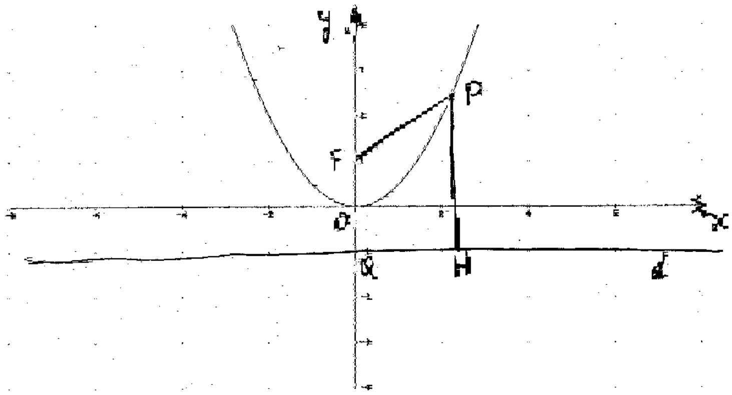
La Parabola

Sia F un punto del piano π e sia d una retta non passante per il punto F.
Si dice parabola di fuoco F e direttrice d il luogo geometrico dei punti del piano π equidistanti dal fuoco F e dalla direttrice d.



Assumiamo come asse y la retta FQ passante per F e perpendicolare alla retta d, e come asse x la retta perpendicolare a QF e passante per il punto medio.
Indichiamo inoltre $d(Q,F)=2k$
Le coordinate del fuoco saranno: $F(0;k)$.
Sia P un punto generico appartenente alla parabola ed H la sua proiezione sulla direttrice d. Si ha

$P(x;y)$ ed $H(x;-k)$

Dalla definizione di parabola possiamo scrivere

$$d(F,P)=d(H,P)$$

essendo

$$d(F,P)=\sqrt{x^2+(y-k)^2}$$

$$d(H,P)=|y+k|$$

otteniamo

$$\sqrt{x^2+(y-k)^2}=|y+k|$$

Elevando al quadrato avremo:

$$x^2+y^2-2ky+k^2=y^2+2ky+k^2$$

e quindi

$$y=\frac{1}{4k}x^2$$

posto $a=\frac{1}{4k}$ otteniamo

$$y=ax^2 \qquad (0.1)$$

Inoltre $k = \frac{1}{4a}$

La (1.1) è pertanto l'equazione della parabola avente:

fuoco $F\left(0;\frac{1}{4a}\right)$; direttrice $y = -\frac{1}{4a}$; asse $x = 0$; vertice $V(0;0)$.

(Il vertice è il punto di incontro della parabola con il suo asse)

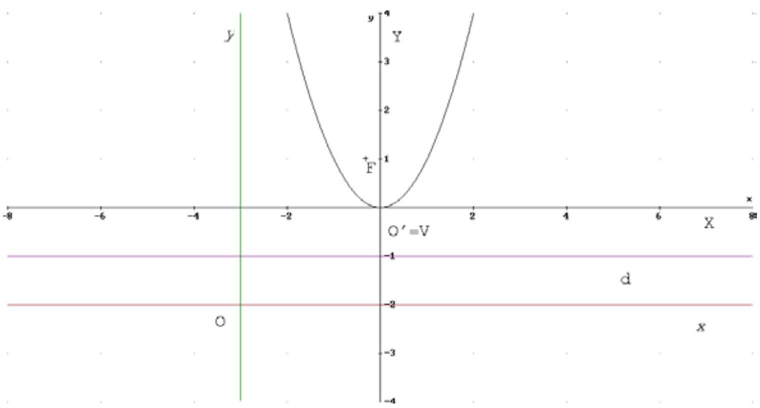
Inoltre se $a > 0$ la parabola volge la concavità verso l'alto, se $a < 0$ volge la concavità verso il basso.

Equazione generica della parabola con asse parallelo all'asse y

Determiniamo l'equazione della parabola γ nel caso generale in cui il fuoco è un punto qualunque del piano e la direttrice è una qualsiasi retta parallela all'asse *x*.

Sia O*xy* un riferimento cartesiano ortogonale, F il fuoco, d la direttrice e $V \neq O$ il vertice.

Sia O'XY un riferimento cartesiano ottenuto mediante una traslazione di assi in cui $O' \equiv V$.



L'equazione della parabola rispetto al riferimento O'XY sarà

$$Y = aX^2 \tag{1.2}$$

dove:

$F\left(0;\frac{1}{4a}\right)$ d: $Y = -\frac{1}{4a}$ asse $X = 0$

Siano inoltre α e β le coordinate di O' rispetto ad O.

Dalle formule di traslazione

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases} \quad \text{ricaviamo} \quad \begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$$

Sostituendo nella (1.2) otteniamo

$y - \beta = a(x - \alpha)^2$ e quindi

$$y = a\left(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2\right) + \beta$$

$$y = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta$$

ponendo

$-2a\alpha = b$ e $a\alpha^2 + \beta = c$

otteniamo

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

che è l'equazione della parabola.
Avremo anche

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \beta = c - a\frac{b^2}{4a^2} = c - \frac{b^2}{4a} \qquad \beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Essendo $V(\alpha;\beta)$ otteniamo

$$V\left(-\frac{b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

Dalle formule di traslazione:

$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$ e tenendo presente che $F\left(0;\frac{1}{4a}\right)$ avremo

$$x = X + \alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$y = Y + \beta = \frac{1}{4a} + \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{1+4ac-b^2}{4a}$$

e quindi

$$F\left(-\frac{b}{2a};\frac{1+4ac-b^2}{4a}\right)$$

In modo analogo ricaviamo l'equazione della ,direttrice

$$d: y = -\frac{1}{4a}$$

$$y = -\frac{1}{4a} + \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{-1+4ac-b^2}{4a}$$

L'asse avrà equazione

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Se $a > 0$ la parabola volge la concavità verso l'alto; se $a < 0$ la parabola voge la concavità verso il basso.

In modo analogo al precedente, od anche considerando la curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante $y = x$, otteniamo dalla (1.1)

$$\boxed{x = ay^2}$$

avente per asse di simmetria l'asse x; il fuoco $F\left(\frac{1}{4a};0\right)$ e la direttrice $d: x = -\frac{1}{4a}$.

Dalla (1.2) otteniamo

$$\boxed{x = ay^2 + by + c}$$

dove:

l'asse ha equazione $y = -\frac{b}{2a}$

Il fuoco $F\left(\frac{1+4ac-b^2}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$

Il vertice $F\left(\frac{4ac-b^2}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$

La direttrice d: $x = -\frac{1}{4a} + \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{-1+4ac-b^2}{4a}$