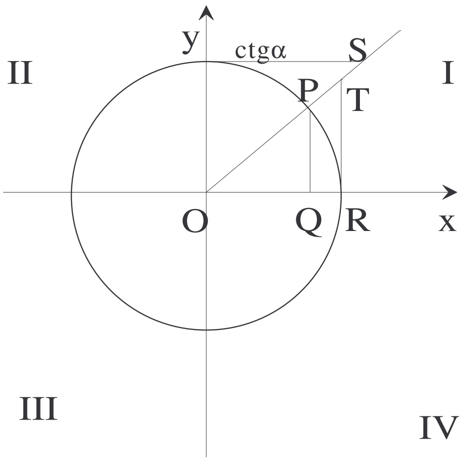
Circonferenza goniometrica

Consideriamo una circonferenza orientata avente centro in O e raggio unitario riferita ad un piano cartesiano Oxy. Una circonferenza così definita viene detta circonferenza goniometrica.



Consideriamo un arco RP sulla circonferenza che individua un angolo α
Definiamo seno dell'angolo α il rapporto tra il segmento QP e il raggio OP

$$\sin\alpha = \frac{\vec{QP}}{\overline{OP}} = \frac{\vec{QP}}{1} = \vec{QP}$$

Definiamo, in modo analogo, coseno di α il rapporto fra il segmento OQ e il raggio OP

$$\cos\alpha = \frac{\vec{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\vec{OQ}}{1} = \vec{OQ}$$

(Poiché le funzioni goniometriche di un angolo o arco aventi la stessa ampiezza, hanno il medesimo valore, parleremo indifferentemente di angolo o di arco)
Consideriamo adesso la retta tangente alla circonferenza in R e indichiamo con T il punto in cui la retta OP incontra la tangente.
Definiamo tangente di α il rapporto fra i segmenti RT ed OR

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{RT}{OR}$$

Dai triangoli rettangoli simili ORT e OQP avremo

$$\frac{RT}{OR} = \frac{QP}{OQ}$$ e quindi

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{QP}{OQ} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Analogamente avremo

$$c\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{CS}{OC} = \frac{OQ}{QP} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Definiamo inoltre

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Da quanto detto si evince che le funzioni goniometriche aventi lo stesso estremo P hanno lo stesso valore, per cui le funzioni goniometriche sono funzioni periodiche. Avremo:

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$$

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg}\alpha$$

In particolare avremo

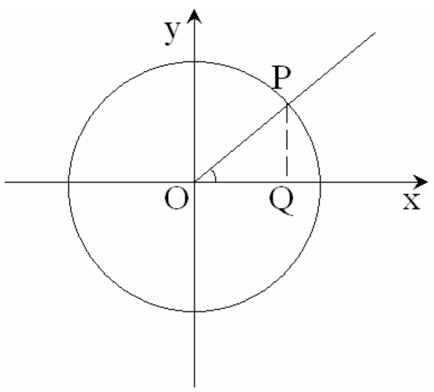
$$\sin 0 = 0 \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad \sin\pi = 0 \quad \sin\frac{3\pi}{2} = -1 \quad \sin 2\pi = 0$$

$$\cos 0 = 1 \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \cos\pi = -1 \quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0 \quad \cos 2\pi = 1$$

$$\operatorname{tg} 0 = 0 \quad \operatorname{tg}\pi = 0 \quad \operatorname{tg} 2\pi = 0$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0 \quad \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} = 0$$

RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA GONOMETRIA



Consideriamo il triangolo rettangolo OQP. Dal teorema di Pitagora abbiamo

$(QP)^2 + (OQ)^2 = (OP)^2$ e quindi

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Da cui si hanno le relazioni:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Inoltre essendo:

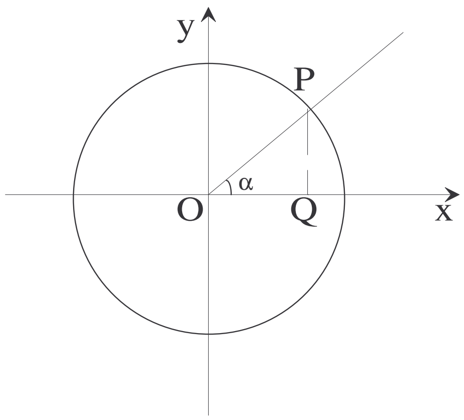
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ avremo anche noto il $\cos\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

noto il $\sin\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

SENO E COSENO IN FUNZIONE DELLA TANGENTE



Essendo

$$\sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1}$$ dalla relazione fondamentale avremo

