SERIE GEOMETRICA

Una serie nella quale i suoi termini sono in progressione geometrica prende il nome di serie geometrica. La sua forma è del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^n + ...$$

dove a è una costante diversa da zero e q la ragione della serie. Il carattere della serie dipende pertanto dal valore assunto dalla ragione q. Si hanno i seguenti casi:

1) $|q| < 1$ cioè $-1 < q < 1$ (la serie geometrica è convergente)

2) $q = 1$ la serie è divergente

3) $|q| > 1|$ e quindi si ha $q < -1$ o $q > 1$

Distinguiamo due sottocasi:

a) $q > 1$ la serie è divergente
b) $q < -1$ la serie è indeterminata od oscillante

4) $q = -1$ la serie è indeterminata

Analizziamo nel dettaglio i vari casi

1° CASO $|q| < 1$

Se $|q| < 1$ la ridotta n-esima sarà:

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^n + ...$$

che rappresenta la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione q. Si ha quindi:

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

avremo:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n\to+\infty} a\left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right)$$

essendo

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

avremo

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$$

pertanto la serie geometrica di ragione $|q|<1$ è convergente ed ha per somma:

$$S = \frac{a}{1-q}$$

2° CASO $q=1$

Per $q=1$ la serie diviene:

$$a+a+a+\ldots+a+\ldots$$

Si ha:

$$S_n = na$$

inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} na = \pm\infty \quad \begin{cases} +\infty & \text{se a > 0} \\ -\infty & \text{se a < 0} \end{cases}$$

la serie risulta quindi divergente.

3° CASO $|q|>1$

a) $q>1$

La ridotta n-esima sarà:

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q} = a\frac{q^n-1}{q-1}$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a\frac{q^n-1}{q-1} = \infty \quad \begin{cases} +\infty & \text{se a > 0} \\ -\infty & \text{se a < 0} \end{cases}$$

b) $q<-1$

La ridotta n-esima sarà:

$$S_n = a\frac{q^n-1}{q-1} = a\left(\frac{q^n}{q-1} - \frac{1}{q-1}\right)$$

poiché $\lim_{x \to +\infty} q^n$ non esiste in quanto è divergente all'infinito con valori alternativamente positivi e negativi delle somme parziali a seconda se n è dispari o pari.

4° CASO $q = -1$

In questo caso la serie diviene:

$$a - a + a - a + ... + (+1)^{n-1} a$$

e si ha

$$S_1 = a$$
$$S_2 = 0$$
$$S_3 = a$$
$$S_4 = 0$$
$$etc.$$

ed è pertanto indeterminata