrica se

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{dove} \quad i \neq j$$

Una matrice quadrata si dice triangolare inferiore se gli elementi che stanno al disopra della diagonale principale sono tutti nulli

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ a_{11n} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ove} \quad a_{ij} = 0 \quad se \quad i < j$$

Si dice triangolare superiore se gli elementi che stanno al di sotto della diagonale principale sono tutti nulli

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ 0 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ove} \quad a_{ij} = 0 \quad se \quad i > j$$

Una matrice quadrata si dice diagonale se $a_{ij} = 0 \quad \forall i, j \quad con \quad i \neq j$, cioè se tutti gli elementi sono nulli eccetto gli elementi che costituiscono la diagonale principale.

Data una matrice $A \in K^{m,n}$, la trasposta di A è la matrice che si indica con ${}^tA$, ottenuta da A scambiando fra loro le righe con le colonne.

Es. - $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in K^{2,3}$ ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in K^{3,2}$

In generale, se $A \in K^{m,n}$, ${}^tA \in K^{n,m}$.
Si ha
${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

L'insieme $K^{m,n}$ si può dotare di una struttura algebrica. Cominciamo infatti a definire un'operazione di somma tale che $K^{m,n}$ sia un gruppo abeliano (cioè gode della proprietà commutativa).

Somma di matrici

Siano $A = (a_{i,j})$ e $B = (b_{i,j})$ due matrici $m \times n$ a coefficienti in K. La matrice somma A + B è una matrice $C = (c_{i,j})$ definita da
$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \qquad con\ i, j \in \mathbf{N} : 1 \le i \le m \quad 1 \le j \le n$
Quindi la matrice C è la matrice ottenuta sommando gli elementi corrispondenti di A e di B.

Es.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

$A + B = C = \begin{pmatrix} 1+0 & 2-1 & 3+5 \\ 4-2 & 5-3 & 6+4 \end{pmatrix}$

Per cui otteniamo

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

La somma di due matrici A e B è definita solo quando A e B hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne.
L'operazione somma di matrici soddisfa le proprietà dei gruppi abeliani :
a1) A + (B +C) = (A + B) + C $\qquad \forall A, B, C \in K^{m,n}$

a2) A + B = B + A

a3) $\exists\, 0 \in K^{m,n} : A + 0 = 0 + A = A$

a4) $\forall A \in K^{m,n}\ \exists B \in K^{m,n} : A + B = B + A = 0$

Per quanto riguarda il prodotto nell'insieme $K^{m,n}$ delle matrici $m \times n$ è possibile introdurre due tipi di prodotto :
prodotto esterno matrice per scalare
prodotto interno righe per colonne.

Prodotto di una matrice per uno scalare

Sia $A = \left(a_{ij}\right) \in K^{m,n}$ una matrice $m \times n$ a coefficienti nel campo K e λ uno scalare, cioè un elemento del campo su cui si opera.
Chiamiamo prodotto di λ per A la matrice

$$C = \left(a_{ij}\right) \in K^{m,n}\ dove\ a_{ij} = \lambda\, a_{ij} \quad \forall i = 1,....,m\ e\ \forall\ j = 1,....,n$$

In altre parole, la matrice C = λ A è la matrice ottenuta moltiplicando ogni elemento di A per il numero λ.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ....a_{1n} \\ a_{21} & ....a_{2n} \\ .... & \\ a_{m1} & ....a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \lambda\ A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & ....a_{1n} \\ a_{21} & ....a_{2n} \\ .... & \\ a_{m1} & ....a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a_{11} & ....\lambda\, a_{1n} \\ \lambda\, a_{21} & ....\lambda\, a_{2n} \\ .... & \\ \lambda\, a_{m1} & ....\lambda\, a_{mn} \end{pmatrix}$$

Il prodotto matrice per scalare gode di quattro fondamentali proprietà :

1) $(\lambda\,\mu)A = \lambda(\mu\, A) \qquad \forall A \in K^{m,n} \qquad \lambda, \mu \in K$
2) (λ+μ)A = λ A +μ A $\quad \forall A \in K^{m,n} \qquad \forall \lambda \in K$
3) λ (A + B) = λ A + λ B $\quad \forall A, B \in K^{m,n} \qquad \forall \lambda \in K$
4) λ A = A

