DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

Disequazioni goniometriche elementari:
Si definisce disequazione goniometrica elementare un'equazione della forma $\operatorname{sen} x \gtrless m$, $\cos x \gtrless m$ dove m è un qualsiasi numero reale, poiché $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$ e $-1 \le \cos x \le 1$, una disuguaglianza fra due espressioni goniometriche che viene definita per alcuni valori che si attribuiscono agli angoli.
Esempi di disequazioni goniometriche elementari sono: (1° METODO)

Esempio 1

$$\operatorname{sen} x > -\frac{1}{2}$$

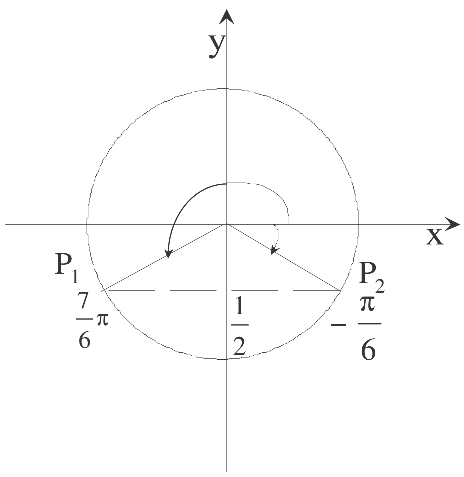
Risolvere la seguente disequazione significa determinare gli archi aventi estremo di ordinata maggiore di $-\frac{1}{2}$
associando l'equazione:

$$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$$

troviamo le soluzioni di tale equazione (che rappresentano gli estremi degli archi), che sono:

$$x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \text{ e } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

rappresentando graficamente i punti P_1 e P_2 di ordinata $-\frac{1}{2}$ otterremo:



Come è facile vedere dal grafico, la disequazione risulterà verificataper

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

(**2° Metodo**)
Tale metodo permette di risolvere una disequazione goniometrica mediante l'uso delle rappresentazioni sinusoidali e cosinusoidali delle funzioni senx e cosx. Tale metodo è comunque poco usato nelle risoluzioni di disequazioni non elementari.

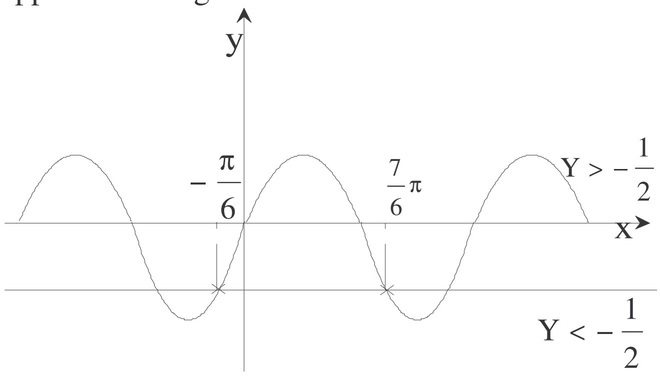
$$\operatorname{sen} x > -\frac{1}{2}$$

ponendo la seguente condizione

$$\begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ y > -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

la prima rappresenta la funzione seno che ha come grafico la sinusoide, la seconda cui va associata l'equazione $y = -\dfrac{1}{2}$ rappresenta una retta parallela all'asse *x*.

Rappresentando graficamente noteremo che:



Esempio 2

$$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

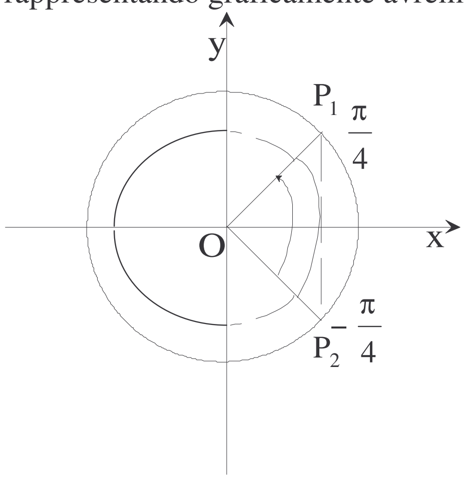
avremo:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

di cui le soluzioni sono:

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

rappresentando graficamente avremo:



La disequazione come si nota dal grafico avrà per soluzioni

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Esempio 3

$$\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

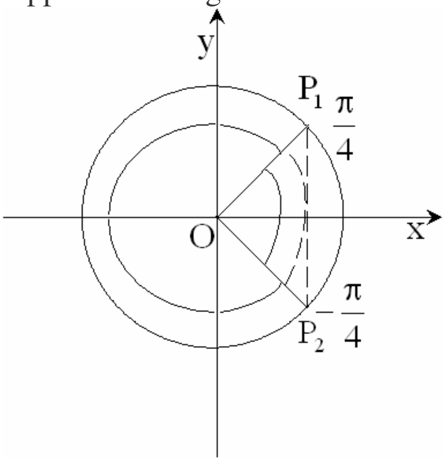
associando l'equazione avremo:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

di cui le soluzioni sono:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$$

rappresentando graficamente



La disequazione, come si nota dal grafico avrà per soluzione

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$$

DISEQUAZIONI RICONDUCIBILI A ELEMENTARI

Sono disequazioni riconducibili ad elementari tutte quelle disequazioni che attraverso abbassamento di grado o semplificazione assumono la forma $\operatorname{sen} x \lesseqgtr m$

Esempio 1

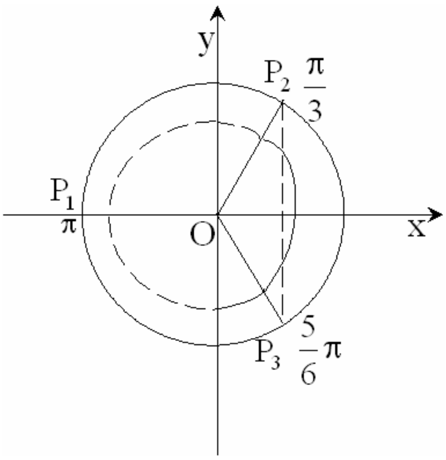
$$4\cos^2 x + 2\cos x - 2 \geq 0$$

risolvendo l'equazione di 2° grado associata, avremo:

$$\Delta = 4 + 32 \Rightarrow \Delta > 0$$

$$\cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{8} = \begin{cases} \frac{-2-6}{8} = \frac{8}{8} = -1 \\ \frac{-2+6}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases}$$ e quindi

$$\cos x \leq -1 \text{ o } \cos \geq \frac{1}{2}$$



Come si nota dal grafico la disequazione è verificata per

$$-\frac{\pi}{3}+2\kappa\pi \le x \le \frac{\pi}{3}+2\kappa\pi \vee x=\pi+2k\pi$$

