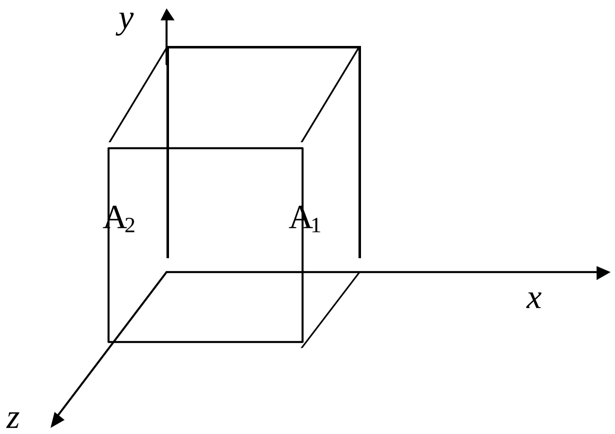
CALCOLO CINETICO DELLA PRESSIONE

Per semplificare il problema, consideriamo un gas ideale costituito da N molecole, contenuto in un recipiente a forma cubica le cui pareti siano perfettamente elastiche, avente il lato di lunghezza *l*. Indichiamo con A_1 e A_2 le facce normali all'asse x.



Consideriamo una generica molecola avente velocità $\underline{v}$. Siano v_x v_y v_z le componenti della velocità lungo gli assi di riferimento. Se questa particella urta con la faccia A_1 , la componente della velocità lungo l'asse *x* cambia segno pur rimanendo uguale in direzione e modulo, non vi sarà alcun effetto su v_y e v_z .
La variazione della quantità di moto della particella sarà :

$$\Delta p = \Delta mv = p_f - p_i = -mv_x - (mv_x) = -2mv_x \qquad (1)$$

Essendo il moto delle molecole rettilineo uniforme, l'intervallo di tempo che intercorre fra due urti successivi della stessa particella sulla stessa faccia A_1 , supposto che non vi siano collisioni con le altre particelle durante il percorso, sarà dato da : (essendo $v_x = \frac{2l}{\Delta t}$)

$$\Delta t = \frac{2l}{v_x}$$

Dalla seconda legge della dinamica, scritta nella forma

$$F = \frac{\Delta mv}{\Delta t} \qquad (2)$$

avremo, tenendo conto della (1)

$$F = -\frac{2mv_x}{\frac{2l}{v_x}}$$

$$F = -\frac{mv_x^2}{l}$$

Poiché la forza con cui la molecola agisce sulla parete è opposta, avremo

$$F=\frac{mv_x^2}{l}$$

La pressione esercitata dalla molecola sulla parete per ogni urto sarà

$$p_{1x}=\frac{F}{S}=\frac{F}{l^2}$$

Avremo quindi

$$p_{1x}=\frac{mv_x^2}{l}\cdot\frac{1}{l^2}$$

$$p_{1x}=\frac{mv_x^2}{l^3}$$

Essendo il gas costituito da N molecole, ciascuna delle quali si muove con velocità $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots\ldots, \vec{v}_N$, avremo se m è la massa di ciascuna molecola

$$p_{ix}=p_{1x}+p_{2x}+\ldots.+p_{Nx}=\frac{m}{l^3}\left(v_{1x}^2+v_{2x}^2+\ldots.+v_{Nx}^2\right)$$

dove

$$v_{1x}+v_{2x}+\ldots.+v_{Nx}$$

sono le componenti lungo l'asse x delle velocità delle singole particelle. Essendo N il numero delle molecole avremo :

$$p_x=\frac{mN}{l^3}\left(\frac{v_{1x}^2+v_{2x}^2+\ldots.+v_{Nx}^2}{N}\right)$$

Essendo m N la massa totale delle molecole e $\frac{v_{1x}^2+v_{2x}^2+\ldots.+v_{Nx}^2}{N}$ il valore medio di v_x^2 per tutte le particelle del recipiente, indicando con $\langle v_x\rangle$ questo valore medio avremo :

$$p_x=\frac{mN}{l^3}\langle v_x^2\rangle$$

Per una particella si ha $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$. Poiché si ha un grandissimo numero di particelle, esse si muovono completamente a caso, i valori medi v_x^2, v_y^2, v_z^2 saranno uguali. Il valore di ciascuna è perciò esattamente un terzo del valore medio di v^2, quindi

$$\langle v_x^2\rangle=\langle v_y^2\rangle=\langle v_z^2\rangle$$

Avremo pertanto

$$\langle v_x^2\rangle=\frac{1}{3}\langle v^2\rangle$$

essendo $l^3=V$ avremo :

$$p=\frac{1}{3}\frac{mN}{V}\langle v^2\rangle$$

che si può scrivere

$$p=\frac{1}{3}N\frac{m\langle v^2\rangle}{V} \qquad (3)$$

da cui

$$pV = \frac{2}{3} N\left(\frac{1}{2} m\langle v^2 \rangle\right)$$

Essendo

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m\langle v^2 \rangle$$

avremo

$$pV = \frac{2}{3} N\langle E_c\rangle$$

che è ***l'equazione di Krönig - Clausius.***

Inoltre, essendo $mN = M$, dalla (3) si ha

$$p = \frac{1}{3}\frac{M}{V}\langle v^2 \rangle$$

dove $\frac{M}{V} = r$ e quindi

$$p = \frac{1}{3} r \langle v^2 \rangle$$

detta anche ***equazione di Joule - Clausius***.

La radice quadrata di $\langle v^2 \rangle$ è chiamata velocità quadratica media delle molecole. Si ha :

$$v_{q,m} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3p}{r}}$$

INTERPRETAZIONE CINETICA DELLA TEMPERATURA

Supponiamo di considerare una mole di gas, avremo, dalla legge di stato dei gas si ha :

$$pV = RT$$

Inoltre

$$pV = \frac{2}{3} N\left(\frac{1}{2} m\langle v^2 \rangle\right)$$

per cui otteniamo

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} Nm\langle v^2 \rangle = RT$$

$$\frac{1}{2} Nm\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} RT$$

Ponendo

$$k = \frac{R}{N}$$

otteniamo

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} m\langle v^2 \rangle = kT$$

e quindi essendo

$$pV = \frac{2}{3}N\left(\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle\right)$$

avremo

$$pV = NkT$$

dove k è una costante universale nota come costante di Boltzann.