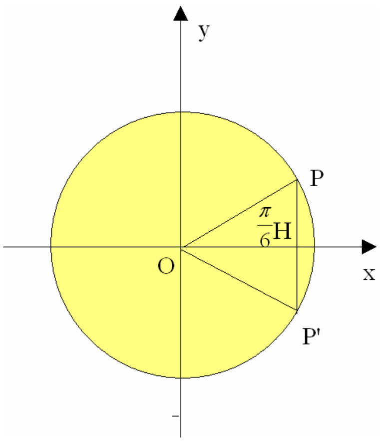
VALORE DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ALCUNI ARCHI PARTICOLARI



Caso a $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Consideriamo il punto P , sia H la sua proiezione sull'asse delle x. Prolunghiamo PH fino ad incontrare la circonferenza goniometrica in P'. Il triangolo OPP' risulta equilatero per cui avremo:

$$\sin\frac{\pi}{6} = HP = \frac{1}{2}$$

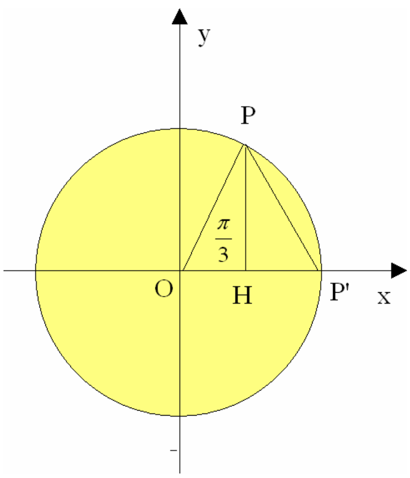
Essendo OH l'altezza del triangolo equilatero di lato 1 avremo

$$\cos\frac{\pi}{6} = OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si ha quindi

$$\text{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

Caso b $\alpha = \frac{\pi}{3}$



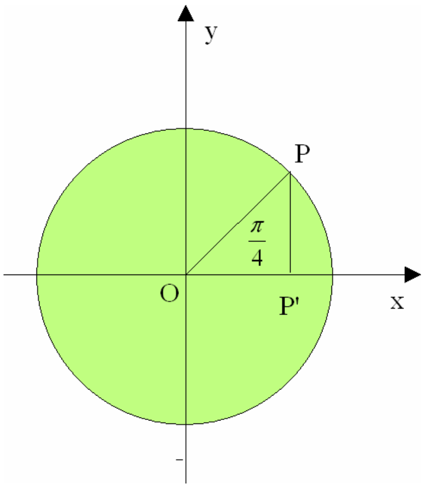
Consideriamo il punto P , sia H la sua proiezione sull'asse delle x. Il triangolo OPP' è equilatero. Avremo quindi

$$\sin\frac{\pi}{3} = HP = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{3} = OH = \frac{1}{2}$$

Si ha quindi

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \qquad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Caso c $\alpha = \frac{\pi}{4}$



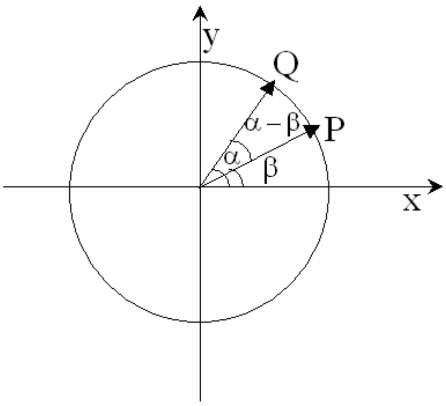
Consideriamo il punto P , sia P' la sua proiezione sull'asse delle x.. Il triangolo OPP' risulta rettangolo isoscele per cui avremo

$$P'P = OP' = \frac{OP}{\sqrt{2}}$$

E quindi

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$$

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE



Consideriamo una circonferenza di raggio unitario avente centro nell'origine di un riferimento cartesiano ortogonale ($O,\mathbf{i},\mathbf{j}$).

