## EQUAZIONI CON PARAMETRO

Le equazioni parametriche goniometriche possono essere risolte mediante il metodo grafico. Tali equazioni richiedono che nell'intervallo considerato (detto parametro) si determini una corrispondenza biunivoca, tale corrispondenza determinerà le soluzioni dell'equazione stessa. Le equazioni parametriche goniometriche possono essere di vario tipo:

**Equazioni elementari:**

$$\begin{cases} \sin x = 2k - 1 \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

associamo all'equazione data l'identità $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ e poniamo $\sin x = Y$ e $\cos x = X$ avremo

per $x = 0$ $\sin 0 = 0$ $\cos 0 = 1$ $\Rightarrow$ $A(1;0)$

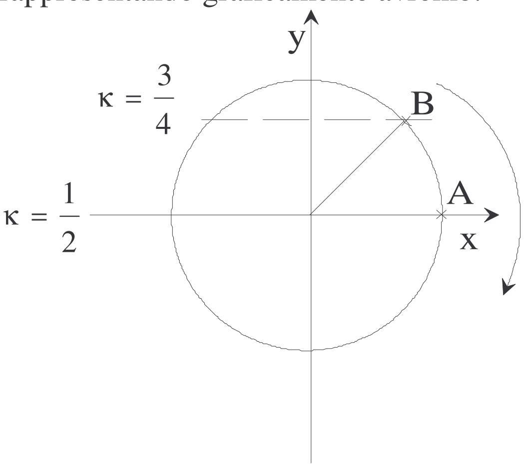
per $x = \dfrac{\pi}{6}$ $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

otteniamo quindi

$$\begin{cases} Y = 2k - 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} < x < 1 \vee 0 < Y < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta un fascio di rette parallele all'asse x; la seconda equazione rappresenta l'equazione della circonferenza goniometrica; le limitazioni determinano sulla circonferenza stessa l'arco di estremi $\widehat{AB}$ aventi coordinate $A(1;0)$ e $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

rappresentando graficamente avremo:




Sostituendo alla prima equazione del sistema le coordinate di A e di B otterremo:

per $A(1;0) \Rightarrow 0 = 2k - 1$ cioè $k = \dfrac{1}{2}$

per $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\frac{1}{2}=2k-1$ cioè $k=\frac{3}{4}$

Quindi come si vede anche dalla figura l'unica soluzione che otterremo sarà per: $k\in\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$

**Equazioni lineari in seno e coseno:**

$$\begin{cases}\operatorname{sen}x+\cos x+k-1=0\\ 0<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

associamo all'equazione data l'identità $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ e poniamo $\sin x=Y$ e $\cos x=X$ per trovare i punti A e B che determinano un arco sulla circonferenza goniometrica consideriamo i valori assunti da $\cos x$ e $\operatorname{sen}x$ negli estremi della limitazione $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

per $x=0$ $\sin 0=0$ $\cos 0=1$ $\Rightarrow$ $A(1;0)$

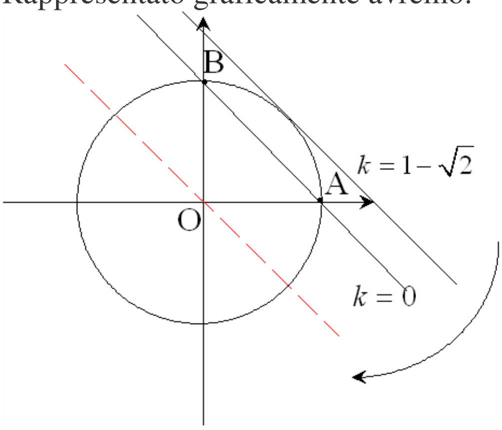
per $x=\frac{\pi}{2}$ $\sin\frac{\pi}{2}=1$ $\cos\frac{\pi}{2}=0$ $\Rightarrow$ $B(0;1)$

otteniamo quindi

$$\begin{cases}Y+X+k-1=0\\ X^2+Y^2=1\\ 0<X<1\vee 0<Y<1\end{cases}$$

La prima equazione rappresenta un fascio di rette, la seconda rappresenta una circonferenza goniometrica, le limitazioni determinano nella circonferenza stessa l'arco $\widehat{AB}$ avente coordinate $A(1;0)$ e $B(0;1)$.

