Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = -\frac{1}{\ln(\operatorname{arctg} x + 1)}$$

Dominio della funzione

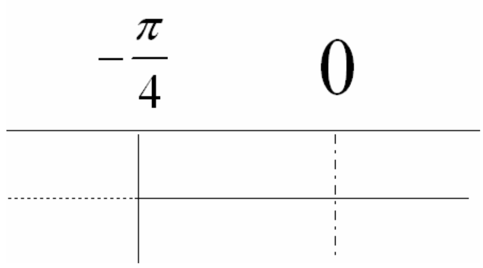
Avremo

$$\begin{cases} \operatorname{arctg} x + 1 > 0 \\ \ln(\operatorname{arctg} x + 1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} x > -1 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{\pi}{4}$$

$$\ln(\operatorname{arctg} x + 1) = \ln 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Si ha il grafico



Il dominio sarà

$$\operatorname{dom} f = \left]-\frac{\pi}{4}; 0\right[\cup \left]0; +\infty\right[$$

Studio del segno

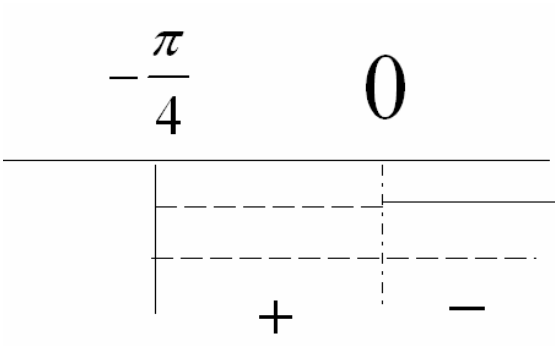
$$-\frac{1}{\ln(\operatorname{arctg} x + 1)} > 0$$

avremo

$$\ln(\operatorname{arctg} x + 1) > 0$$

$$\ln(\operatorname{arctg} x + 1) > \ln 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$$

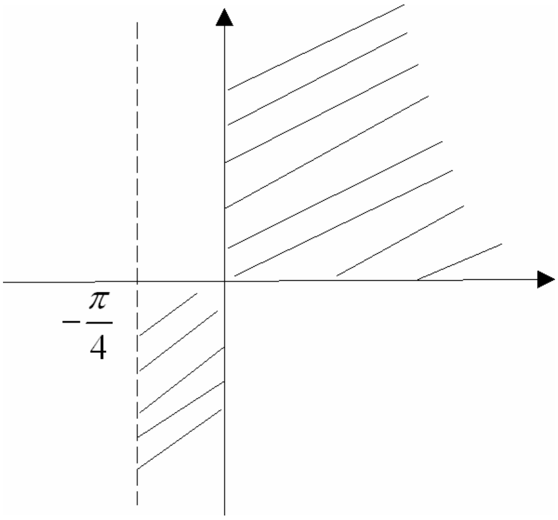
Si ha il grafico



Avremo

$f(x) > 0 \quad \text{per} \quad -\frac{\pi}{4} < x < 0$

$f(x) < 0 \quad \text{per} \quad x > 0$



Condizioni agli estremi

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}^+} -\frac{1}{\ln(\operatorname{arctg} x + 1)} = -\frac{1}{\ln\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{\pi}{4}^+\right) + 1\right]} = -\frac{1}{\ln(-1^+ + 1)} = -\frac{1}{\ln 0^+} = 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{\ln(\operatorname{arctg} x + 1)} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{\ln\left[\operatorname{arctg} 0^- + 1\right]} = -\frac{1}{\ln(1^-)} = -\frac{1}{0^-} = +\infty$$

analogamente

$$\lim_{x \to 0+} -\frac{1}{\ln(\operatorname{arctg} x + 1)} = -\frac{1}{\ln(1^+)} == -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

la retta $x = 0$ è un asintoto verticale

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\ln(\operatorname{arctg} x+1)} = -\frac{1}{\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)}$$

la retta $y = -\frac{1}{\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)}$ è un asintoto orizzontale destro

Studio derivata prima

$$y' = \frac{\frac{1}{\operatorname{arctg} x+1}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\ln^2(\operatorname{arctg} x+1)} = \frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(\operatorname{arctg} x+1\right)\ln^2(\operatorname{arctg} x+1)} \geq 0$$

$1+x^2$ sempre positiva

$\ln^2(\operatorname{arctg} x+1)$ sempre positiva

$\operatorname{arctg} x+1>0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} x>-1 \quad \Rightarrow \quad x>-\frac{\pi}{4}$

Pertanto la funzione è strettamente crescente

Omettiamo lo studio della derivata seconda

Il grafico della funzione sarà