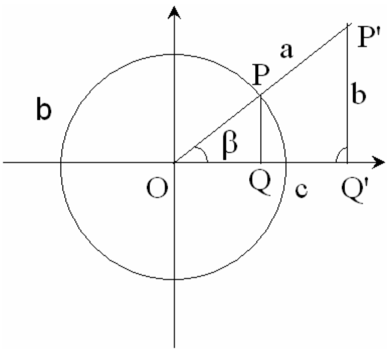
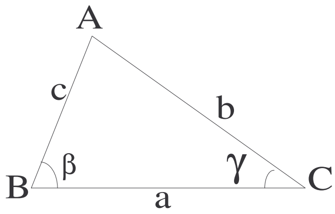
TRIANGOLO RETTANGOLO

Consideriamo i triangoli rettangoli OPQ e $OP'Q'$





Essi sono simili per cui

$Q'P' : QP = OP' : OP$

Essendo $Q'P' = b \quad QP = \sin\beta \quad OP' = a \quad OP = 1$ otteniamo

$b : \text{sen}\,\beta = a : 1$ e quindi

$b = a\,\text{sen}\,\beta$

1) Si ha quindi Un cateto è uguale al prodotto dell' ipotenusa per il seno dell'angolo opposto.

Abbiamo anche

$OQ' : OQ = OP' : OP$ e quindi

$c : \cos\beta = a : 1$ per cui

$c = a\,\text{sen}\,\beta$

2) Un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo acuto ad esso adiacente.

Dalla proporzione

$OQ' : OQ = P'Q' : PQ$ avremo

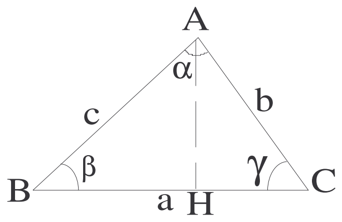
$c : \cos\beta = b : \text{sen}\,\beta$ e quindi

$c = \dfrac{b\cos\beta}{\text{sen}\,\beta} = b \cdot \text{ctg}\,\beta \qquad c = b \cdot \text{ctg}\,\beta$ inoltre

$b = \dfrac{c\,\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} = c \cdot \text{tg}\,\beta \qquad b = c \cdot \text{tg}\,\beta$

3) un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto o per la cotangente dell'angolo acuto adiacente

AREA DI UN TRIANGOLO



L'area di un triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo tra essi compreso.

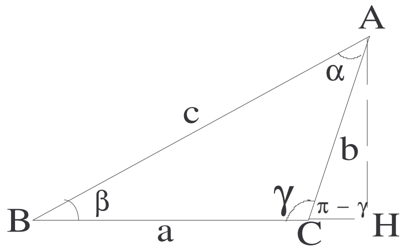
Consideriamo il triangolo qualunque ABC e supponiamo noti a,b e γ, sia inoltre h = AH l'altezza relativa al lato BC

Avremo, indicando l'area del triangolo con S

$S=\frac{a\cdot h}{2}$ essendo $h=b\cdot \text{sen}\,\gamma$ otteniamo

$$S=\frac{1}{2}ab\cdot \text{sen}\,\gamma$$

Analogamente se il triangolo è ottusangolo



In questo caso $S=\frac{1}{2}a\cdot h$ $h=b\cdot \text{sen}\left(\pi-\gamma\right)=b\,\text{sen}\,\gamma$ e quindi:

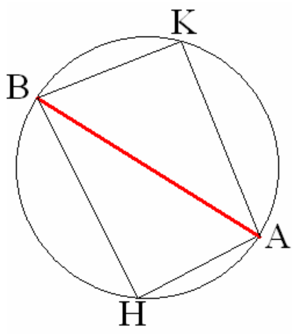
$$S=\frac{1}{2}ab\cdot \text{sen}\,\gamma$$

Pertanto:

$$S=\frac{1}{2}ab\cdot \text{sen}\,\gamma=\frac{1}{2}ac\cdot \text{sen}\,\beta=\frac{1}{2}bc\cdot \text{sen}\,\alpha$$

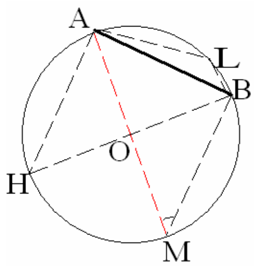
TEOREMA DELLA CORDA

La lunghezza di una corda di una circonferenza è uguale al prodotto del diametro per il seno di uno qualunque degli angoli alla circonferenza che insistono su uno dei due archi determinati dalla corda stessa.