Rappresentato graficamente avremo:




Sostituendo all'equazione con il parametro le coordinate di A e B otterremo:

per $A(1;0)\Rightarrow 0+1+k-1=0$ cioè $k=0$

per $B(0;1)\Rightarrow 1+0+k-1=0$ cioè $k=0$

Sapendo che tra le parallele vi è anche la tangente, imponendone lacondizione, mediante la distanza di un punto da una retta avremo:

$$d(\mathrm{P},\mathrm{r}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

considerando il punto $\mathrm{P}(0;0)$ e la retta $Y + X + k - 1 = 0$, avremo:

$$d(\mathrm{P},\mathrm{r}) = \frac{|k-1|}{\sqrt{2}} = 1$$

$$|k-1| = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} k = 1 + \sqrt{2} \\ k = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$ per vedere dov'è verificata la tangente

sostituendo i due valori di $\kappa$ all'equazione iniziale, otterremo:

per $k = 1 + \sqrt{2}$ si avrà

$$Y + X + \sqrt{2} + 1 - 1 = 0$$

$$Y + X + \sqrt{2} = 0$$

$$Y = -\sqrt{2} - X$$

per $k = 1 - \sqrt{2}$ si avrà

$$Y + X + 1 - \sqrt{2} - 1 = 0$$

$$Y + X - \sqrt{2} = 0$$

$$Y = \sqrt{2} - X$$

per $k = 0$
non esistono soluzioni

per $k = 1 - \sqrt{2}$ 2 soluzioni
per $1 - \sqrt{2} < k < 0$ 2 soluzioni
per $k = 0$ nessuna soluzione
per $k < 0$ nessuna soluzione
per cui si hanno 2 soluzioni $x \in \left[1 - \sqrt{2}; 0\right]$

**EQUAZIONI DI 2° GRADO IN CUI COMPARE UNA SOLA FUNZIONE GONIOMETRICA**

$$\begin{cases} \cos^2 x + k \cos x + \kappa - 2 = 0 \\ 0 < x < \dfrac{2}{3}\pi \end{cases}$$

Sostituendo alla funzione goniometrica $\cos \mathrm{x} = \mathrm{X}$ si avrà

$$\begin{cases} X^2 + kX + k - 2 = 0 \\ 0 < x < \dfrac{2}{3}\pi \end{cases}$$

Avremo $\cos 0 = 1$ $\cos \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ e quindi

$$\begin{cases} X^2 + kX + k - 2 = 0 \\ -\frac{1}{2} < X < 1 \end{cases}$$

dalla limitazione otteniamo le ascisse dei punti A e B che delimitano l'arco A di ascissa $-\frac{1}{2}$ e B di ascissa 1.
Ponendo $Y = X^2$ avremo il sistema:

$$\begin{cases} Y = X^2 \\ Y + kX + k - 2 = 0 \\ -\frac{1}{2} < X < 1 \end{cases}$$

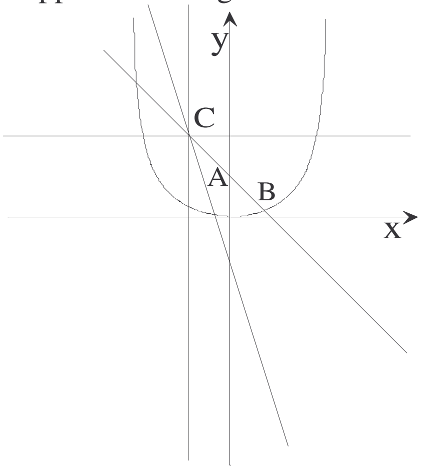
la prima equazione rappresenta una parabola con vertice nell'origine degli assi, la seconda un fascio di rette proprio.
Considerando la seconda equazione, bisogna trovarne le generatrici, raccogliendo $k$ otteniamo:

$Y - 2 + k(X + 1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} k = 0 \Rightarrow Y - 2 = 0; \quad Y = 2 \\ k = \infty \Rightarrow X + 1 = 0; \quad X = -1 \end{array}\right\rangle \text{dunque il centro del fascio avrà coordinate } C(-1; 2)$$

Ricordando che le ascisse dei punti A e B sono rispettivamente $-\frac{1}{2}$ e 1. Per trovare le rispettive ordinate consideriamola prima equazione $Y = X^2$ i punti avranno coordinate $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ $B(1;1)$

Rappresentando graficamente il sistema e i punti A e B dell'arco avremo:




$C(-1;-2)$

$A\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

$B(1;1)$

Imponendo ora al fascio il passaggio per A e B otterremo i valori che $k$ assume quando passa per questi punti. Dunque:

considerando la retta: $Y + kX + k - 2 = 0$ ed il punto $A\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ avremo:

$$+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}k+2=0$$
$$=1-2k+4k-8=0$$
$$=2k-7=0 \Rightarrow k=\frac{7}{2}$$

considerando la retta: $Y + kX + k - 2 = 0$ ed il punto $B(1;1)$ avremo:

$$1+k+k-2=0$$
$$2k-1=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

per $k<\frac{1}{2}$ l'equazione non avrà soluzioni, non passando dentro l'arco

per $k=0$ l'equazione non avrà soluzione

per $\frac{7}{2}<k<\frac{1}{2}$ l'equazione avrà una sola soluzione

per $k>\frac{7}{2}$ l'equazione non avrà soluzione, non passando dentro l'arco

per $k=\frac{7}{2}$ l'equazione non avrà soluzione perché $\frac{7}{2}$ è escluso.