Consideriamo l'insieme $K^{m,n}$ con le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare così definita.
$K^{m,n}$ rispetto alla somma è un gruppo abeliano, mentre rispetto al prodotto, che è un prodotto esterno, gode delle quattro proposizioni sopra elencate. Per cui, l'insieme $K^{m,n}$ delle matrici $m \times n$ a coefficienti in K è un esempio di spazio vettoriale, una struttura su cui sono definite due operazioni una interna (somma) e l'altra esterna (prodotto per uno scalare)

Prodotto interno righe per colonne

Per quanto riguarda il prodotto interno, il più importante è il prodotto righe per colonne.
Per definire questo prodotto dobbiamo definire le condizioni di moltiplicabilità.

Siano $A \in K^{m,n}$ e $B \in K^{p,q}$ rispettivamente due matrici del tipo rispettivamente *(m, n) e (p, q).* Tali matrici sono moltiplicabili per colonne se *n = p.*
In definitiva, il prodotto righe per colonne tra matrici è definito solo se il numero delle colonne della prima matrice è uguale al numero delle righe della seconda matrice.
Quindi, se $A = \left(a_{ij}\right) \in K^{m,n}$ e $B = \left(b_{ij}\right) \in K^{p,q}$ il prodotto $A \times B$ è definito solo se $n = p$.
Se le matrici A e B soddisfano a questa condizione, si dicono compatibili per la moltiplicazione.
Con questa condizione, si definisce il prodotto tra le matrici A e B.

$$A \times B = C = \left(c_{ij}\right) \in K^{m,q}$$

La matrice C del tipo (*m, q*) il cui elemento generico c_{ij} è dato da

$$\left\| c_{ij} \right\| = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\, b_{lj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots\dots + a_{in}b_{nj}$$

La relazione precedente afferma che per ottenere l'elemento c_{ij} di C si considera la riga i - esima di A e la colonna j - esima di B, si eseguono i prodotti dei termini corrispondenti e si sommano i prodotti così ottenuti.

$$\dots A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1j} & \dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2j} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & \dots\dots a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots b_{1j} & \dots\dots b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots b_{2j} & \dots b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & \dots b_{iq} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots b_{nj} & \dots b_{nq} \end{pmatrix} =$$

$$\dots \qquad = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & \dots c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ \dots & \dots & \dots c_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mq} \end{pmatrix}$$

Per questo il prodotto di matrici prende il nome di prodotto righe per colonne.
Si vede facilmente che il prodotto $A \times B = C$ è del tipo (*m, q*). Infatti, poiché il generico elemento c_{ij} si ottiene dalla i - esima riga di A e dalla j - esima colonna di B, e poiché $A \in K^{m,n}$ e $B \in K^{p,q}$ $con\ n = p$, allora i può assumere soltanto i valori 1,.....,m mentre j può assumere solo i valori 1,......,q , per cui la matrice $A \times B = C$ ha tante righe quante ne ha e tante colonne quante ne ha B.

Esempio 1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in K^{3,2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in K^{3,2}$$

$$A \times B = C \in K^{2,2} \quad C = \left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2\times 1 + 0\times 0 + 1\times 2 & 2\times(-1) + 0\times 1 + 1\times(-1) \\ 1\times 1 + (-1)\times 0 + 3\times 2 & 1\times(-1) + (-1)\times 3 + 3\times(-1) \end{pmatrix}$$

Avremo pertanto

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$$

Esempio 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1+4 \\ 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Proprietà del prodotto di matrici

Il prodotto di matrici gode delle seguenti proprietà

Sia $A \in K^{m,n}$, $B \in K^{n,p}$, $C \in K^{p,q}$ allora risulta

$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

Se A e B sono matrici del tipo (*m*, *n*) e C è una matrice del tipo (*n*, *p*) allora

$(A + B)\,C = AC + BC$ (proprietà distributiva a sinistra)

Se invece A è una matrice $m \times n$ e B e C sono matrici $n \times p$ allora

$A(B + C) = AB + AC$ (proprietà distributiva a destra)

Dunque, il prodotto righe per colonne gode della proprietà associativa (1) e della proprietà distributiva rispettivamente a sinistra e a destra rispetto alla somma.

