Su alcuni aspetti delle curve funicolari

Come si rompono gli archi a tutto sesto

Corrado Brogi

Riferiamoci ad un sistema di assi coordinati ortogonali con l'asse y verso il basso e proponiamoci di trovare l'arco di catenaria avente la corda il doppio della freccia.

Siano: A e B gli estremi dell'arco di catenaria, V il vertice e C il punto medio di $\overline{AB}$ ove $\overline{CA} = \overline{CB} = \overline{CV}$; sia a il modulo della catenaria ed avremo:

$$(y_A - a) = (y_B - a) = \chi_B = -\chi_A = \left(a \cosh\left(\frac{\chi_B}{a}\right) - a\right)$$

$$\cosh(\chi_B/a) - 1 = (\chi_B/a)$$

$$\text{versh}(\chi_B/a) = (\chi_B/a)$$

$$\text{raversh}(\chi_B/a) = 1$$

Dalle tavole [1]) che riportano « raversh x » abbiamo:

$\overline{CV}/a = x/_B a = 1.616137513780 \quad y_B/a = 2,616137513780$

Per AVB passerà anche un cerchio con centro in C che in AVB formerà un arco a tutto sesto in estradosso alla catenaria. Con lo stesso centro C, in intradosso alla catenaria, vi sarà un cerchio tangente interno alla catenaria determinabile dalla condizione di avere per raggio la minima distanza di C dai punti della catenaria stessa. Detta D tale distanza avremo:

$$\left(\frac{D}{a}\right)^2 = \left(\frac{y_C}{a} - \frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

uguagliando a zero la derivata prima rispetto ad $\left(\frac{x}{a}\right)$

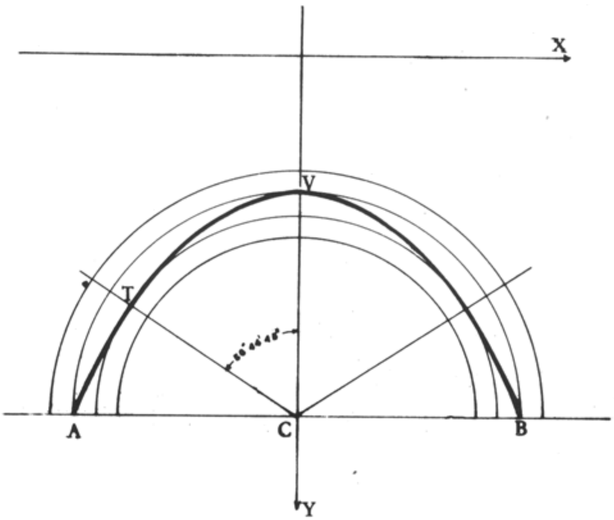

Fig. 1.

otteniamo:

$$\left[\frac{y_C}{a} - \cosh\left(\frac{x_T}{a}\right)\right]\left[-\text{senh}\left(\frac{x_T}{a}\right)\right] + \frac{x_T}{a} = O$$

ove $\pm x_T$ sono le ascisse dei punti di tangenza.

---

[1]) Cfr. Bollettino Ingegneri N. 12 anno 1972.

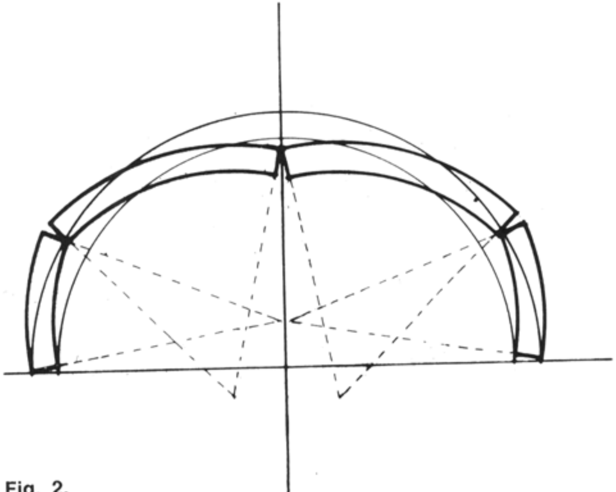

Fig. 2.

$$\left(\frac{x_T}{a}\right) = 1{,}208563606297$$

$$\left(\frac{y_T}{a}\right) = 1{,}823642551020$$

$$D_{CT} = 1{,}445221348635$$

$$\operatorname{senh}\left(\frac{x_T}{a}\right) = 1{,}525022635125 = \operatorname{tang}\ \alpha$$

$$\alpha = 56^\circ\ 44'\ 45'',\ 6842112$$ [2])

Poiché i raggi d'estradosso ed intradosso alla catenaria sono rispettivamente:

$$R_1/a = 1{,}616137513780$$

$$R_2/a = 1{,}445221384635$$

$$\frac{R_1 - R_2}{a} = 0{,}170916165145$$

Poiché, nel caso della parete [3]), la catenaria è anche il poligono funicolare limite, cioè la funicolare del carico uniformemente distribuito lungo la catenaria stessa, cioè comprende quella porzione di parete sovrastante che è delimitata dall'asse delle ascisse e dalla catenaria in esame [4]), ricordando la verifica del Mery sulla stabilità di archi e di volte; assunto $(R_1 - R_2)/a$ come spessore del terzo medio di un arco, resta dimostrato che i punti critici di rottura di un arco a tutto sesto, nelle suddette condizioni di carico, sono: la chiave, le imposte, e due punti individuati dai raggi inclinati di $56^\circ\ 44'\ 45''$, 6842112 rispetto alla verticale. (Molti testi di scienza delle costruzion arrotondano a 60° il valore di tale angolo che in effetti, è variabile con la distribuzione del carico).

---

[2]) Si noti che la retta tangente alla catenaria ed uscente dall'origine degli assi forma con l'asse x un angolo di 56°27′57″ cioè differisce di 16′48″! dalla retta tangente in T.

[3]) Cfr. Bollettino Ingegneri N. 2/3 anno 1977 pag. 26 II colonna.

[4]) La funicolare dei carichi distribuiti $q_{(x)} = f_{(x)}$ è espressa dall'equazione: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{C(\cdot)}{H}$; (ove H = distanza polare).