**EQUAZIONI OMOGENEE O RICONDUCIBILI AD OMOGENEE DI 2° GRADO IN $\operatorname{sen} x$ E $\cos x$**

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x - k \operatorname{sen} x \cos x + 2 - k = 0 \\ 0 < x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Esprimendo $\operatorname{sen}^2 x$ in funzione di 2x mediante le note formule di bisezione, avremo:

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\left(\cos^2 x = \frac{1+\cos^2 x}{2}\right)$ essendo inoltre

$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$ avremo

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 2x < \frac{\pi}{2}$$

l'equazione diviene:

$$\frac{1-\cos^2 x}{2} - \frac{k}{2}\operatorname{sen} 2x + 2 - k = 0$$
$$\cos 2x + k \operatorname{sen} 2x - 5 + 2k = 0$$

Si ha il sistema:

$$\begin{cases} \cos 2x + k \operatorname{sen} 2x - 5 + 2k = 0 \\ 0 < 2x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Associando l'identità $\operatorname{sen}^2 2x + \cos^2 2x = 1$ e ponendo $\cos 2x = Y$ e $\operatorname{sen} 2x = Y$ avremo

$\cos 0 = 1 \quad \sin 0 = 0$

$\cos \dfrac{\pi}{2} = 0 \quad \sin \dfrac{\pi}{2} = 1$

il sistema assumerà la forma

$$\begin{cases} X + kY - 5 + 2k = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ 0 < X < 1;\ 0 < Y < 1 \end{cases}$$

la prima equazione rappresenta un fascio proprio di rette, la seconda la circonferenza goniometrica, le limitazioni determinano su di essa l'arco $\widehat{AB}$, aventi estremi $A(1;0)$; $B(0;1)$

Considerando la seconda equazione, bisogna trovarne le generatrici, raccogliendo $k$ otteniamo:

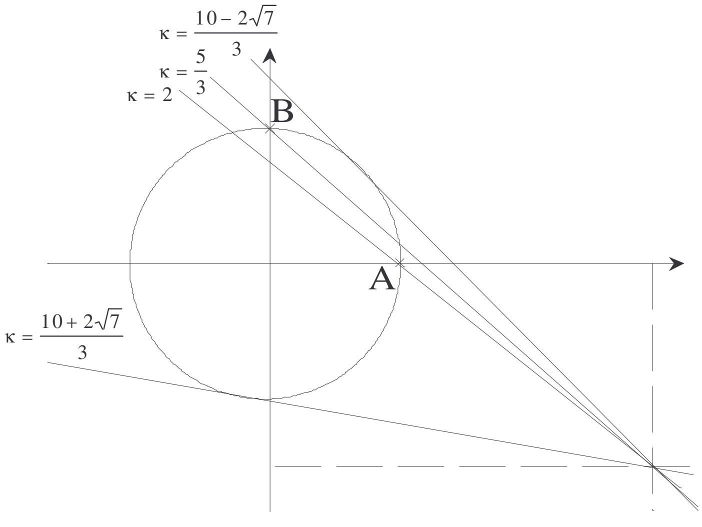
$X - 5 + (Y + 2)k = 0$

per $k = 0 \Rightarrow X - 5 = 0;\ X = 5$

per $k = \infty \Rightarrow Y + 2 = 0;\ Y = -2$

dunque il centro del fascio avrà coordinate: $C(5;-2)$

Rappresentando graficamente il sistema i punti A e B dell'arco da prendere in considerazione avremo:




Imponendo ora al fascio il passaggio per A e per B otterremo i valori che $k$ assume quando passa per questi punti, dunque:

considerando la retta: $X - 5kY + 2k = 0$ ed il punto $A(1;0)$ si avrà:

$1 - 5 + 0 + 2k = 0$

$2k = 4 \qquad k = 2$

considerando la retta: $x-5ky+2k=0$ ed il punto $B(0;1)$ otteniamo:

$0-5+k+2k=0$

$3k=5 \Rightarrow k=\frac{5}{3}$

Imponendo alla medesima retta la condizione di tangenza mediante la distanza di un punto da una retta avremo:

$$d(P;r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

considerando il punto $P(0;0)$ e la retta $x+ky-5+2k=0$, otteniamo:

$d(P;r)=\frac{(5-2k)}{\sqrt{1+k^2}}=1$ e quindi:

$(5-2k)^2=1+k^2$

$25+4k^2-20k=1+k^2$

$3k^2-20k+24=0$

$\Delta=100-72=28=2\sqrt{7}$

$k=\frac{10\pm 2\sqrt{7}}{3}$

Osservando la figura si deducono le seguenti soluzioni:

per $\frac{5}{3}\le k<2$ l'equazione avrà una sola soluzione

per $\frac{5}{3}\le k<\frac{10-2\sqrt{7}}{3}$ l'equazione avrà due soluzioni

per $k=\frac{5}{3}$ l'equazione non ammette soluzioni