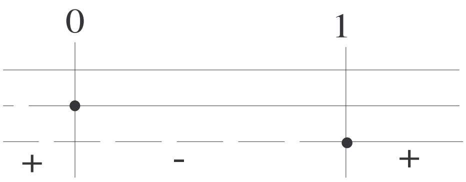
Esempio 1

$$7^{\sin^2 x}-7^{\sin x}\le 0$$

$7^{\sin^2 x}\le 7^{\sin x}$ e quindi

$$\sin^2 x-\sin x\le 0$$

$$\sin x(\sin x-1)\le 0$$



Si ha

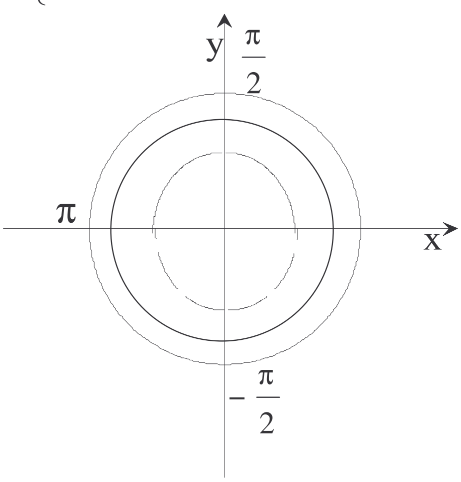
$\sin x \ge 0$

$\sin x \ge 1$ e quindi da sistemare

$0\le \sin x\le 1$

Si ha il sistema

$$\begin{cases}\sin x\ge 0\\ \sin x\le 1\end{cases}$$



Come è facile vedere dal grafico, la disequazione sarà verificata per

$$2\kappa\pi \leq x \leq \pi + 2\kappa\pi$$

DISEQUAZIONI LINEARI IN $\sin x$ **E** $\cos x$

Una disequazione lineare generica in senx e cosx avrà forma:

$$a\sin x + b\cos x + c > 0$$

se c=0 la disequazione è omogenea.
Si possono utilizzare diversi metodi per la risoluzione di tali disequazioni.

1° metodo (Risoluzione con formule parametriche)

Tale metodo può essere utilizzato supposto che $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $x \neq \pi + 2k\pi$.

le formule parametriche del seno e del coseno sono:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Esempio

$$\sin x + \cos x + 1 < 0$$

sostituendo otteniamo

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 < 0$$

attraverso vari calcoli otterremo le 2 soluzioni:

$$\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

Si ricordi che tale metodo prevede numerosi calcoli, è pertanto poco usato, consigliamo pertanto l'utilizzazione del metodo grafico.

2° Metodo (Metodo grafico)

Una equazione lineare in senx e cosx può essere risolta attraverso il metodo che consente graficamente di trovare le soluzioni.
Tale metodo consiste (come nelle equazioni) nel porre:

$$\cos x = X$$
$$\operatorname{sen} x = Y$$

dando così alla disequazione la forma:

$$X + Y + c \lesseqgtr 0$$

associando a questa l'equazione di una circonferenza goniometrica, dunque:

$$X^2 + Y^2 = 1$$

otterremo un sistema del tipo:

$$\begin{cases} X + Y + c \lesseqgtr 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

le soluzioni del sistema rappresentate graficamente, daranno le soluzioni dell'equazione.
N.B. Si ricorda che tale metodo è il più usato ed il più semplice nella risoluzione di un'equazione lineare.

Esempi:

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3} > 0$$

ponendo: $\begin{array}{l}\cos x = X \\ \text{sen } x = Y\end{array}$

e associando la circonferenza goniometrica otterremo un sistema del tipo:

$$\begin{cases} X + \sqrt{3}Y - \sqrt{3} > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

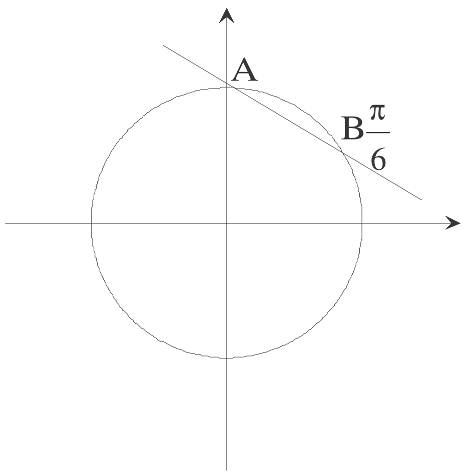
sviluppando la disequazione come un'equazione otterremo:

$$\begin{cases} X = \sqrt{3} - \sqrt{3}Y \\ 3 + 3Y^2 - 6Y + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \sqrt{3} - \sqrt{3}Y \\ 4Y^2 - 6Y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \sqrt{3} - \sqrt{3}Y \\ 2Y^2 - 3Y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \sqrt{3} - \sqrt{3}Y \\ Y = \dfrac{3 \pm 1}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{1}{2} \\ 1 \end{array} \right. \end{cases}$$

otterremo così le coordinate dei due punti: $A(0;1)$; $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$



La soluzione dell'equazione è data da.

