

IL POTENZIALE ELETTROSTATICO CASO DEL CAMPO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME

Se vogliamo conoscere il lavoro fatto dalla forza \vec{F} quando la carica q si sposta di un tratto $d\vec{l}$, basterà calcolare il lavoro fatto dal campo \vec{E}_0 su di una carica unitaria che si sposta dello stesso tratto $d\vec{l}$ e poi moltiplicare questo lavoro per q .

Per la definizione di lavoro questa grandezza si ottiene facendo il prodotto scalare della forza per lo spostamento. Nel caso in cui la carica considerata sia unitaria si ha:

$$dW = \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1)$$

Se invece di uno spostamento infinitesimo $d\vec{l}$ consideriamo uno spostamento finito lungo la linea l , a partire da un punto P_1 fino ad un punto P_2 bisogna integrare la (1) lungo tale linea da P_1 a P_2 , cioè

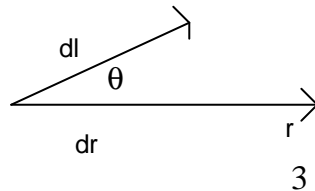
$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}$$

Consideriamo adesso il caso in cui il campo elettrico sia dovuto ad una sola carica puntiforme Q . In questo (caso essendo

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

dove è evidente che il rapporto $\frac{\vec{r}}{r}$ del vettore \vec{r} al suo modulo, altro non è che il versore di \vec{r}) avremo:

$$dW = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{l}}{r}$$



essendo $\vec{r} \cdot d\vec{l} = r dl \cos\theta = r dr$ (uguale al prodotto del modulo di r per la componente di dl nella direzione di r , ossia dr). Si ha:

$$dW = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} r dr \quad (2)$$

Per ottenere il lavoro fatto dal campo elettrico quando la carica unitaria si sposta lungo una linea l che va da un punto P_1 , a distanza r_1 , ad un punto P_2 a distanza r_2 dalla carica puntiforme Q . Si ha:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P_1}^{P_2} \frac{Q dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{P_1}^{P_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2} \right) = V_0(r_1) - V_0(r_2)$$

dove

$$V_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \text{costante} \quad (3)$$

è l'integrale indefinito, cambiato di segno della (2) e dove si ha:

$$|\vec{E}_0| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = -\frac{dV_0}{dr}$$

La funzione V_0 così definita prende il nome di Potenziale elettrostatico. La conoscenza di tale grandezza scalare permette di calcolare il lavoro fatto dal campo elettrico quando la carica unitaria si sposta da un punto P_1 ad un punto P_2 , facendo la differenza $V_0(P_1) - V_0(P_2)$ dei valori del potenziale nei due punti.

La costante arbitraria che compare nella (3) non dà alcun disturbo quando si tratta di un problema concreto, in quanto per il calcolo del lavoro lungo una linea perché interviene la differenza dei valori del potenziale agli estremi della linea e pertanto la costante scompare.

Per semplicità converremo di eguagliare a zero tale costante, per cui si ha che il potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme è dato da:

$$V_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Per $r \rightarrow \infty$ il potenziale si annulla, per cui possiamo dire che il lavoro fatto dal campo elettrico \vec{E}_0 quando la carica unitaria si sposta da un punto P in cui il potenziale ha valore $V_0(r)$ fino all'infinito (dove il potenziale è nullo) è uguale a

$$V_0(r) - V_0(\infty) = V_0(r)$$

ossia è dato dal valore del potenziale nel punto P considerato.

Se invece di spostare una carica unitaria spostiamo una carica q da un punto P_1 ad un punto P_2 il lavoro fatto dalla forza $\vec{F} = \vec{E}_0 q$ sarà:

$$W = q[V_0(r_1) - V_0(r_2)] \quad \text{joule}$$

dalla quale si ha

$$V_0(r_1) - V_0(r_2) = \frac{W}{q} \quad \text{Volt} \quad \text{dove}$$

$$1 \text{ Volt} = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ Coulomb}}$$

Essendo 1 Joule = 1 Newton x 1 metro si ha:

$$1 \text{ Volt} = (1 \text{ Newton} \times 1 \text{ metro}) / 1 \text{ Coulomb.}$$

Sia W che $V_B - V_A$ sono indipendenti dal cammino seguito nel muovere la carica di prova da A a B e questa indipendenza del lavoro dal cammino percorso è una proprietà di tutti i campi conservativi. Se così non fosse il punto B non avrebbe un unico potenziale elettrico (rispetto al punto A definito come posizione di riferimento) ed il concetto di potenziale avrebbe una utilità limitata.

Il luogo dei punti aventi lo stesso potenziale viene chiamato superficie equipotenziale.

Per muovere una carica di prova fra due punti qualsiasi di una superficie equipotenziale non è necessario compiere alcun lavoro, infatti

$$V_B - V_A = \frac{W}{q}$$

Essendo $V_B = V_A$, W deve essere nullo. Ciò continua ad essere vero, a causa dell'indipendenza dal percorso della differenza di potenziale, anche se la traiettoria che connette A e B non giace interamente sulla superficie equipotenziale.