QUESITO 1

Calcolare il logaritmo complesso di

$z = -1 + i$

Avremo

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$

$\cos\vartheta = \dfrac{a}{\rho} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\vartheta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e quindi $\vartheta = \dfrac{3}{4}\pi$

essendo

$\log_C = \ln\rho + i(\vartheta + 2k\pi)$ avremo

$\log_C = \ln\sqrt{2} + i\left(\dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi\right)$

QUESITO 2

Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$|z + 5i|^2 - 3z^2 = 6\,\mathrm{Re}(z)\,\overline{z} + z + 2i$

Essendo $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$ avremo

$|x + iy + 5i|^2 - 3(x + iy)^2 = 6x(x + iy) + x + iy + 2i$

$|x + i(y + 5)|^2 - 3(x^2 + 2xyi - y^2) = 6x^2 - 6xyi + x + iy + 2i$

$x^2 + (y + 5)^2 - 3x^2 - 6xyi + 3y^2 - 6x^2 + 6xyi - x - iy - 2i = 0$

$-8x^2 + y^2 + 10y + 25 + 3y^2 - x - iy - 2i = 0$

$-8x^2 + 4y^2 + 10y - x + 25 - i(y + 2) = 0$

Considerando la parte reale e la parte immaginaria avremo

$\begin{cases} -8x^2 + 4y^2 + 10y - x + 25 = 0 \\ y + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -2 \end{cases}$ quindi

$-8x^2 + 16 - 20 + 25 - x = 0$

$8x^2 + x - 21 = 0$

$\Delta = 1 + 672 = 673$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{673}}{16} \qquad y = -2$

Avremo quindi

$z_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{673}}{16} - 2i \qquad z_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{673}}{16} - 2i$

QUESITO 3

Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$$6z^3+5|z|^2=6[\mathrm{Im}(z)]^2 \quad \text{(con Im z parte immaginaria del numero complesso)}$$

essendo $z=x+iy$ avremo

$$6(x+iy)^3+5|x+iy|^2-6y^2=0$$
$$6(x^3+3x^2yi-3xy^2-iy^3)+5(x^2+y^2)-6y^2=0$$
$$6x^3+18x^2yi-18xy^2-6iy^3+5x^2+5y^2-6y^2=0$$
$$6x^3-18xy^2+5x^2-y^2+i(18x^2y-6y^3)=0$$

Considerando la parte reale e la parte immaginaria avremo

$$\begin{cases}6x^3-18xy^2+5x^2-y^2=0\\18x^2y-6y^3=0\end{cases}$$
$$\begin{cases}6x^3-18xy^2+5x^2-y^2=0\\y(3x^2-y^2)=0\end{cases}$$

Dalla seconda equazione del sistema si ha

$$y=0 \qquad y=\pm\sqrt{3}x$$

Sostituendo $y=0$ otteniamo

$$6x^3+5x^2=0$$
$$x^2(6x+5)=0 \quad\Rightarrow\quad x=0 \quad x=-\frac{5}{6}$$

Sostituendo $y=\pm\sqrt{3}x$ otteniamo

$$6x^3-54x^3+5x^2-3x^2=0$$
$$-48x^3+2x^2=0$$
$$x^2(-24x+1)=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{24}$$

quindi $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{24}$

Le soluzioni sono

$$z_1=0 \quad z_2=-\frac{5}{6} \quad z_3=\frac{1}{24}-\frac{\sqrt{3}}{24}i \quad z_4=\frac{1}{24}+\frac{\sqrt{3}}{24}i$$

QUESITO 4

Determinare le soluzioni dell'equazione

$$12z^3+6|z|^2=7[\mathrm{Im}(z)]^2$$

essendo $z=x+iy$ avremo

$$12(x+iy)^3+6|x+iy|^2-7y^2=0$$
$$12(x^3+3x^2yi-3xy^2-iy^3)+6(x^2+y^2)-7y^2=0$$

$$12x^3 + 36x^2 yi - 36xy^2 - 12iy^3 + 6x^2 + 6y^2 - 7y^2 = 0$$
$$12x^3 - 36xy^2 + 6x^2 - y^2 + i(36x^2 y - 12y^3) = 0$$