Se la corda AB è un diametro si ha $\overline{AB} = 2r$
Gli archi da essa sottesi risultano due semicirconferenze. Poiché gli angoli alla circonferenza che insistono su questi archi sono angoli retti risulta $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ e quindi

$$AB = 2r \cdot \operatorname{sen}\alpha = 2r$$



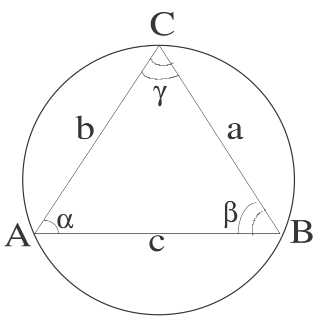
Se la corda AB non è un diametro, consideriamo diametro AM: il triangolo ABM è rettangolo e pertanto per il teorema dei triangoli rettangoli avremo

$$AB = 2r \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Se consideriamo l'arco ALB, per una proprietà relativa ai quadrilateri inscritti in una circonferenza avremo che l'angolo alla circonferenza sarà $\pi - \alpha$ e quindi essendo $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ avremo

$$AB = 2r \cdot \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = 2r \sin\alpha$$

TEOREMA DEI SENI



Le misure dei lati di un triangolo sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.

Applicando a ogni lato del triangolo circoscritto da una circonferenza il teorema della corda si ha:

$a = 2r \operatorname{sen}\alpha$; $b = 2r \operatorname{sen}\beta$; $c = 2r \operatorname{sen}\gamma$ essendo $2r$ il diametro

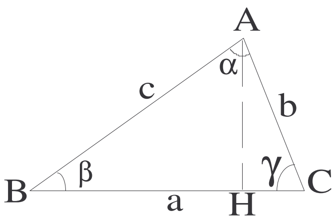
ne seguono le seguenti uguaglianze:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = 2r; \quad \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = 2r; \quad \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2r$$

Avremo quindi

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}=2r$$

TEOREMA DELLE PROIEZIONI



In un triangolo qualunque la misura di un lato è uguale alla somma dei prodotti degli altri due lati per il coseno dell'angolo che ciascuno di essi forma col primo.

Sappiamo che:

$a=\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{HC}$ essendo

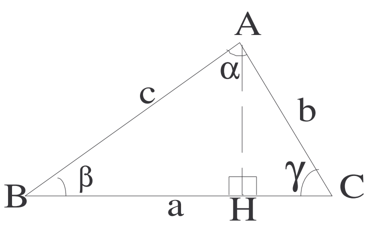
$\overline{BH}=c\cdot\cos\beta$ e $\overline{HC}=b\cdot\cos\gamma$ avremo

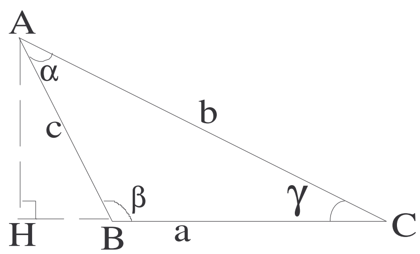
$a=b\cdot\cos\gamma+c\cdot\cos\beta$ analogamente

$b=a\cdot\cos\gamma+c\cdot\cos\alpha$

$c=a\cdot\cos\beta+b\cdot\cos\alpha$

TEOREMA DEL COSENO





In un triangolo il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due, diminuiti del doppio prodotto delle misure dei due lati per il coseno dell'angolo da essi formato.

