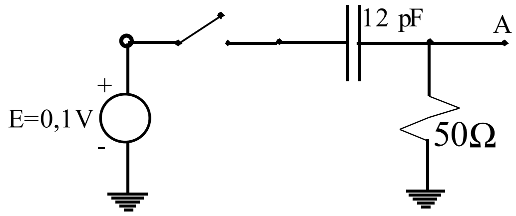
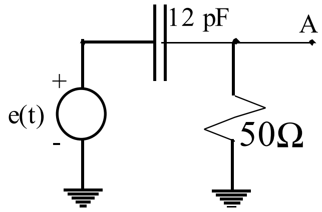
Indice delle esercitazioni

(Ing. Fazzi)

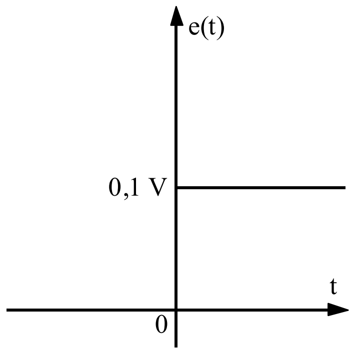
Transitorio di sistemi a singola costante di tempo.
Si consideri il circuito rappresentato nella figura seguente



e si valuti l'andamento della tensione al nodo A sapendo che al tempo zero l'interruttore viene chiuso e che il condensatore era inizialmente scarico.
La chiusura dell'interruttore può essere rappresentata tramite l'inserimento di un generatore di tensione con andamento variabile nel tempo:



Dove l'andamento della funzione e(t) sia quello rappresentato nel grafico seguente:



Sfruttiamo ora l'equazione di Kirchhoff alla maglia e otteniamo la seguente espressione:

$$e(t) = v_C + v_R \tag{1}$$

ovvero, ricordando le espressioni caratteristiche del condensatore e del resistore:

$$e(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt + Ri(t)$$

Deriviamo ora rispetto al tempo e otteniamo:

$$0 = \frac{1}{C}i(t) + R\frac{di(t)}{dt}$$

Dividendo poi per la resistenza si ricava:

$$0 = \frac{1}{RC}i(t) + \frac{di(t)}{dt}$$

Abbiamo così ottenuto una equazione differenziale che può essere così risolta:

$$i(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} \tag{2}$$

Per trovare la costante K sfruttiamo la relazione (1) che combiniamo con la condizione al contorno, ottenendo:

$$e(0) = v_R$$

ovvero:

$$v_R(0) = 0{,}1V$$

Sfruttando dunque la legge di Ohm applicata al resistore otteniamo il valore della corrente all'istante iniziale (che corrisponde alla costante K:

$$i(0)=\frac{v_R(0)}{R}=\frac{0{,}1V}{50\Omega}=2mA$$

La relazione (2) diventa allora:

$$i(t)=(2mA)e^{-\frac{t}{RC}}$$

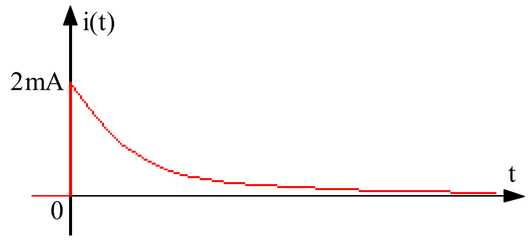
Valutiamo infine la costante temporale che sarà:

$$RC=\tau=(12pF)(50\Omega)=600ps$$

e quindi, complessivamente, la relazione che esprime l'andamento della corrente sarà il seguente:

$$i(t)=(2mA)e^{-\frac{t}{(0{,}6ms)}}$$

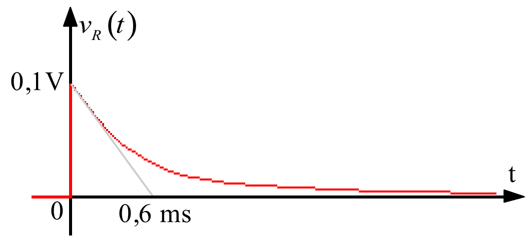
L'andamento della corrente sarà dunque espresso dal seguente grafico:



Conoscendo l'andamento della corrente posso sfruttare la relazione di Ohm per il resistore ed ottenere l'andamento della tensione sul resistore che, come si nota, equivale alla tensione che si misura tra il nodo A ed il nodo di massa; si ricava così:

$$v_R(t)=Ri(t)=(50\Omega)(2mA)e^{-\frac{t}{(0{,}6ms)}}$$

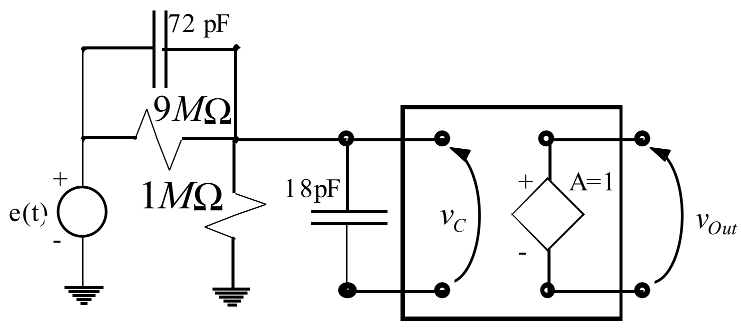
il cui grafico sarà il seguente:



Come si nota la costante temporale τ è geometricamente rappresentata dall'intersezione della tangente alla curva con il valore asintotico.

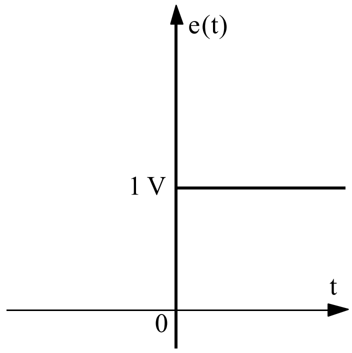
Da questo esercizio abbiamo avuto modo di trarre la notazione caratteristica dei circuiti elettronici che (a differenza dei circuiti visti nel corso di elettrotecnica) non sono espressi come circuiti chiusi ma sono espressi sempre in riferimento ad un nodo di massa. Si può inoltre affermare che questo discorso, valido nel caso di circuito CR, può essere applicato in maniera assolutamente identica anche nel caso di circuito RC.

<u>*Dato il seguente modello della sonda di un oscilloscopio (ovvero la sonda di un lettore di tensione)*</u>

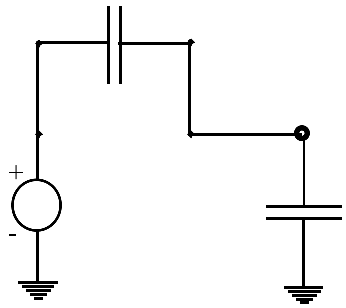


<u>*si valuti la risposta del circuito (ovvero l'andamento della tensione di uscita) ad un segnale di ingresso dato dal primo grafico della pagina seguente.*</u>

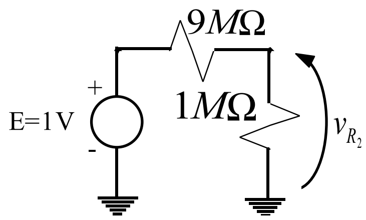
Decidiamo di risolvere il problema senza risolvere effettivamente il circuito ovvero senza cercare l'equazione differenziale che esprima la soluzione; valuteremo dunque gli andamenti della grandezze che ci interessano all'inizio del transitorio ed a transitorio finito e dedurremo da queste l'andamento.



Il circuito fornito presenta due condensatori, ovvero due elementi attivi, il fatto però che, come si vede nell'immagine seguente, sia possibile costruire una maglia che contiene i due condensatori, implica che i due elementi attivi non siano indipendenti l'uno dall'altro e quindi il circuito in questione è ancora del primo ordine.



