Quesito

Si consideri la funzione

$f : T \longrightarrow \mathbb{R}$

definita da $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ dove $T = [0;1]$

- Dimostrare che la f ammette una funzione inversa $f^{-1}(x)$ definita nell'intervallo $[0;1]$; tracciare nello stesso riferimento le curve rappresentative di f ed f^{-1}.
- Calcolare l'area S del dominio limitato dalla curva rappresentativa di f e dall'asse x con $x \in [0;1]$

(Baccaleraut 1970)

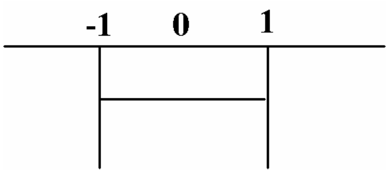
Soluzione

Per verificare se la funzione f ammette la funzione inversa in T, basta dimostrare che è strettamente crescente o strettamente decrescente in T. Si ha

$$f'(x) = \frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2(1-x^2)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Avremo

$$1-x^2 \geq 0 \quad x^2-1 \leq 0$$
$$x = \pm 1$$



Nell'intervallo $[0;1]$ la $f(x)$ è strettamente crescente, pertanto è invertibile.

Calcoliamo la funzione inversa

$$y = \frac{2x}{x^2+1}$$
$$\left(x^2+1\right)y = 2x$$
$$x^2y - 2x + y = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}$$

poiché la funzione inversa è definita in $[0;1]$ avremo

$$x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$$

scambiando x con y e viceversa otteniamo

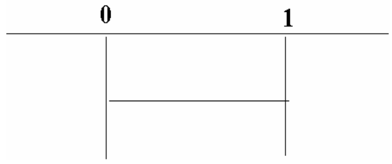
$$f^{-1} = y = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Studio della funzione $f(x)$

$$y = \frac{2x}{x^2+1}$$

studio del segno

$$\frac{2x}{x^2+1} > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0 \quad \text{e quindi}$$



$x > 0$ in T

per $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad O(0;0)$

per $x = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad A(1;1)$

per quanto riguarda la derivata prima, sappiamo che la funzione è strettamente crescente.

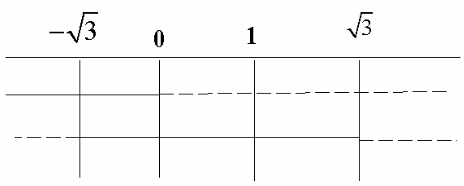
Studio della derivata seconda

$$y'' = 2\frac{-2x(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4}$$

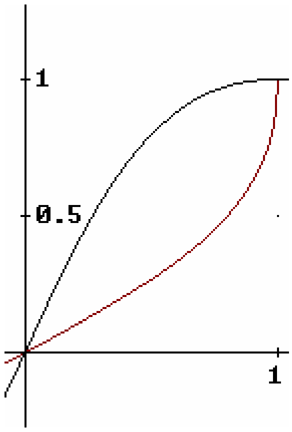
$$y'' = -4x\frac{(x^2+1)(x^2+1+2-2x^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$y'' = -4x\frac{(x^2+1)(-x^2+3)}{(x^2+1)^3} \qquad \text{si ha}$$

$x \le 0$ ed $x^2 - 3 \le 0$ e quindi



Il grafico di f^{-1} sarà simmetrico del grafico di *f* rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



Si ha inoltre

$$S = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \ln 2$$