dal teorema delle proiezioni abbiamo

$a=b\cdot\cos\gamma+c\cdot\cos\beta$

$b=a\cdot\cos\gamma+c\cdot\cos\alpha$

$c=a\cdot\cos\beta+b\cdot\cos\alpha$

moltiplicando, la 1° per –a, la 2° per –b, la terza per –c avremo

$a^2=ab\cdot\cos\gamma+ac\cdot\cos\beta$

$-b^2=-bc\cdot\cos\alpha-ab\cdot\cos\gamma$

$-c^2=ac\cdot\cos\beta-bc\cdot\cos\alpha$

sommando membro a membro otteniamo:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$ inoltre

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

Si ha anche

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

IDENTITA' ED EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Si definisce identità goniometrica ogni uguaglianza fra due espressioni contenti funzioni goniometriche di uno o più angoli.
Tali identità sono risolvibili in modo analogo alle identità algebriche. Infatti si può lasciare invariato il secondo membro, e risolvere il primo (sviluppandolo e/o semplificandolo) in modo da ottenere due espressioni identiche.

Esempi

Esempio 1

$$\mathrm{sen}\,\alpha\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^3\alpha = \mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\mathrm{sen}\,\alpha\left(\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha\right) = \mathrm{sen}\,\alpha$$

essendo $\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha = 1$ otteniamo

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \mathrm{sen}\,\alpha$$

Esempio 2

$$\mathrm{ctg}\,\alpha + \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha} = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha} + \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}$$

$$\frac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}$$

Esempio 3

$$\sin 2\alpha - \cos 2\alpha + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha)^2 = \frac{2\,\mathrm{tg}^2\alpha + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1}{\mathrm{tg}^2 + 1}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha - \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}(1+\cos\alpha)^2 = \frac{2\,\mathrm{tg}^2\alpha + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1}{\mathrm{tg}^2 + 1}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}^2\alpha + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1}{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = \frac{2\,\mathrm{tg}^2 + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1}{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}$$

Sostituendo $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ otteniamo:

$$2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha - 1}{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}$$

E quindi:

$$\frac{2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha}{1} = \frac{2\,\mathrm{tg}^2\alpha + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1}{\mathrm{tg}^2 + 1}$$

Quindi sostituendo a $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ otterremo:

$$\frac{2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}^2\alpha + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1}{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}$$

Dividendo sia il numeratore che il denominatore per $\cos^2\alpha$ otteniamo

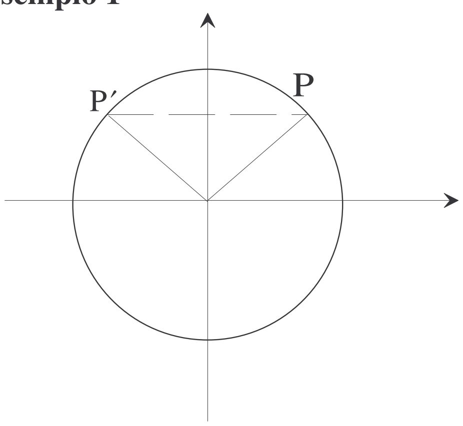
$$\frac{2\,\mathrm{tg}^2\alpha + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1}{\mathrm{tg}^2\alpha + 1} = \frac{2\,\mathrm{tg}^2\alpha + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1}{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}$$

EQUAZIONI

Si definisce equazione goniometrica una uguaglianza fra due espressioni goniometriche che viene definita per alcuni valori che si attribuiscono agli angoli.
Esempi di equazioni goniometriche elementari sono:

1 $\sin x = a$ con $-1 \le a \le 1$
2 $\cos x = a$ con $-1 \le a \le 1$
3 $\mathrm{tg}\, x = a$ l'equazione è sempre possibile qualunque sia il numero reale a
4.. $\mathrm{ctg}\, x = a$ l'equazione è sempre possibile qualunque sia il numero reale a

Esempio 1



$\sin x = \frac{1}{2}$

Il seno di x assume il valore $\frac{1}{2}$ in due punti, come si nota dal grafico, e precisamente:

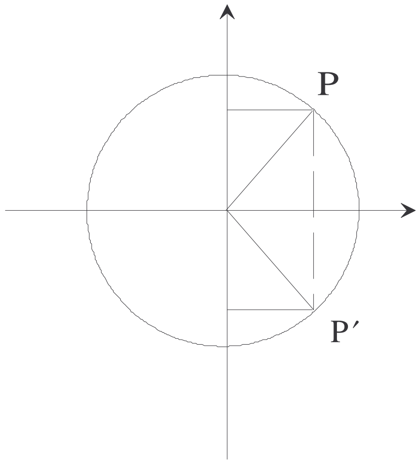
1) $x = \frac{\pi}{6} + 2\kappa\pi$

2) $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\kappa\pi \Rightarrow x = \frac{5}{6}\pi + 2\kappa\pi$

I due valori ottenuti saranno dunque le soluzioni dell'equazione.

Esempio 2

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Il coseno di x assume il valore $\frac{\sqrt{3}}{2}$ in due punti, come si nota dal grafico, e precisamente:

1) $x = \frac{\pi}{6} + 2\kappa\pi$

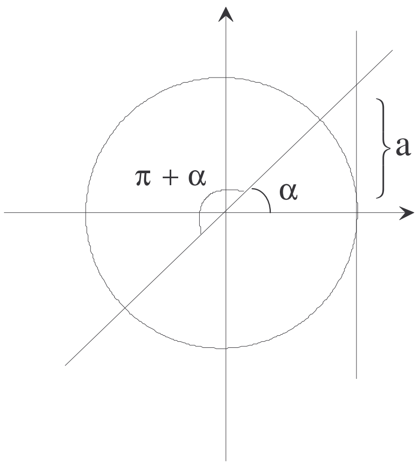
2) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\kappa\pi$

Od anche

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\kappa\pi$$

Esempio n° 3

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$



$$x = \frac{\pi}{3} + \kappa\pi$$

Si nota che la tangente è una funzione periodica di π e pertanto ha una sola soluzione.

Equazioni della forma

$\sin(ax+b) = \sin(cx+d)$ $\cos(ax+b) = \cos(cx+d)$

$\operatorname{tg}(ax+b) = \operatorname{tg}(cx+d)$ $\operatorname{ctg}(ax+b) = \operatorname{ctg}(cx+d)$

1 $\sin(ax+b)=\sin(cx+d)$
Si ha
$ax+b=cx+d+2k\pi$ e
$ax+b=\pi-(cx+d)+2k\pi$

2 $\cos(ax+b)=\cos(cx+d)$
Si ha
$ax+b=\pm(cx+d)+2k\pi$

3 $\text{tg}(ax+b)=\text{tg}(cx+d)$
Si ha
$ax+b=cx+d+k\pi$
4 $\text{ctg}(ax+b)=\text{ctg}(cx+d)$
Si ha
$ax+b=cx+d+k\pi$

EQUAZIONI RICONDUCIBILI AD ELEMENTARI

Sono equazioni riconducibili ad elementari tutte quelle equazioni che attraverso abbassamento di grado o semplificazione assumono la forma $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\text{tg}\, x=a$

Esempio
$\cos^2 x+\cos x-2=0$
risolvendo come una equazione algebrica di 2° grado otterremo, essendo $\Delta=9$ e quindi

$$\cos x=\frac{-1\pm 3}{2}=\left\langle \begin{array}{l} -2 \\ \\ +1 \end{array}\right.$$

abbiamo così ricondotto l'equazione iniziale a quelle della forma elementare seguente:
1) $\cos x=-2$
2) $\cos x=1$
La prima equazione non ha soluzione poiché il valore di $\cos x$ varia da –1 a 1.
La seconda equazione ha due soluzioni:
$x=2\kappa\pi$
$x=\pi+2\kappa\pi$

