Sistemi di equazioni lineari

Consideriamo un sistema di m equazioni lineari ad n incognite del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Se i termini b_i sono tutti nulli, il sistema si dice omogeneo, se almeno uno di essi è diverso da zero si dice non omogeneo.
Il sistema si dice compatibile se ammette almeno una soluzione, incompatibile nel caso opposto.
Un sistema compatibile si dice determinato quando possiede una sola soluzione ; nel caso contrario si dice indeterminato.
Se il sistema (1) è formato da n equazioni lineari in n incognite possiamo considerare il seguente

Teorema di Cramer - Se il determinante D del sistema (1) è diverso da zero, il sistema ammette una ed una sola soluzione data da :
$x_i = \dfrac{D_i}{D}$ dove D_i è il determinante che si ottiene da D sostituendo alla i - esima colonna quella dei termini noti.

Osservazione - Se D = 0 il sistema non ha un'unica soluzione. Esso risulta impossibile oppure possibile, ma indeterminato, come vedremo in seguito.

Teorema di Rouché - Capelli

Consideriamo un sistema di m equazioni lineari in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

e siano

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

rispettivamente la matrice incompleta e la matrice completa del sistema del sistema.

Si può dimostrare che vale il seguente

Teorema - Dato un sistema di m equazioni lineari in n incognite, diciamo che questo ammette una o più soluzioni quando la matrice del sistema e la matrice completa hanno lo stesso rango.

In tali condizioni possiamo seguire la seguente regola :

Se il rango della matrice del sistema è k ed il numero delle incognite è n (n > k), il sistema ammette ∞^{n-k} soluzioni.

Tali soluzioni si ottengono considerando k delle m equazioni in k incognite. La scelta delle k equazioni non è però arbitraria, ma deve essere fatta in modo che il determinante dei coefficienti di queste equazioni sia diverso da zero.

Se k = n il sistema ammette una sola soluzione.

Esempi :

1) Risolvere il sistema :

$$\begin{cases} 3x - y + 6z = 1 \\ 6x + 3y + 10z = 3 \end{cases}$$

Poiché ciascuna delle due matrici incompleta e completa :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, è verificata la condizione espressa dal teorema di Rouchè-Capelli, il sistema ammette ∞^{3-2} soluzioni.

Per determinarle consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 1 - 6z \\ 6x + 3y = 3 - 10z \end{cases}$$

che risolto con il metodo di Cramer dà :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-6z & -1 \\ 3-10z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{6-28z}{15} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-6z \\ 6 & 3-10z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3+6z}{15} \qquad z = z$$

dove z assume infiniti valori.

Se la matrice incompleta e la matrice completa non hanno lo stesso rango, il sistema è impossibile o incompatibile.

Sistemi lineari omogenei

Consideriamo un sistema lineare omogeneo, cioè del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Il sistema non è mai impossibile, esso ammette sempre la soluzione nulla che è detta soluzione banale.
Se il rango della matrice incompleta è uguale al numero delle incognite, il sistema, per il teorema di Cramer ammette una sola soluzione, la soluzione nulla.
Se il rango della matrice incompleta è minore del numero delle incognite, il sistema ammette soluzioni non nulle e precisamente ∞^{n-k}.
In particolare, se il sistema lineare omogeneo è formato da n equazioni in n incognite, esso ammette soluzioni non nulle se il determinante della matrice incompleta è nullo.
Un sistema lineare omogeneo in cui il numero delle equazioni è minore del numero delle incognite ammette sempre infinite soluzioni non nulle.

Caso particolare

Consideriamo il caso in cui il rango della matrice del sistema lineare omogeneo è n - 1. In tali condizioni esistono sicuramente n - 1 equazioni linearmente indipendenti, mentre n equazioni del sistema, quando esistono, sono sempre dipendenti.
Supponendo che le prime n - 1 equazioni del sistema siano linearmente indipendenti, consideriamo il sistema seguente

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-11}x_1 + a_{n-12}x_2 + \ldots\ldots + a_{n-1n}x_n = 0 \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots\ldots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

dove è stata posta come ultima riga un'altra equazione, se esiste, del sistema dato o l'equazione $0x_1 + 0x_2 + \ldots\ldots + 0x_n = 0$. Abbiamo così creato un sistema di n equazioni in n incognite dove i complementi algebrici degli elementi dell'ultima riga non sono nulli.
Se $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots + a_{in}x_n = 0$ è un'equazione del sistema, risulta

$$a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \ldots\ldots + a_{in}A_{sn} = 0$$

per il 2° teorema di Laplace.

Poiché $A_{s1}, A_{s2}, \ldots\ldots, A_{sn}$ verificano le n - 1 equazioni linearmente indipendenti, rappresentano una soluzione del sistema.
Se c è un numero qualunque, anche $cA_{s1}, cA_{s2}, \ldots\ldots, cA_{sn}$ sono soluzioni del sistema.
Dalle considerazioni fatte, scaturisce il seguente teorema

Teorema - Un sistema lineare omogeneo in n incognite la cui matrice incompleta ha rango n - 1 ammette ∞^1 soluzioni.
Tali soluzioni risultano proporzionali ai minori di ordine n - 1 ottenuti dalla matrice delle incognite di n - 1 equazioni indipendenti del sistema, sopprimendo, ordinatamente, le colonne prima, seconda, terza, ... n - esima, presi con segni alternati.
Esempio :
Consideriamo il sistema :

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 7x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

Essendo $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 7 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ le equazioni sono , linearmente dipendenti. Poiché A_{11}= 1, le ultime due equazioni sono indipendenti, pertanto il sistema si riduce a

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 7x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

e i minori che si ottengono sopprimendo la prima, la seconda, la terza colonna sono :
$M_1 = 1 \quad M_2 = -5 \quad M_3 = 13$. La soluzione generale del sistema è
x = c y = -(-5)c =5c z = 13 c.