Quindi:

$$\sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$$

Dividendo per $\cos^2\alpha$ otterremo la seguente relazione:

$$\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \text{ovvero} \quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Analogamente per il coseno:

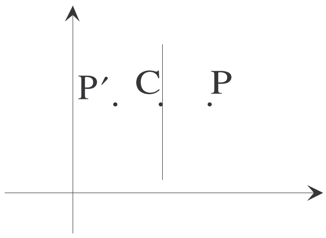
$$\cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{1} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$$

Dividendo per $\cos^2\alpha$ otteniamo:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} \quad \text{ovvero} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

RICHIAMI SULLE SIMMETRIE

1° caso simmetria rispetto ad una retta parallela all'asse *y*



Siano dati i punti $P(x, y)$ e $P'(x', y')$

Il punto C (punto medio fra P e P' sarà $C(x_C, y)$

Essendo una simmetria rispetto ad una retta parallela all'asse *y* le due ordinate risulteranno uguali, pertanto

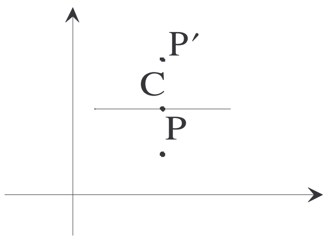
$y = y'$

$x_C = \dfrac{x+x'}{2}$ per cui

$x' = 2x_C - x$

le coordinate del punto P′ saranno: $P'(2x_C - x; y)$

2° caso simmetria rispetto ad una retta parallela all'asse *x*



Siano dati i punti $P(x, y)$ e $P'(x', y')$

Il punto C (punto medio fra P e P' sarà $C(x, y_C)$

Essendo una simmetria rispetto ad una retta parallela all'asse x le due ascisse risulteranno uguali, pertanto

$x' = x$ e

$y_C = \dfrac{y+y'}{2}$ per cui

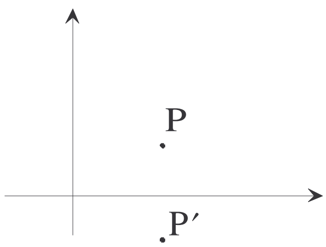
$y' = 2y_C - y$

le coordinate del punto P′ saranno: $P'(x; 2y_C - y)$

Casi particolari sono quelli in cui le due rette (assi di simmetria) sono proprio l'asse *x* o l'asse *y*.

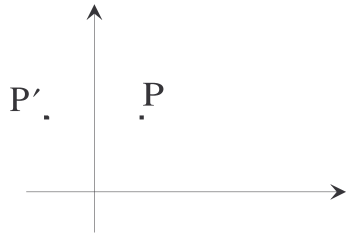
Se la retta è l'asse *x* le coordinate di P saranno:

$P'(x; -y)$

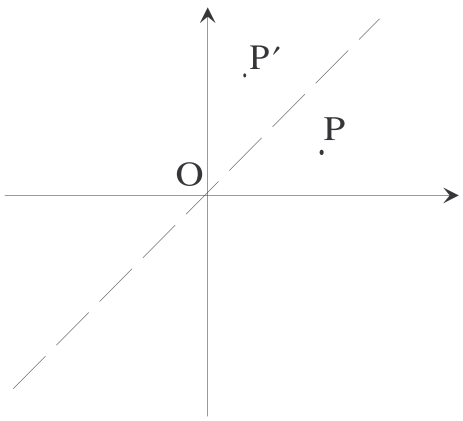


Se la retta è l'asse y le coordinate di P saranno:

$P'(-x; y)$



3° caso simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante



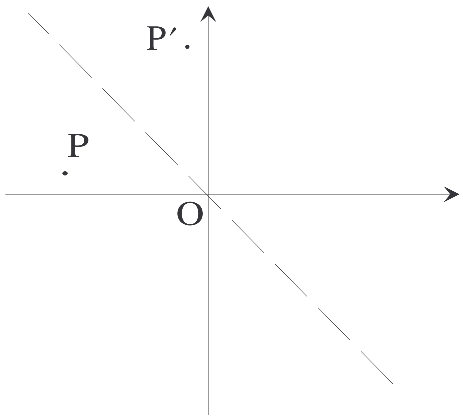
Sia $P(x; y)$ e $P'(x', y')$

In tal caso le coordinate di P' saranno $P'(y; x)$

$$\begin{cases} x = y \\ y = x \end{cases}$$

si ha dunque l'inversione dell'ascissa con l'ordinata e viceversa.

