EQUAZIONE FONDAMENTALE DELLA STATICA DELL'ATMOSFERA

Sommario

In queste note cercheremo di ricavare l'equazione fondamentale della statica dell'atmosfera.

Il punto di partenza è rappresentato dalla statica, cioè quella parte della fisica che si occupa del comportamento dei corpi in quiete.

In meteorologia si considera, per semplificarne lo studio, un'atmosfera teorica in quiete rispetto alla Terra, ovvero priva di moto, le cui superfici isobariche sono tutte parallele alla superficie terrestre supposta priva di rugosità (il che equivale a dire che, considerato un punto qualsiasi appartenente ad una determinata superficie isobarica, l'altezza rispetto alla superficie considerata piana sarà sempre la medesima). Tale atmosfera viene definita barotropica (Fig. 1a).

Se le superfici isobariche vengono invece considerate inclinate, come avviene nella realtà, a causa delle differenze di temperatura e di densità tra strato e strato, si parla di atmosfera baroclina (Fig. 1b).

L'equazione che cerchiamo parte proprio dall'atmosfera barotropica.

Nella matematica, per indicare variazioni piccolissime di una certa grandezza, così piccole da non poter essere espresse da alcun numero, per quanto piccolo, ossia per le cosiddette variazioni infinitesimali si usa la lettera **d** seguita dal simbolo della variabile che subisce le variazioni.

Per esempio se con **p** si indichiamo la pressione, una piccolissima variazione di pressione si indicherà **dp**; se con **z** indichiamo una lunghezza, **dz** identificherà una sua variazione infinitesimale.

Se da valori infinitamente piccoli si vuole passare a differenze finite ovvero rappresentabili con numeri, useremo la lettera greca maiuscola Δ (delta). Perciò **Δp** rappresenterà una variazione finita di pressione.

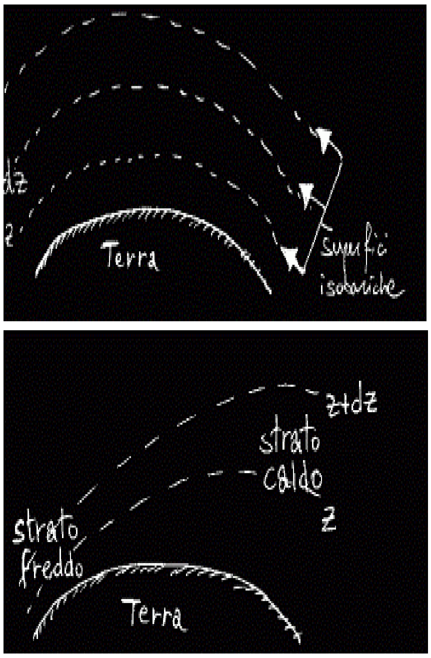

Fig. 1 . Atmosfera barotropica ed atmosfera baroclina.

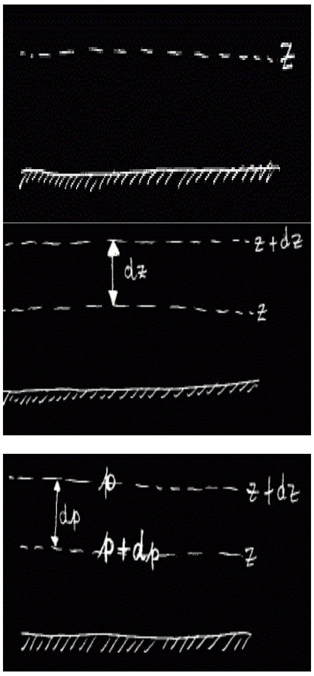

Fig. 2 superfici isobariche.

Determinazione dell'equazione fondamentale della statica dell'atmosfera

Cominciamo col considerare una superficie isobarica posta ad una quota z rispetto alla superficie terrestre (Fig. 2a). Un piccolo incremento di quota, dz, ci farà innalzare alla superficie isobarica posta a z+dz (Fig. 2b).

Dai nostri precedenti studi sappiamo che la pressione diminuisce man mano che ci si allontana dalla Terra, per cui, se alla quota z+dz essa è p, alla quota z (più vicina alla Terra) la pressione sarà leggermente più alta, ovvero sarà p+dp (Fig. 2c).

Riassumendo, avremo: alla quota z, la pressione p+dp
alla quota z+dz, la pressione p

Quando abbiamo studiato la distribuzione della pressione al suolo, abbiamo visto che, se esiste una differenza di pressione, esiste anche una forza, chiamata di gradiente, che è orientata dalle alte verso le basse pressioni (Fig. 3).

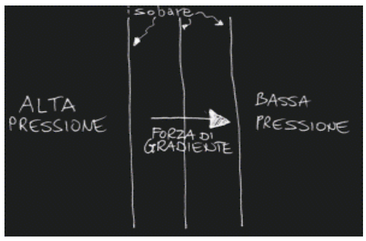

Fig. 3 Forza di gradiente.

Esaminiamo ora un cilindro di aria con base unitaria, avente la faccia inferiore posta alla quota z, e quella superiore alla quota z+dz (Fig. 4a).

Trovandosi le due facce a quote differenti, la pressione sarà differente su ciascuna delle due facce, e precisamente sarà più elevata sulla faccia inferiore (p+dp) e minore sulla faccia superiore (p) (Fig. 4b).