EQUAZIONI LINEARI

Un'espressione lineare generica in $\text{sen}\, x$ e $\cos x$ avrà forma:
$a\sin x+b\cos x+c=0$
Se c = 0 l'equazione è omogenea.
Se l'equazione è omogenea si divide l'intera equazione per $\cos x$ supposto che $\cos x\neq 0$ e.
$x\neq\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$ avrà forma:
$a\,\text{tg}\, x+b=0$

Esempio

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$$

dividendo per $\cos x$ otterremo:

$$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

La soluzione sarà:

$$x = \frac{\pi}{3} + \kappa\pi$$

Se l’equazione non è omogenea si può risolvere mediante l’uso **delle formule parametriche** supposto che $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $x \neq \pi + 2k\pi$

ricordando le formule parametriche del seno e del coseno:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1-t^2}$$

Esempio

$$\sin x + \cos x - 1 = 0$$

sostituendo otterremo:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 = 0$$

da cui si avrà:

$$2t + 1 - t^2 - 1 - t^2 = 0$$

$$2t^2 - 2t = 0$$

$$t^2 - t = 0$$

$$t(t-1) = 0$$

$$t_1 = 0$$

Quindi:

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$

2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Metodo grafico

L’equazione del tipo

$$\operatorname{sen} x + \cos x + c = 0$$

può essere risolta attraverso il metodo che consente graficamente di trovare le soluzioni.
Tale metodo consiste nel porre

$$\cos x = X$$

$$\operatorname{sen} x = Y$$

L’equazione assume la forma:

$$X + Y + c = 0$$

associando a questa l'equazione di una circonferenza goniometrica, dunque:

$$X^2 + Y^2 = 1$$

otterremo un sistema del tipo:

$$\begin{cases} X + Y + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema, daranno le soluzioni dell'equazione.

N.B.) si ricorda che tale metodo è il più appropriato per la risoluzione di un'equazione goniometrica lineare.

Esempio

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 0$$

ponendo: $\begin{matrix} \cos x = X \\ \operatorname{sen} x = Y \end{matrix}$

e associando la circonferenza goniometrica avremo un sistema del tipo:

$$\begin{cases} X + Y = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

sviluppando otterremo:

$$\begin{cases} Y = -X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = -X \\ 2X^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = -X \\ X^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = -X \\ X = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

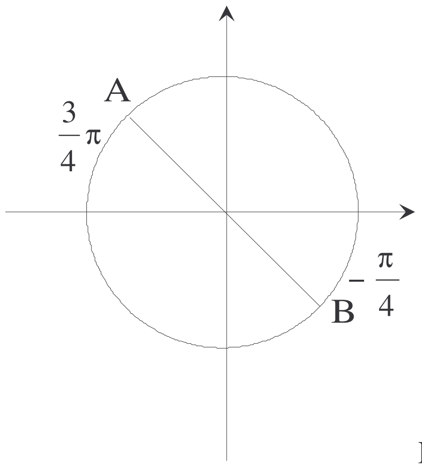
otteniamo

$$\begin{cases} Y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ X = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} Y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ X = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

le coordinate dei punti che chiameremo rispettivamente A e B saranno:

$$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\theta \qquad B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Graficamente si ha:



Le soluzioni reali sono due ma poiché sommando π ad entrambi gli angoli si ottiene l'angolo opposto, se ne deduce che la soluzione sarà: $x=-\frac{\pi}{4}+\kappa\pi$

EQUAZIONI LINEARI

Data l'equazione

$$a\sin x+b\cos x+c=0$$

dividendo per $\sqrt{a^2+b^2}$ otteniamo:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0 \qquad (1)$$

Poniamo

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=k \text{ e } \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=h$$

si ha:

$$h^2+k^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1$$

Essendo

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1 \text{ e } \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$$

possiamo porre

$$k=\cos\varphi \qquad h=\sin\varphi$$

cioè

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi \qquad\qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$$