Considerando la parte reale e la parte immaginaria avremo

$$\begin{cases} 12x^3 - 36xy^2 + 6x^2 - y^2 = 0 \\ 3x^2 y - y^3 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione del sistema si ha

$y(3x^2 - y^2) = 0$ e quindi

$y = 0 \quad y = \pm\sqrt{3}x$

Sostituendo nella prima equazione del sistema otteniamo

Per $y = 0$

$$12x^3 + 6x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \qquad x = -\frac{1}{2}$$

Sostituendo $y = \pm\sqrt{3}x$ avremo

$$12x^3 - 108x^3 + 6x^2 - 3x^2 = 0$$
$$-96x^3 + 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \qquad x = \frac{1}{32}$$

Le soluzioni dell'equazione sono

$$z_1 = 0 \qquad z_2 = -\frac{1}{2} \qquad z_3 = \frac{1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i \qquad z_4 = \frac{1}{32} + \frac{\sqrt{3}}{32}i$$

QUESITO 5

Risolvere l'equazione

$$4z^2 - |z + 3i|^2 - z + i + 8\,\mathrm{Re}(z)\overline{z} = 0$$

Essendo $z = x + iy \quad \overline{z} = x - iy$ Re(z) parte reale di z avremo

$$4(x+iy)^2 - |x + iy + 3i|^2 - x + iy + i + 8x(x - iy) = 0$$
$$4x^2 + 8xyi - 4y^2 - |x + i(y+3)|^2 - x - iy + i + 8x^2 - 8xyi = 0$$
$$12x^2 - 4y^2 - x^2 - (y+3)^2 - x - iy + i = 0$$
$$11x^2 - 5y^2 - 6y - x - 9 + i(1 - y) = 0$$

avremo quindi

$$\begin{cases} 11x^2 - 5y^2 - 6y - x - 9 = 0 \\ 1 - y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \end{cases}$$

Sostituendo avremo

$$11x^2 - x - 20 = 0$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{881}}{22}$$

Otteniamo

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{881}}{22} \qquad y = 1$$

Le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{1-\sqrt{881}}{22} + i \qquad z_2 = \frac{1+\sqrt{881}}{22} + i$$

QUESITO 6

Scrivere in forma esponenziale il numero complesso

$$z = \frac{-1+i}{1-\sqrt{3}\, i}$$

si ha

$$z = \frac{-1+i}{1-\sqrt{3}\, i} = \frac{(-1+i)(1-\sqrt{3}\, i)}{1-3\, i^2} = \frac{-1-\sqrt{3}\, i + i - \sqrt{3}}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})\, i}{4}$$

considerando il numero complesso

$-1-\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})\, i$ avremo

$$\rho = \sqrt{(-1-\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

inoltre, essendo

$$\cos\vartheta = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\vartheta = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$ otteniamo

$$\vartheta = \frac{13}{12}\pi$$

avremo quindi

$$z = \frac{2\sqrt{2}}{4} e^{i\left(\frac{13}{12}\pi + 2k\pi\right)}$$

QUESITO 7

Scrivere in forma esponenziale il numero complesso

$$z = \frac{2}{(1-i)^2}$$

si ha

$$z = \frac{2}{(1-i)^2} = \frac{2}{1-2\,i-1} = -\frac{2}{2\,i} = i$$

essendo

$\rho = 1 \qquad \cos\vartheta = 0 \qquad \sin\vartheta = 1$ avremo $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

e quindi

$$z = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$$

Calcolare il logaritmo complesso di

$$z = \frac{i}{1+i}$$

si ha

$$z = \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{2} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

essendo

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\vartheta = \sin\vartheta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ avremo $\vartheta = \frac{\pi}{4}$

e quindi

$$\log_C z = \ln\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$