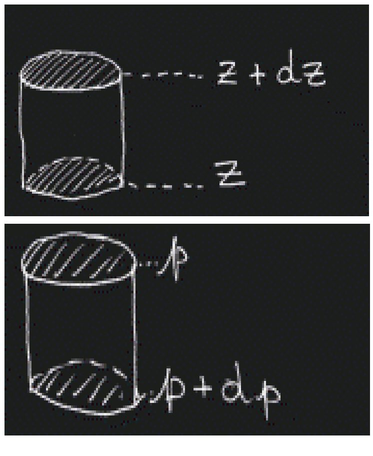

Fig. 4 Cilindro di aria.

Poiché tra le due facce del cilindro esiste una differenza di pressione, vi sarà pure una forza di gradiente G, diretta verticalmente da z verso z+dz, ovvero dalla pressione p+dp verso la pressione p (figura 5a).

Se è vero che il cilindro è in quiete, ed è vero perché siamo partiti proprio da questo presupposto, se esiste questa forza G, vi dovrà essere una forza di uguale intensità che si contrappone ad essa. Questa forza esiste, ed è la forza peso P, diretta verticalmente verso il basso (figura 5b).

Possiamo esprimere questa contrapposizione scrivendo:

$$\mathbf{G = -P}$$

dove il segno meno è dovuto al fatto che le due grandezze sono uguali in intensità, ma hanno verso opposto.

La grandezza di G è espressa proprio dalla differenza di pressione, ovvero dp. Parlando di forze, il secondo principio della dinamica ci può senz'altro aiutare.

Esso afferma che una forza F è pari prodotto della massa m per l'accelerazione a, cioè:

EQUAZIONE FONDAMENTALE DELLA STATICA DELL'ATMOSFERA

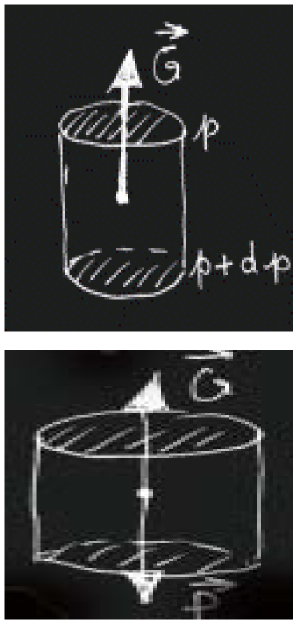

Fig. 5 Il gradiente ed il ruolo della pressione come forza di opposizione al gradiente.

$$F = m\,a$$

Il peso di un corpo, essendo una forza, può essere pertanto espresso con

$$P = m\,g$$

dove g è l'accelerazione di gravità.

Possiamo a questo punto esaminare la forza peso di un corpo in relazione alla sua densità. Basta ricordare che la densità esprime il rapporto tra massa e volume in cui tale massa è contenuta:

$$\rho = m/V$$

A partire da questa relazione possiamo ricavarci la massa ($m= \rho\ V$). Perciò possiamo scrivere:

$$P = m\,g$$

e sostituire m con la relazione trovata:

$$P = \rho\ V\ g.$$

Così facendo siamo riusciti ad esprimere la forza peso P in funzione della densità del corpo anziché della sua massa. Dalla espressione ricavata si vede chiaramente che se aumenta la densità aumenterà la forza peso (proporzionalità diretta).

Se la base del nostro cilindro è unitaria (cioè uguale a 1), il suo volume V sarà dato dal prodotto area della base per l'altezza ovvero:

$$V = 1\ dz = dz$$

Pertanto:

$$P = \rho\ V\ g$$

e, sostituendo V con dz, diventerà:

$$P = \rho\ dz\ g.$$

A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti necessari per ricavare l'equazione cercata.

$$G = dp$$

$$P = \rho\ g\ dz$$

per cui, se $G = -P$, ne segue che:

$$dp = -\ \rho\ g\ dz$$

che rappresenta l'equazione fondamentale della statica dell'atmosfera, ovvero la legge che governa il cilindro d'aria in quiete.
Il gradiente barico verticale sarà dato da:

$$dp/dz = -\rho\ g$$

che rappresenta la legge di diminuzione della pressione al crescere dell'altezza. In termini di differenze finite possiamo scrivere

$$\Delta p = -\rho\ g\ \Delta z.$$

Considerazioni finali

Dall'esame dell'equazione che esprime il gradiente barico verticale

$$dp/dz = -\rho\ g$$

possiamo trarre alcune considerazioni finali. Innanzitutto dp/dz lega la variazione di pressione con la variazione di altezza. Questa variazione dipende dalla densità e dall'accelerazione di gravità, che può essere assunta come costante.

Si può concludere osservando che la pressione varia lungo la verticale in funzione della densità e, in definitiva, in relazione alla temperatura dell'aria.

Riferimenti Bibliografici

- Accademia navale di Livorno "Corso di meteorologia", Livorno
- Barry, Chorley "Atmosphere, weather & climate" Ed. Routledge, Londra
- Halliday Resnick Krane "Fondamenti di Fisica" Ed. Ambrosiana
- http//digilander.iol.it/vvillas
- Istituto Idrografico della Marina "Manuale dell'Ufficiale di Rotta"
- Sannino "Meteorologia Nautica" Ed. Italibri