4° caso simmetria rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante



Sia $P(x; y)$ e $P'(x', y')$

In tal caso le coordinate di P' saranno $P'(-y; -x)$

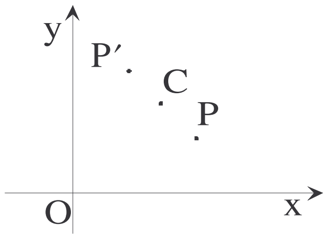
$$\begin{cases} x' = -y \\ y = -x \end{cases}$$

si ha dunque l'inversione dell'ascissa con l'ordinata e viceversa cambiate di segno.

Simmetria rispetto ad un punto

Si dice simmetria rispetto ad un punto C, che si chiama centro di simmetria, la trasformazione che a ogni punto P fa corrispondere sulla retta OP il punto P' tale che $PO = OP'$

1° caso simmetria rispetto ad un punto di coordinate generiche)

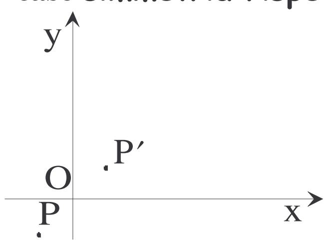


Siano dati i punti $P(x;y)$ e $P'(x';y')$, e sia $C(x_0;y_0)$ il punto medio del segmento PP'

le coordinate di P' saranno $\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$ per cui il punto P' avrà coordinate

$P'(2x_0 - x; 2y_0 - y)$

2° caso simmetria rispetto ad un punto che coincide con l'origine degli assi



Siano dati i punti $P(x;y)$ e $P'(x';y')$, e sia $O(0;0)$ il punto medio del segmento PP'

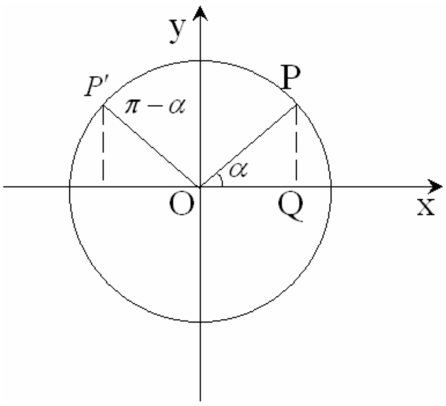
le coordinate di P' saranno $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ per cui il punto P'avrà coordinate

$P(-x;-y)$

ANGOLI ASSOCIATI

angoli supplementari

Due angoli si dicono supplementari quando la loro somma è uguale a un angolo piatto. (π)



Gli estremi dei due archi P e P' sono due punti simmetrici rispetto all'asse y, hanno quindi la stessa ordinata e ascissa opposta. Avremo quindi:

$$P(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha) \quad P'(\cos\pi - \alpha; \operatorname{sen}\pi - \alpha)$$

e per quanto detto in precedenza otteniamo

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$

pertanto le coordinate di P' saranno:

$$P'(-\cos x; \operatorname{sen} x)$$

Avremo anche

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$

pertanto

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

Esempio 1:

$$\sin\alpha - \cos(\pi - \alpha) + \cos\alpha - \operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha =$$
$$= \sin\alpha + 2\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$$

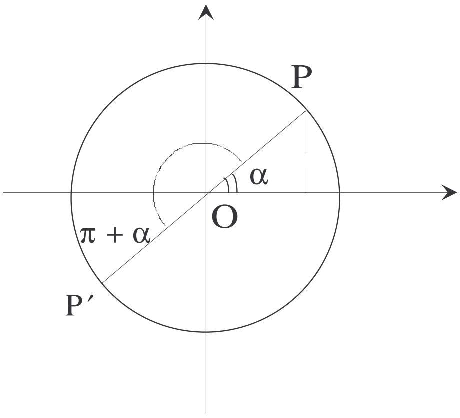
Esempio 2:

$$\frac{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) - \operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{-\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} = 1$$

