Progressioni aritmetiche

Successioni di numeri reali

Definizione – Si dice successione di numeri reali (o numerica reale) una funzione

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita nell'insieme dei numeri naturali ed avente valori nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.
Scriviamo quindi:

$$1 \longrightarrow a(1) = a_1$$
$$2 \longrightarrow a(2) = a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$n \longrightarrow a(n) = a_n$$

con $n \in \mathbb{N}$
essa si indica con

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

dove il numero a_n si chiama n-esimo termine (o termine di indice n) della successione.
Le successioni vengono indicate quindi con il simbolo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o semplicemente $\{a_n\}$.

Progressioni aritmetiche

Def. – Si definisce progressione aritmetica una successione di numeri tale che la differenza tra ciascun termine (eccetto il primo, se esiste) e il precedente risulti costante.
La suddetta costante viene chiamata ragione delle progressione aritmetica ed è indicata con la lettera d.
Per indicare una progressione aritmetica si premette ad essa il simbolo $\div$.
Se $d > 0$ la progressione si dice crescente
Se $d < 0$ la progressione si dice decrescente.
Se il numero dei termini è infinito, la progressione si dice illimitata.
Se il numero dei termini è finito, la progressione si dice limitata.
Teorema 1 *– In una progressione aritmetica, un termine qualunque a_n è uguale al primo termine a_1 aumentato del prodotto della ragione d per il numero dei termini che precedono a_n.*
Dim. **-** Sia $\div a_1, a_2, \ldots, a_n$ una progressione aritmetica di ragione d, per definizione di progressione aritmetica si ha.

$$a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_1 + 3d$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Esempio – Calcolare il 13-esimo termine di una progressione aritmetica sapendo che $a_1 = 4$ e che $d = 3$.

Si ha:

$a_{13} = 4 + (13 - 1)3 = 40$

Dal teorema 1 segue il seguente.

Corollario – *La relazione tra due termini qualunque di una progressione aritmetica è* $a_s = a_r + (s - r)d$

Si ha:

$a_r = a_1 + (r - 1)d$ ed inoltre

$a_s = a_1 + (s - 1)d$

Sottraendo membro a membro otteniamo

$a_s - a_r = (s - r)d$

e quindi

$a_s - a_r = (s - r)d$

Def. *Due termini di una progressione aritmetica (limitata) si dicono equidistanti dagli estremi se il numero dei termini che precedono il primo risulta uguale a quello dei termini che seguono il secondo.*

Teorema - *La somma di due termini equidistanti dagli estremi è uguale alla somma degli estremi.*

Abbiamo:

$a_1 = a_2 - d$

$a_n = a_{n-1} + d$

sommando membro a membro otteniamo

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$.

In generale, essendo:

$a_r = a_1 + kd$ ed anche

$a_s = a_n - kd$

sommando membro a membro otteniamo.

$a_r + a_s = a_1 + a_n$

Inserzione di m medi aritmetici tra due numeri dati a e b

Si tratta di determinare $x_1, x_2, ..., x_m$ numeri in modo da formare con a e b la progressione aritmetica $\div a, x_1, x_2, ..., x_m, b$

Risulta evidente che il numero totale dei termini della progressione sarà $m + 2$, basta quindi trovare la ragione d.

Si ha.

$$d = \frac{b - a}{m + 2 - 1} = \frac{b - a}{m + 1}$$

Trovata la ragione d, i termini da inserire si possono calcolare facilmente.

Esempio Inserire 4 medi aritmetici fra 3 e 28

Si ha

$$d = \frac{b-a}{m+1} = \frac{28-3}{4+1} = 5$$

e quindi.

$a_1 = 3 \quad a_2 = 3+5 = 8$ e così via

Si ha la progressione

$\div 3, 8, 13, 18, 23, 28$

Somma di *n* termini consecutivi di una progressione aritmetica

Teorema – *La somma dei termini di una progressione aritmetica limitata è uguale alla semisomma dei termini estremi moltiplicata per il numero dei termini.*

Dim. – Indicando con S_n la somma degli n termini della progressione, si ha

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

Applicando la proprietà commutativa possiamo scrivere

$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1$$

Sommando membro a membro otteniamo:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

poiché le somme tra parentesi sono le somme di termini equidistanti dagli estremi, sono tutte uguali tra loro e per la definizione di prodotto si ha

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

e quindi

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$