Sostituendo nella (1), otteniamo

$$\sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

cioè

$$\sin(x+\varphi) = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Ponendo

$$x+\varphi = z$$

avremo

$$\sin z = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Posto $A = \sqrt{a^2+b^2}$ si ha

$$A\sin(x+\varphi) = -c$$

Se $c = 0$ otteniamo

$$A\sin(x+\varphi) = 0$$

Esempio

$$\sqrt{3}\sin 4x + \cos 4x = 1$$

Poniamo

$$4x = \alpha$$

Si ha:

$$\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha = 1$$

e quindi

$$a = \sqrt{3} \qquad b = 1$$

per cui

$$\sqrt{a^2+b^2} = 2$$

otteniamo

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

Inoltre

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\varphi \qquad \frac{1}{2} = \sin\varphi$$

e quindi

$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$

L'equazione diviene

$$\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

cioè

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Avremo quindi

1) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$$\alpha = 2k\pi$$

essendo

$4x = \alpha$ otteniamo

$$4x = 2k\pi$$

$$x = k\frac{\pi}{2}$$

2) $\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$$\alpha = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

cioè

$$4x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$$

EQUAZIONI OMOGENEE DI SECONDO GRADO

Un'equazione si dice omogenea di 2° grado quando ha la seguente forma:
$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$
Supposto che $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
Tale equazione può essere risolta dividendo per $\cos^2 x$ ottenendo quindi una o più equazioni elementari in $\operatorname{tg} x$.
Si ha:
$$a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c = 0$$

Esempio

$$\sin^2 x + \left(\sqrt{3}-1\right)\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$$
dividendo per $\cos^2 x$ otteniamo:
$$\operatorname{tg}^2 x + \left(\sqrt{3}-1\right)\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$$
$$\Delta = \left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 4\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}+1\right)^2$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{-\left(\sqrt{3}-1\right) \pm \left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{2} = -\sqrt{3} \\ \dfrac{-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1}{2} = 1 \end{array} \right.$$
le soluzioni sono:

1) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ $\qquad x = -\frac{\pi}{3} + \kappa\pi$

2) $\operatorname{tg} x = 1$ $\qquad x = \frac{\pi}{4} + \kappa\pi$

EQUAZIONI RICONDUCIBILI AD OMOGENEE

Un'equazione è riconducibile ad omogenea quando ha la seguente forma:
$$a\,\text{sen}^2 x + b\,\text{sen}\, x\cos x + c\cos^2 x + d = 0$$
È riconducibile ad un'equazione omogenea di 2° grado moltiplicando il termine d per
$$\left(\text{sen}^2 x + \cos^2 x\right)$$
dunque otterremo:
$$a\,\text{sen}^2 x + b\,\text{sen}\, x\cos x + c\cos^2 x + d\left(\text{sen}^2 x + \cos^2 x\right) = 0$$
dunque sommando:
$$\left(a+d\right)\text{sen}^2 x + b\,\text{sen}\, x\cos x + \left(c+d\right)\cos^2 x = 0$$
assumendo così la forma di un'equazione omogenea di 2° grado risolvibile pertanto con lo stesso metodo, cioè dividendo l'intera equazione per $\cos^2 \text{x}$ o $\text{sen}^2 \text{x}$:
$$\left(a+d\right)\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + \left(c+d\right) = 0$$

Esempio:

$$\left(\sqrt{3}+3\right)\operatorname{sen}^2 x+2\cos^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\operatorname{sen} x\cos x-3=0$$

moltiplicando $3\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x\right)$ otterremo:

$$\left(\sqrt{3}+3\right)\operatorname{sen}^2 x+2\cos^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\operatorname{sen} x\cos x-3\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x\right)=0$$

$$\sqrt{3}\operatorname{sen}^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\operatorname{sen} x\cos x-\cos^2 x=0$$

dividendo per $\cos x$ otteniamo:

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\operatorname{tg} x-1=0$$

$$\Delta=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+4\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{-\sqrt{3}+1\pm\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{3}}\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}=-1\\[2ex]\dfrac{-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$$

le soluzioni saranno 1) $\operatorname{tgx}=-1$ $\qquad x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$

2) $\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad x=\frac{\pi}{6}+k\pi$