Si ha inoltre

se $A \in K^{m,n}$ e $B \in K^{n,p}$ ed è $\alpha \in \mathbf{R}$ allora

$\alpha\,(AB) = (\alpha\,A)B = A(\alpha\,B)$

Il prodotto di matrici non è commutativo, per cui se $A \in K^{m,n}$ e $B \in K^{n,m}$ sono definite entrambe le matrici prodotto $A \times B = C \in K^{m,m}$ e $B \times A = C' \in K^{n,n}$, in generale risulta

$C = A \times B \neq B \times A = C'$.

Ciò è valido se si considerano matrici quadrate.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{2,2}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in K^{2,2}$

$A \times B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B \times A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$ quindi $A \times B \neq B \times A$

Altre proprietà algebriche delle operazioni matriciali

Se A è una matrice e c è un elemento del campo K su cui si opera, cioè

$A \in K^{m,n}$ e $c \in K \Rightarrow {}^t(cA) = c\ {}^tA$ $\begin{cases} t: K^{m,n} \longrightarrow K^{n,m} \\ A \longrightarrow {}^tA \end{cases}$

Se A e B sono matrici $m \times n$ allora

${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

Se $A \in K^{m,n}$ allora ${}^t({}^tA)) = A$

Se A è una matrice $m \times n$ e B è una matrice $n \times p$ allora risulta

${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$

Quindi avremo : La trasposta del prodotto di due matrici si ottiene moltiplicando le trasposte delle matrici in ordine inverso.

Determinanti

Sia data la matrice quadrata

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & \ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Chiamiamo determinante di A il numero det A o $|A|$ che ad essa viene associato.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & \ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Un generico elemento a_{ij} del determinante si dice di **classe** pari o dispari a seconda che $i + j$ è un numero pari o dispari.

Si chiama **minore complementare** dell'elemento a_{ij} il determinante che si ottiene da $|A|$, sopprimendo la i - esima riga e la j - esima colonna.

Si definisce complemento algebrico dell'elemento a_{ij} e si indica con A_{ij} il minore complementare di a_{ij} preceduto dal segno + o dal segno - a seconda che tale elemento è di classe pari o dispari.

1° teorema di Laplace

Il valore di A si ottiene facendo la somma dei prodotti degli elementi di una linea per i rispettivi complementi algebrici.

Esempio :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Se la linea scelta è la prima riga si avrà

$$\det A = +(+1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (+2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (+3)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 2(-1-10) + 3(-15) = -20$$

Poiché la matrice è del terzo ordine, possiamo giungere allo stesso risultato mediante la regola di Sarrus che prevede la ripetizione delle prime due colonne accanto a quelle date; ossia :

$$\det A = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{matrix}$$

Sottraendo poi alla somma dei prodotti dei termini della diagonale principale e delle sue parallele la somma dei prodotti dei termini della diagonale secondaria e delle sue parallele si ha :

$$(1\cdot 3\cdot 1) + (2\cdot 2\cdot 5) + (3\cdot(-1)\cdot 0) - (3\cdot 3\cdot 5) - (1\cdot 2\cdot 0) - (2\cdot(-1)\cdot 1) = -20$$

Proprietà dei determinanti

- Se gli elementi di una linea sono tutti nulli, il determinante è nullo.
- Se scambiamo tra loro due linee parallele il determinante cambia segno.
- Se gli elementi di due linee parallele sono uguali o proporzionali, il determinante è nullo.
- Se gli elementi di una linea vengono moltiplicati per uno stesso numero k, il determinante viene moltiplicato per k.
- Due matrici quadrate trasposte hanno lo stesso determinante.
- Se si moltiplicano gli elementi di una linea per i complementi algebrici di una linea parallela, il determinante è nullo(2° teorema di Laplace)

- Se gli elementi di una linea sono la somma di due o più addendi, il determinante è uguale alla somma dei due o più determinanti che si ottengono disponendo in essi i vari addendi.
- Il determinante non cambia se si aggiunge agli elementi di una linea gli elementi corrispondenti di un'altra linea ad essa parallela moltiplicati per un numero k.
- Date due matrici quadrate dello stesso ordine, il determinante della matrice prodotto è uguale al prodotto dei determinanti delle matrici date.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 15 \qquad \det B = -4 \qquad \det(A \cdot B) = -60 \quad \Leftrightarrow \quad \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Matrice inversa

