SERIE ARMONICA

Dati n numeri non nulli

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

si definisce *__media armonica semplice__* dei numeri dati il reciproco della media aritmetica dei reciproci dei numeri dati. Si ha:

$$m_{ar} = \frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}{n}} = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}$$

Esempio:

Dati i numeri 10, 15, 35, 50, 60, si ha:

$$m_{ar} = \frac{5}{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{35}+\dfrac{1}{50}+\dfrac{1}{60}} = \frac{5}{0,23190} = 21,56$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots +$$

è detta ***__serie armonica__***. Ciò è dovuto al fatto che ogni suo termine è la media armonica del termine che lo precede e del termine che lo segue.

Esempio

$$1 + \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{1}{3}} = \frac{2}{\dfrac{1}{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{\frac{1}{4}}} = \frac{2}{2+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Il termine generale è $\frac{1}{n}$; si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

In base alla condizione necessaria per la convergenza di una serie (corollario del Teorema di Cauchy), la serie risulta convergente; proviamo che essa non lo è.

Supponiamo per assurdo che:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = S$$

ne segue che:

$$\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = S - S = 0$$

quindi

$$S_{2n} - S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

si ha anche:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \left(\text{poiché se } 2\text{n}>\text{n}+1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\text{n}} < \frac{1}{n+1}\right)$$

essendo

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$$

Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_{2n} - S_n\right) > \frac{1}{2}$$

e quindi non può essere

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_{2n} - S_n\right) = 0$$

pertanto la serie armonica non può essere convergente. Essendo la serie armonica una serie a termini positivi, sarà divergente a $+\infty$