IL NUMERO e DI NEPER

Consideriamo la funzione:

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

e dimostriamo che il limite

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

è compreso fra 2 e 3.

Dimostriamo che il limite esiste per valori interi positivi. Per $x=n$, applicando la formula del binomio di Newton avremo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+....+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+....+\frac{n(n-1)(n-2)...\big(n-(n-1)\big)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}=\quad(1)$$

Essendo

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}=\frac{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}}{3!}=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}$$

la (1) diviene

$$=2+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+...+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{3!}\qquad(2)$$

Osserviamo che per $n>1$ tutti i termini dello sviluppo sono positivi e, a partire dal secondo, crescono al variare di n, perché le frazioni $\frac{1}{n},\frac{2}{n},....,$ diminuiscono di valore e quindi aumenta il numeratore dei corrispondenti termini dello sviluppo. Quindi la funzione

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

al crescere di n è una funzione crescente ed ammette limite per $n\to+\infty$.

Questo limite è un numero compreso tra 2 e 3.

Infatti si ha

$$1-\frac{1}{n}<1,\ 1-\frac{2}{n}<1,\ \ldots.,\ 1-\frac{n}{n-1}<1$$

e quindi per le (1) e (2) avremo

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

essendo inoltre

$$2!=2,\quad 3!=2\cdot 3>2^{2},\quad 4!=2\cdot 3\cdot 4>2^{3},\cdots,\quad n!=2\cdot 3\cdots n>2^{n-1}$$

risulta

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2^{3}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

Il secondo membro, dopo il primo termine, è una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{2}$

(La somma di n termini in una progressione geometrica di ragione q è data dalla formula

$$S_{n}=a_{1}\frac{1-q^{n}}{1-q}$$

nel nostro caso $a_{1}=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$ ed $n-1$ il numero dei termini).

Avremo quindi:

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2^{3}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

e quindi:

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<2+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Pertanto avremo

$$2<\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\leq 3$$

Poniamo

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

Per $x\to\infty$ la funzione f(x) ha ancora per limite il numero e. Infatti qualunque sia x positivo, vi sarà sempre un numero n tale che

$$n\leq x<n+1 \qquad (3)$$

in modo che n risulta una funzione di x e per $x\to+\infty$, si ha pure $n\to+\infty$.

Dalla (3), passando ai reciproci e aggiungendo 1 a tutti i membri otteniamo:

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leq 1+\frac{1}{n}$$

e quindi:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Essendo:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = e$$

risulta, per il teorema dei due carabinieri

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Se x tende all'infinito per valori negativi, poniamo $x=-t$ e quindi

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\right] = e\cdot 1 = e$$

Il numero così ottenuto viene chiamato ***numero di Neper*** e si indica con la lettera ***e***. Esso è un numero irrazionale e il suo valore approssimato per difetto è:

2,71828182845………