Consideriamo gli archi OQ = α, OP = β ed i vettori $\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OP}$.
Si ha

$$\overrightarrow{OQ} = \cos\alpha\cdot\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\alpha\cdot\mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{OP} = \cos\beta\cdot\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\beta\cdot\mathbf{j}$$

Consideriamo il prodotto scalare

$$\overrightarrow{OQ}\bullet\overrightarrow{OP}$$

Si ha

$$\overrightarrow{OQ}\bullet\overrightarrow{OP} = (\cos\alpha\cdot\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\alpha\cdot\mathbf{j})\bullet(\cos\beta\cdot\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\beta\cdot\mathbf{j}) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \mathrm{sen}\,\alpha\cdot\mathrm{sen}\,\beta$$

Inoltre

$$\overrightarrow{OQ}\bullet\overrightarrow{OP} = \cos(\alpha-\beta)$$

Per cui avremo

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \mathrm{sen}\,\alpha\cdot\mathrm{sen}\,\beta$$

addizione del coseno

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$$

essendo

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha-(-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}(-\beta)$$

Dalle relazioni: $\begin{cases}\cos(-\beta) = \cos\beta\\ \mathrm{sen}(-\beta) = -\mathrm{sen}\,\beta\end{cases}$ avremo:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$$

sottrazione del seno

Tenendo presente che

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen} x \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$$

abbiamo:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\beta$$

E quindi

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Addizione del seno

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\left[\alpha-(-\beta)\right]=\sin\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$$

Dalle relazioni: $\begin{cases}\cos(-\beta)=\cos\beta\\ \operatorname{sen}(-\beta)=-\operatorname{sen}\beta\end{cases}$ avremo:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

addizione della tangente

Essendo:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

dividendo numeratore e denominatore per $\cos\alpha\cos\beta$, avremo:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

e quindi:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Per trovare la formula di sottrazione della tangente si usa lo stesso metodo dell'addizione
Si ha

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Esempio 1

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)==\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}-\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\alpha$$

Esempio 2

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha-\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right)=$$
$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha=0$$

Esempio 3

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+c\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}+\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\alpha}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{1-\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{ctg}\alpha+1}{1-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}+\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+1}{1-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=$$
$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=$$

$$=-\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=0$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

Essendo
$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)$$
avremo
$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$
Quindi:
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
Allo stesso metodo avremo
$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$$
Quindi:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

Si ha anche esprimendo la relazione in seno:

$$\cos 2\alpha = \left(1-\sin^2\alpha\right) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

esprimendo la relazione in coseno avremo

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \left(1-\cos^2\alpha\right) = 2\cos^2\alpha - 1$$

Con lo stesso metodo troviamo la formula di duplicazione della tangente:

$$\text{tg}\, 2\alpha = \text{tg}\left(\alpha+\alpha\right)$$

Essendo: $\text{tg}\left(\alpha+\beta\right) = \dfrac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$ avremo

$$\text{tg}\, 2\alpha = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\alpha} = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$$

Esempio 4

$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\left(\cos\alpha - \sin\alpha\right)\left(\cos\alpha + \sin\alpha\right)}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \cos\alpha + \sin\alpha$$

Esempio 4

$$\left(\cos\alpha + \sin\alpha\right)^2 - \sin 2\alpha + \cos 2\alpha =$$
$$= \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

Esempio 5

$$\text{ctg}\, 2\alpha - \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{\text{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\text{ctg}\,\alpha} - \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - 1}{2\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} - \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{1}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} - \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - 1}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1-\sin^2\alpha - \sin^2\alpha - 1}{2\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha$$

FORMULE DI BISEZIONE

Consideriamo le formule di duplicazione del coseno

1) $\cos 2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$ (formula di duplicazione del coseno espressa in seno)

2) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ (formula di duplicazione del coseno espressa in coseno)

Sostituendo $\dfrac{\alpha}{2}$ ad α, otteniamo:

1) $\cos 2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$ e quindi $\cos\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

Ricavando $\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$ avremo

$$2\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$$

$$\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \Rightarrow \text{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

2) $\cos 2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ e quindi $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

Ricavando $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ avremo

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Si ha anche

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Inoltre avremo

$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ moltiplicando numeratore e denominatore per $\sin\frac{\alpha}{2}$ otteniamo

$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$ essendo $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ e, (dalle formule di duplicazione)