Data la matrice A, non singolare (det A $\neq 0$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

consideriamo la sua trasposta

$$^{t}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Dopo aver calcolato i complementi algebrici degli elementi a_{ij} di tale matrice, potremo scrivere la matrice inversa A^{-1} data da :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Esempio

Data la matrice quadrata

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Essendo det A = 13 $\neq 0$ la matrice è invertibile.
Per determinare la sua inversa scambiamo dapprima le righe con le colonne

$${}^{t}A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo poi i complementi algebrici degli elementi di ${}^{t}A$
$A_{11} = 5 \quad A_{12} = -3 \quad A_{21} = 1 \quad A_{22} = 2$.
Avremo quindi

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Volendo scrivere la matrice inversa, possiamo anche considerare la matrice aggiunta, che ha come elementi della colonna i - esima i complementi algebrici della riga i - esima.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

la matrice aggiunta sarà :

$$\text{agg } A = \begin{pmatrix} -68 & -15 & 16 \\ -40 & 15 & 5 \\ 12 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

La matrice inversa di A è data anche da :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{agg A} \qquad \text{con } \det A \neq 0$$

Se det A = 0 la matrice si dice singolare e non è invertibile.

Equazioni matriciali

Siano A e B due matrici quadrate dello stesso ordine. Se A è invertibile, le equazioni
$A \cdot X = B \qquad Z \cdot A = B$

avranno rispettivamente come soluzioni

$X = A^{-1} \cdot B \qquad Z = B \cdot A^{-1}$

Esempio

Ricavare la matrice incognita X, nella seguente equazione, facendo poi la verifica

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Essendo det A $\neq 0$ e

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice incognita sarà :

$$X = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Verifica :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{8}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

L'introduzione della matrice inversa si rende necessaria per poter dividere due matrici e risolvere i sistemi lineari di n equazioni in n incognite con il metodo della matrice inversa Si perviene così alla regola di Cramer di cui si discuterà in seguito.

Definizione - Una matrice quadrata A di ordine n si dice ortogonale se la sua inversa coincide con la sua trasposta, cioè se risulta

$A^{-1} = {}^{t}A$.

Rango o caratteristica di una matrice

Consideriamo una matrice di m righe ed n colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sia $p \in \mathbb{N}$ con $p < n, m$ e fissiamo p righe e p colonne. Gli elementi che stanno all'incrocio delle p righe e p colonne individuano una matrice quadrata di ordine p che prende il nome di sottomatrice di A.
Chiamiamo minore di ordine p il determinante di questa sottomatrice.
Definizione Dicesi minore di ordine p estratto dalla matrice A un qualsiasi determinante di ordine p che si ottiene con gli elementi comuni a p righe ed a p colonne della matrice A.

Sia A una matrice di m righe ed n colonne , si definisce rango o caratteristica di A l'ordine massimo dei minori non nulli che si possono estrarre da essa.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} \qquad \det A = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

poiché l'ordine del minore non nullo è 2, il rango di A è 2.

Osservazioni
Se ad una linea di una matrice A si aggiunge una combinazione lineare delle altre linee parallele, la nuova matrice B ha lo stesso rango di A
Se la matrice B si ottiene da A sopprimendo o aggiungendo in questa una linea che sia combinazione lineare delle altre linee parallele le due matrici hanno lo stesso rango.

Teorema - Le righe di una matrice sono tra loro linearmente dipendenti se e solo se il loro numero è maggiore del rango della matrice.

Teorema fondamentale - Il rango di una matrice rappresenta il massimo numero di linee parallele linearmente indipendenti della matrice.

Teorema di Kronecher Se una matrice A possiede un minore M ,non nullo, di ordine k e se sono nulli tutti i minori di ordine k+1 , ottenuti orlando M con una riga e una colonna qualsiasi di A, allora il rango della matrice A è uguale a k.

Esercizi

Determinare il rango della matrice per ogni valore del parametro

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo innanzitutto i valori del parametro che annullano il determinante della matrice :

$$\det A = \begin{vmatrix} k & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & k & 2 \end{vmatrix} \qquad k^2 + 3k - 4 = 0 \text{ da cui} \qquad k = 1, \quad k = -4$$

Per $k \neq 1 \; e \; k \neq -4$ la matrice ha rango 3.
Per $k = 1$ si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ed essendo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

la matrice ha rango 2.
Allo stesso modo, si dimostra che per k = - 4 la matrice ha rango 2.