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Esempio

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x > 0$$

poniamo

$\cos x = X \qquad \sin x = Y$

Avremo il sistema

$$\begin{cases} Y - \sqrt{3}X > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

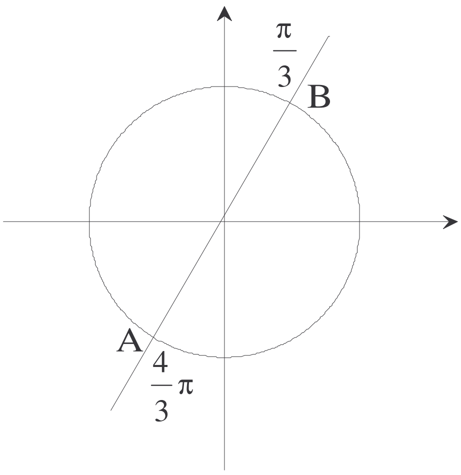
$$\begin{cases} Y = \sqrt{3}X \\ X^2 + 3X^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = \sqrt{3}X \\ 4X^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = \sqrt{3}X \\ X^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = \sqrt{3}X \\ X = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases}$$ e quindi

$$\begin{cases} Y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ X = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} Y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ X = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

otterremo così le coordinate dei due punti

$$A\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



Le soluzioni, come si nota dal grafico, sono:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

Esempio

$$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x \geq 0$$

ponendo: $\begin{matrix} \sin 2x = Y \\ \cos 2x = X \end{matrix}$ avremo

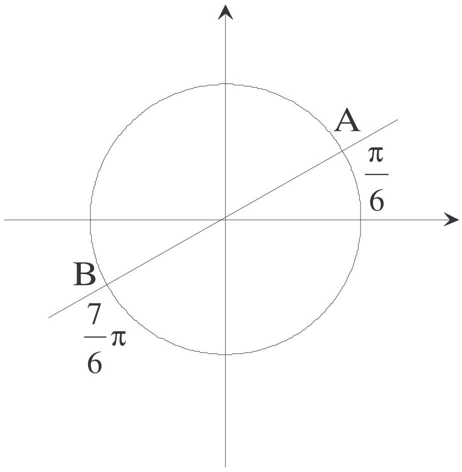
$$\begin{cases} 3Y - X \geq 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \sqrt{3}Y \\ 3Y^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \sqrt{3}Y \\ 4Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \sqrt{3}Y \\ Y^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \sqrt{3}Y \\ Y = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ Y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} X = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ Y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

otteniamo così due punti:

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right) \qquad B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$$



Le soluzioni saranno:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

Quindi:

$$\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{7}{12}\pi + k\pi$$

DISEQUAZIONI FRATTE

Esempio 1

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x}{3\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x} < 0$$

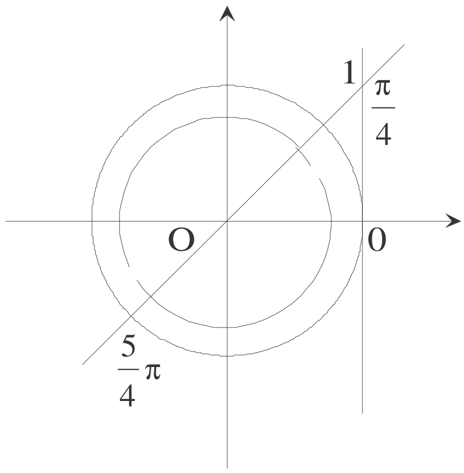
Numeratore:

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x > 0 \qquad \Delta = 1 \Rightarrow \Delta > 0$$

$$\operatorname{tg} x = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

la disequazione è verificata per intervalli esterni, dunque $\operatorname{tg} x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left]1;+\infty\right[$

rappresentando ora sulla circonferenza goniometrica avremo:



$\operatorname{tg} x > 1 \quad \text{o} \quad \operatorname{tg} x < 0$

le soluzioni sono

$$\frac{\pi}{4} < x < \pi \quad \vee \quad \frac{5}{4}\pi < x < 2\pi \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Denominatore:

$3\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x > 0$ poniamo $\sin x = Y$ $\cos x = X$

risolvendo mediante il metodo grafico abbiamo

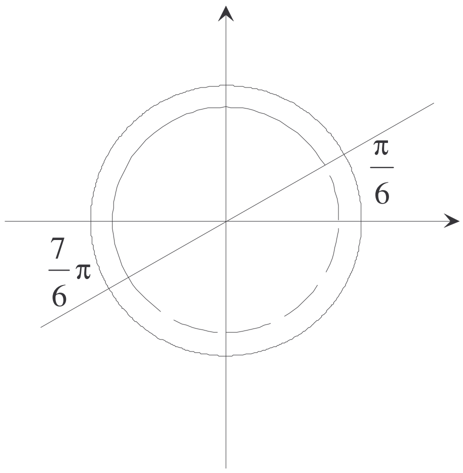
$$\begin{cases} 3Y - \sqrt{3}X = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}X \\ X^2 + \dfrac{1}{3}X^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}X \\ 4X^2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}X \\ X = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = -\dfrac{1}{2} \\ X = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} Y = \dfrac{1}{2} \\ X = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

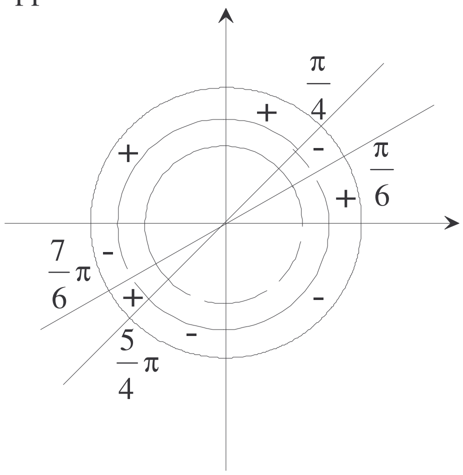
$$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \qquad B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

rappresentando graficamente, avremo:



La soluzione del denominatore è: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{7}{6}$

Rappresentando numeratore e denominatore graficamente, otterremo:



Le soluzioni della disequazione sono dunque:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < 2k\pi$$

Esempio 2

$$\frac{2\,\mathrm{sen}^2 x + 1}{\cos^2 x} < 0$$

Numeratore:

$2\,\mathrm{sen}^2 x + 1 > 0$ $\quad\quad\quad \Delta < 0$

la disequazione risulterà pertanto sempre verificata

Denominatore:

$\cos 2x > 0$

$\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x > 0$

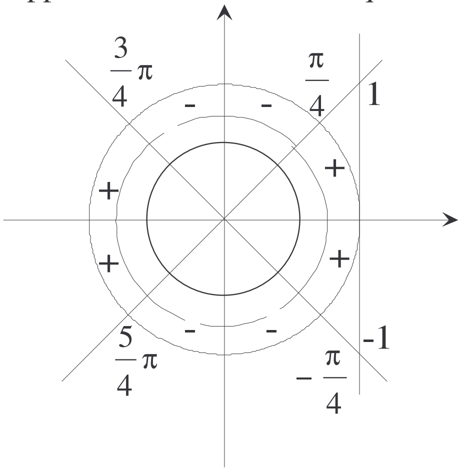
$2\cos^2 x - 1 > 0$ e quindi

$\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Le soluzioni saranno

$\frac{3}{4}\pi < x < \frac{5}{4} \quad \vee \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

rappresentando l'intera disequazione graficamente otterremo:



Le soluzioni della disequazione sono dunque: $\frac{\pi}{4}+k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi$

N.B. Come si nota dal grafico le soluzioni della disequazione sarebbero 2, $\frac{\pi}{4}+k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi \vee \frac{5}{4}\pi + k\pi < x < -\frac{\pi}{4}+k\pi$, ma essendo simmetriche una può essere omessa sostituendo a $2k\pi$ solo $k\pi$, che le comprende entrambe.