$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sin\alpha$ avremo

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1}{2}\sin\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Si ha anche, in modo analogo

$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ moltiplicando numeratore e denominatore per $\cos\frac{\alpha}{2}$ otteniamo

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$ essendo $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ e

$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sin\alpha$ avremo

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{1}{2}\sin\alpha}{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Esempio 5

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\alpha=\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)+\frac{1}{4}\cos^2\alpha=$$
$$=\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)+\frac{1}{4}\cos^2\alpha=\frac{1-\cos^2\alpha}{4}+\frac{1}{4}\cos^2\alpha=\frac{1-\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{4}=\frac{1}{4}$$

Esempio 6

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}+\cos\alpha-\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=$$
$$=\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)+\cos\alpha(2+2\cos\alpha)-2(1-\cos\alpha)}{2(1+\cos\alpha)}=$$
$$=\frac{1-\cos^2\alpha+2\cos\alpha+2\cos^2\alpha-2+2\cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)}=\frac{4\cos\alpha-\left(1-\cos^2\alpha\right)}{2(1+\cos\alpha)}=\frac{4\cos\alpha-\sin^2\alpha}{2(1+\cos\alpha)}$$

Esempio 7

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1}{1-\cos^2\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=$$
$$=\frac{1+1+\cos^2\alpha+2\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+2\cos\alpha+2}{1-\cos^2\alpha}$$

FORMULE PARAMETRICHE

Consideriamo le formule di duplicazione del seno e del coseno:

1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$

sostituendo nella prima al posto di α $\frac{\alpha}{2}$ avremo

$$\sin 2\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

dividiamo per 1 e sostituendo ad 1 $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$:otteniamo

$$\sin 2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1}$$ e quindi

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

dividiamo numeratore e denominatore per $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ dove: $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ovvero $\alpha \neq \pi + 2k\pi$

otteniamo:

$$\sin\alpha = \frac{2\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1}$$

quindi:

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$ ponendo $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = t$ avremo

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

Per il coseno, con ragionamento analogo avremo:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha$$

sostituendo ad α il valore $\frac{\alpha}{2}$ otteniamo:

$$\cos 2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

dividendo tutto per 1 e sostituendo $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$ avremo

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

dividendo tutto per $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ otteniamo:

$$\cos\alpha=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}$$

Quindi

$$\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$ ponendo $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=t$ avremo

$$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

FORMULE DI WERNER E PROSTAFERESI

consideriamo le formule di addizione e sottrazione del seno:

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta)=\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$$

$$\mathrm{sen}(\alpha-\beta)=\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta-\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$$

sommando membro a membro le sue espressioni, otteniamo:

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta)+\mathrm{sen}(\alpha-\beta)=2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta$$ e quindi

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$ (1° formula di Werner)

Ponendo: $\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases}$ avremo $\begin{cases}\alpha=\dfrac{p+q}{2}\\ \beta=\dfrac{p-q}{2}\end{cases}$

Sostituendo otteniamo:

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$ (1° formula di Prostaferesi)

sottraendo membro a membro le due formule di addizione e sottrazione del seno otteniamo:

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta)-\mathrm{sen}(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$$ e quindi

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$$ (2 formula di Werner)

Ponendo: $\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases}$ avremo $\begin{cases}\alpha=\dfrac{p+q}{2}\\ \beta=\dfrac{p-q}{2}\end{cases}$

$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$ (2° formula di Prostaferesi)

consideriamo le formule di addizione e sottrazione del coseno:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

sommando membro a membro le due espressioni avremo

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$ e quindi

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$ (3° formula di Werner)

Ponendo: $\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases}$ avremo $\begin{cases}\alpha=\dfrac{p+q}{2}\\ \beta=\dfrac{p-q}{2}\end{cases}$

$$\cos p-\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$ (3° formula di Prostaferesi)

Sottraendo membro a membro le due espressioni, e otteniamo:

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$ e quindi

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$ (4° formula di Werner)

Ponendo: $\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases}$ avremo $\begin{cases}\alpha=\dfrac{p+q}{2}\\ \beta=\dfrac{p-q}{2}\end{cases}$

$$\cos p-\cos q=2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$ (4° formula di Prostaferesi)