Progressioni geometriche

Successioni di numeri reali

Definizione – Si dice successione di numeri reali (o numerica reale) una funzione

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita nell'insieme dei numeri naturali ed avente valori nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.
Scriviamo quindi:

$$1 \longrightarrow a(1) = a_1$$

$$2 \longrightarrow a(2) = a_2$$

………………..

$$n \longrightarrow a(n) = a_n$$

con $n \in \mathbb{N}$
essa si indica con

$$a_1, a_2, ..., a_n$$

dove il numero a_n si chiama n-esimo termine (o termine di indice n) della successione.
Le successioni vengono indicate quindi con il simbolo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o semplicemente $\{a_n\}$.

Progressioni geometriche

Def. – Si definisce progressione geometrica una successione di numeri tale che il quoziente tra ciascun termine (eccetto il primo, se esiste) e il precedente risulti costante.
La suddetta costante viene chiamata ragione delle progressione aritmetica ed è indicata con la lettera q.
Per indicare una progressione aritmetica si premette ad essa il simbolo $\div\div$.

$$\div\div a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

Se $q > 0$ la progressione si dice crescente
Se $0 < q < 1$ la progressione si dice decrescente.
Se il numero dei termini è infinito, la progressione si dice illimitata.
Se il numero dei termini è finito, la progressione si dice limitata.

Teorema 1 – *In una progressione geometrica, un termine qualunque a_n è uguale al primo termine a_1 moltiplicato per la ragione q elevata ad $n-1$.*
Dim. - Sia $a_1, a_2, ..., a_n$ una progressione geometrica di ragione q, per definizione di progressione geometrica si ha.

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_1 q^3$$

……………..

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Dal teorema 1 segue il seguente.

Corollario – *La relazione tra due termini qualunque di una progressione aritmetica è*

$$a_k = a_h q^{k-h}$$

Si ha:

$$a_k = a_1 q^{k-1} \quad \text{ed inoltre}$$

$$a_h = a_1 q^{h-1}$$

Dividendo membro a membro otteniamo

$$\frac{a_k}{a_h} = \frac{\cancel{a_1} q^{k-1}}{\cancel{a_1} q^{h-1}}$$

e quindi

$$\frac{a_k}{a_h} = q^{k-h}$$

$$a_k = a_1 q^{k-h}$$

Def. *Due termini di una progressione geometrica (limitata) si dicono equidistanti dagli estremi se il numero dei termini che precedono il primo risulta uguale a quello dei termini che seguono il secondo.*

Teorema – *Il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è uguale al prodotto degli estremi.*

Siano a_r ed a_s due termini che distano di h termini dagli estremi

Abbiamo:

$$a_1 = \frac{a_r}{q^h}$$

$$a_n = a_s q^h$$

moltiplicando membro a membro otteniamo

$$a_1 a_n = \frac{a_r}{q^h} a_s q^h$$. E quindi

$$a_1 a_n = a_r a_s$$

Prodotto dei primi n termini di una progressione geometrica

Teorema *Il prodotto dei primi n termini di una progressione geometrica è uguale alla radice quadrata del prodotto dei termi9ni estremi elevato ad n.*

$$P_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$$

Si ha

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$ che possiamo scrivere (per la proprietà commutativa)

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot a_2 \cdot a_1$$

moltiplicando membro a membro otteniamo

$$P_n^2 = (a_1 a_n)(a_2 a_{n-1})(a_3 a_{n-2}) \ldots\ldots (a_{n-1} a_2)(a_n a_1)$$

Per la proprietà precedente avremo

$$P_n^2 = (a_1 a_n)(a_1 a_n) \ldots\ldots (a_1 a_n)$$ cioè

$$P_n^2 = (a_1 a_n)^n \qquad \text{e quindi}$$

$$P_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$$

Somma dei primi n termini consecutivi di una progressione geometrica
Teorema – *La somma dei primi n termini di una progressione geometrica è .*

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Si ha:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

moltiplicando e dividendo per $1-q$ avremo

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}}{1-q}(1-q)$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} - a_1 q - a_1 q^2 - a_1 q^3 - .... - a_1 q^{n-1} - a_1 q^n}{1-q}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} \qquad \text{e quindi}$$

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$