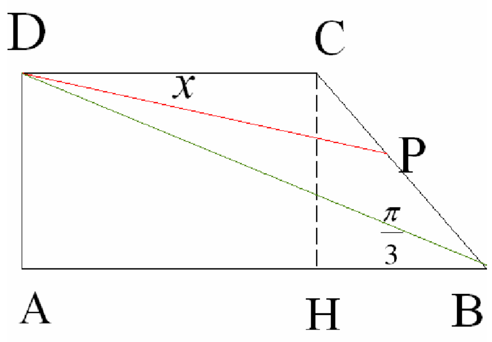
Problema 1

Consideriamo il trapezio ABCD rettangolo in A e D, sapendo che la base minore CD è uguale al lato obliquo BC e che l'angolo $A\hat{B}C = \frac{\pi}{3}$, determinare sul lato obliquo CB un punto P in maniera che risulti verificata la seguente relazione

$DP + CP = k\ DC$ con $k \in \mathbb{R}_0^*$

Svolgimento



Poniamo

$$C\hat{D}P = x$$

Poiché il triangolo rettangolo BCA ha un angolo la cui ampiezza è $\frac{\pi}{3}$ è la metà di un triangolo equilatero, si ha quindi

$$H\hat{C}B = \frac{\pi}{6}$$

l'angolo $D\hat{C}P$ sarà

$$D\hat{C}P = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi + \pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

L'angolo $D\hat{P}C$ sarà quindi

$$D\hat{P}C = \pi - \left(\frac{2\pi}{3} + x\right) = \pi - \frac{2\pi}{3} - x = \frac{\pi}{3} - x$$

Il triangolo DBC è isoscele sulla base BD, pertanto l'angolo $C\hat{D}B$ sarà

$$C\hat{D}B = \frac{\pi - \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Per cui l'angolo x varierà da

$$0 \le x \le \frac{\pi}{6}$$

Applicando il teorema dei seni al triangolo CDP avremo, indicando per comodità DC = l

$$\frac{DP}{\sin D\hat{C}P} = \frac{DC}{\sin D\hat{P}C}$$

$$\frac{DP}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{l}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$$

essendo

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ avremo

$$DP = \frac{l}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Inoltre dal triangolo CDP avremo

$$\frac{CP}{\sin x} = \frac{DC}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$$ da cui

$$CP = \frac{l}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)} \sin x$$

sostituendo in

$$DP + CP = k\ DC$$ otteniamo

$$\frac{l}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{l}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)} \sin x = kl$$ e quindi

$$\sqrt{3} + 2\sin x = 2k \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$2\sin x + \sqrt{3} - 2k\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right) = 0$$

$$2\sin x + \sqrt{3} - k\sqrt{3}\cos x + k\sin x = 0$$

otteniamo quindi il sistema

$$\begin{cases} (2+k)\sin x - k\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} = 0 \\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

considerando la relazione fondamentale avremo

$$\begin{cases} (2+k)\sin x - k\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} = 0 \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

Ponendo $\cos x = X$ $\sin x = Y$ avremo

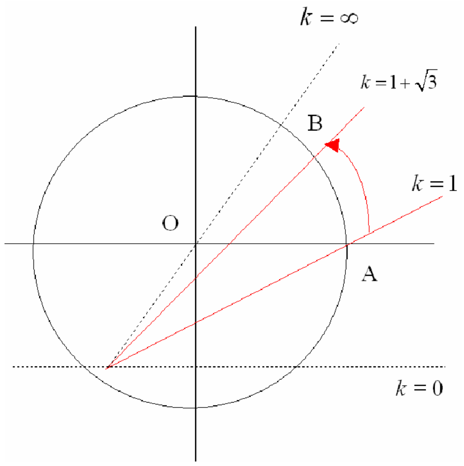
$$\begin{array}{ll} \cos 0 = 1 & \Rightarrow X = 1 \\ \sin 0 = 0 & \Rightarrow Y = 0 \end{array} \quad \Rightarrow A(1,0)$$

$$\begin{array}{ll} \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \Rightarrow X = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} & \Rightarrow Y = \dfrac{1}{2} \end{array} \quad \Rightarrow B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$$

Il sistema diviene

$$\begin{cases} (2+k)Y - k\sqrt{3}X + \sqrt{3} = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La seconda equazione rappresenta una circonferenza avente centro nell'origine e raggio 1



La prima equazione rappresenta un fascio di rette avente centroproprio C

$$2Y + kY - k\sqrt{3}X + \sqrt{3} = 0$$
$$2Y + \sqrt{3} + k(Y - \sqrt{3}X) = 0$$

si ha quindi il sistema

$$\begin{cases} 2Y + \sqrt{3} = 0 & per\ k = 0 \\ Y - \sqrt{3}X = 0 & per\ k = \infty \end{cases}$$

si ha $Y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e quindi

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}X = 0 \quad \Rightarrow \quad X = -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2}$ le coordinate del centro sono

$$C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Avremo quindi

1) La retta

$$(2+k)Y - k\sqrt{3}X + \sqrt{3} = 0 \qquad (1)$$

passa per $A(1,0)$

$$-k\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0 \qquad \Rightarrow k = 1$$

2) la retta (1) passa per $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

$$(2+k)\frac{1}{2} - k\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = 0$$
$$2 + k - 3k + 2\sqrt{3} = 0$$
$$-2k + 2 + 2\sqrt{3} = 0$$
$$k = 1 + \sqrt{3}$$

La retta non risulta tangente alla circonferenza in punti che appartengono all'arco AB

Avremo pertanto che il sistema misto ammette una soluzione per

$$k \in \left[1; 1+\sqrt{3}\right]$$