Esempio 3

$$\frac{\sin(\pi - \alpha) - \operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{1 + \sin(\pi - \alpha)} = \frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{\sin\alpha + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 + \sin\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \sin\alpha} =$$
$$= \frac{\sin\alpha(1 + \cos\alpha)}{\cos\alpha(1 + \sin\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{(1 + \cos\alpha)}{(1 + \sin\alpha)}$$

Angoli che differiscono per un angolo piatto



Gli estremi dei due archi P e P' sono due punti simmetrici rispetto all'origine, hanno quindi ordinata e ascissa opposte. Avremo quindi:

$$P(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha) \qquad P'\left[\cos(\pi+\alpha); \operatorname{sen}(\pi+\alpha)\right]$$

e per quanto detto in precedenza otteniamo:

$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \qquad \operatorname{sen}(\pi+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

pertanto le coordinate di P' saranno:

$$P'(-\cos\alpha; -\operatorname{sen}\alpha)$$

Avremo anche

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

E quindi

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

Esempio 4

$$\sin\alpha\sin(\pi+\alpha)+\cos\alpha\cos(\pi+\alpha)+1 = \sin\alpha(-\sin\alpha)+\cos\alpha(-\cos\alpha)+1 = -\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+1 =$$
$$= -\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+1 == -1+1 = 0$$

Esempio 5:

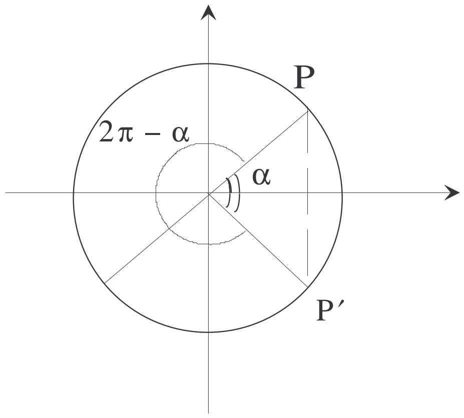
$$\frac{1}{1+\cos(\pi+\alpha)}+\frac{\cos(\pi+\alpha)}{1-\cos^2(\pi+\alpha)} = \frac{1}{1-\cos\alpha}+\frac{-\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{1+\cos\alpha-\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{1}{1-\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Esempio 6:

$$\frac{\sin\alpha-2\sin(\pi+\alpha)}{\cos\alpha-2\cos(\pi+\alpha)} = \frac{\sin\alpha-2(-\sin\alpha)}{\cos\alpha-2(-\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha+2\sin\alpha}{\cos\alpha+2\cos\alpha} = \frac{3\sin\alpha}{3\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

Angoli esplementari

Due angoli si dicono esplementari quando la loro somma è uguale ad un angolo giro



Gli estremi dei due archi P e P' sono due punti simmetrici rispetto all'asse x, hanno quindi uguali ascisse e ordinate . Avremo quindi:

$$P(\cos\alpha;\operatorname{sen}\alpha) \qquad P'[\cos(2\pi-\alpha);\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)] \quad P'(\cos\alpha;-\operatorname{sen}\alpha)$$

e per quanto detto in precedenza otteniamo:

$$\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$$

Avremo anche

$$\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)}=\frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha$$

E quindi:

$$\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$$

Esempio 7

$$\sin(2\pi-\alpha)-2\cos(2\pi-\alpha)+\cos\alpha-\cos(-\alpha)=-\sin\alpha-2\cos\alpha+\cos\alpha-\cos\alpha=-\sin\alpha-2\cos\alpha$$

Esempio 8

$$\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)+\frac{2}{\cos(2\pi-\alpha)}+2\sin(2\pi-\alpha)c\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha+\frac{2}{\cos\alpha}+2\sin\alpha(-c\operatorname{tg}\alpha)=$$

$$=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{2}{\cos\alpha}+2\sin\alpha\left(-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)==-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{2}{\cos\alpha}-1\cos\alpha=\frac{-\sin\alpha+2-2\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=$$

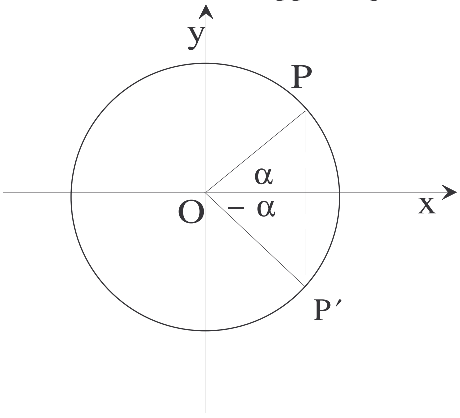
$$=\frac{-\sin\alpha+2(1-\cos^2\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{-\sin\alpha+2\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

Esempio 9

$$\frac{\sin(2\pi-\alpha)+\cos(2\pi+\alpha)}{\cos(-\alpha)+\sin(\pi-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{-(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha+\sin\alpha}=-1$$

ARCHI OPPOSTI

Due archi si dicono opposti quando i due angoli formati hanno ampiezza α e $-\alpha$



Gli estremi dei due archi P e P' sono due punti simmetrici rispetto all'asse x, hanno quindi uguali ascisse e ordinate . Avremo quindi:

$P(\cos\alpha;\operatorname{sen}\alpha)$ $\qquad P'[\cos(-\alpha);\operatorname{sen}(-\alpha)]$ $\quad P'(\cos\alpha;-\operatorname{sen}\alpha)$

e per quanto detto in precedenza otteniamo:

$$\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

Avremo anche

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha$$

E quindi:

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$$

Esempio 10

$$\sin(-\alpha)-\cos(-\alpha)+2\sin\alpha+3\cos\alpha=-\sin\alpha-\cos\alpha+2\sin\alpha+3\cos\alpha=\sin\alpha+2\cos\alpha$$

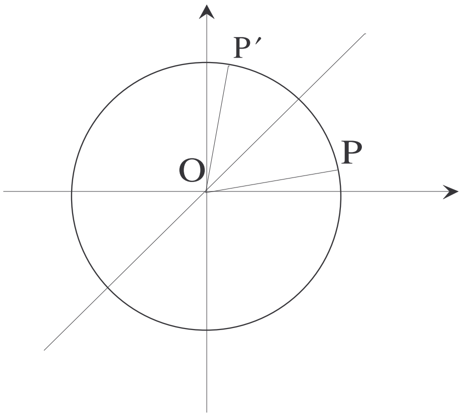
Esempio 11

$$\frac{\sin(-\alpha)+\operatorname{tg}(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(-\alpha)+\operatorname{tg}(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{-\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}==\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}==\frac{\sin\alpha(\cos\alpha+1)}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1}=\sin^2\alpha(\cos\alpha+1)$$

ARCHI COMPLEMENTARI

Due archi si dicono complementari quando la somma delle loro ampiezze è uguale a un angolo retto.



Gli estremi dei due archi P e P' sono due punti simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante avremo quindi

$$P(\cos\alpha;\operatorname{sen}\alpha) \qquad P'\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$$

e per quanto detto in precedenza sulle simmetrie otteniamo:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

Avremo anche :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$$

E quindi

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=c\operatorname{tg}\alpha$$

Esempio 12

$$\sin\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+3\cos(-\alpha)-\sin(\pi+\alpha)=\sin\alpha+\sin\alpha+3\cos\alpha+\sin\alpha=3\sin\alpha+3\cos\alpha=$$
$$=3(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

Esempio 13

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin^2(\pi-\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin^2\alpha=$$

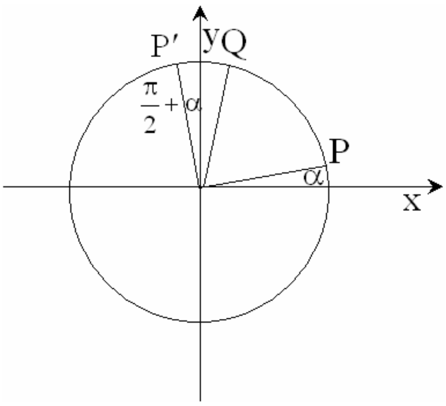
$$=\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin^2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

Esempio 13

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha-\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha-\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}+\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=1$$

ARCHI CHE DIFFERISCONO DI UN ANGOLO RETTO



Per determinare le coordinate di P' bisogna passare da P a Q e poi da Q a P'.
Q e P sono due punti (simmetrici rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante) le cui coordinate sono $P(\cos\alpha;\operatorname{sen}\alpha)$ $Q(\operatorname{sen}\alpha;\cos\alpha)$ e per quanto detto in precedenza sulle simmetrie avremo:

$$P'\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right);\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]$$

E quindi

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

Abbiamo inoltre

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha}=-c\operatorname{tg}\alpha$$

E quindi:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$$