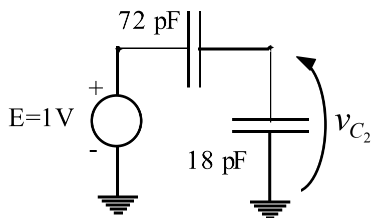
Osserviamo inoltre che, siccome il generatore di tensione pilotato in tensione produce una tensione uguale alla tensione che lo pilota (il coefficiente A è infatti unitario), per risolvere il problema sarà sufficiente valutare l'andamento della caduta di tensione sul condensatore da 18 pF; tale caduta di tensione è poi equivalente alla caduta di tensione che c'è sul resistore da 1 MΩ. Valutiamo dunque la tensione su tale resistore alla fine del transitorio. Una volta che il transitorio si è esaurito il circuito di partenza può essere riscritto (trascurando il generatore di tensione pilotato) nel modo seguente:



E quindi possiamo calcolare la tensione sul resistore da 1 MΩ sfruttando la regola del partitore di tensione; si avrà quindi:

$$v_{R_2} = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} = \frac{(1V)(1M\Omega)}{(1M\Omega) + (9M\Omega)} = 0{,}1V$$

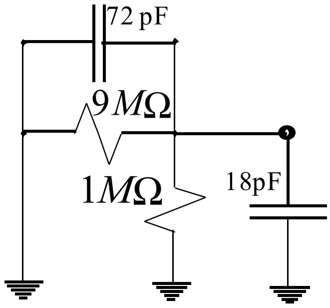
All'inizio del transitorio, invece, il medesimo circuito può essere ridisegnato nel modo seguente:



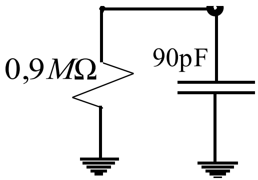
In questo caso la tensione che dobbiamo calcolare è la tensione sul condensatore da 18 pF e quindi possiamo usare una formula analoga al partitore di tensione che sarà la seguente:

$$v_{C_2} = \frac{EC_1}{C_1 + C_2} = 0{,}8V$$

Ora abbiamo il comportamento della risposta del sistema all'inizio del transitorio e alla fine del transitorio, sappiamo inoltre che siamo in presenza di una rete del primo ordine e quindi si assisterà ad un andamento esponenziale; per avere qualche informazione in più sull'andamento possiamo valutare la costante di tempo; spegniamo dunque il generatore di tensione e osserviamo la seguente rete:



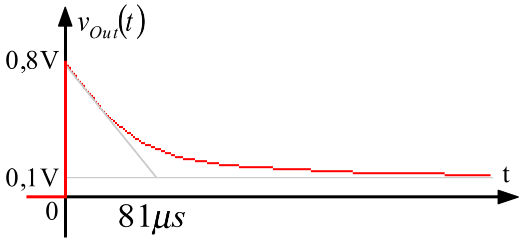
Sommando in serie i due resistori e i due condensatori si ottiene:



La costante di tempo si ottiene allora sfruttando la seguente espressione:

$$\tau = RC = (0{,}9M\Omega)(90\,pF) = 81\mu s$$

Possiamo dunque ricostruire l'andamento della grandezza richiesta che sarà il seguente:



Vediamo allora che l'andamento del segnale di uscita non ricalca troppo fedelmente il segnale del segnale di ingresso, neanche per quanto riguarda la forma (in ingresso si aveva un gradino, in uscita il gradino si ottiene solo dopo un salto ed una discesa esponenziale); per fare in modo che il segnale di uscita assomigli (dal punto di vista qualitativo) maggiormente al segnale di ingresso, possiamo regolare la capacità del condensatore da 72 pF in modo che il segnale in uscita abbia lo stesso valore sia a transitorio appena iniziato che a transitorio esaurito. Ricordiamo dunque le relazioni che esprimevano il segnale di uscita in questi due istanti estremi:

$$\begin{cases} v_{Out}^{Iniz} = \dfrac{EC_1}{C_1 + C_2} \\ v_{Out}^{Fin} = \dfrac{ER_2}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

Imporre che questi due valori si eguaglino significa imporre che sia:

$$\frac{EC_1}{C_1 + C_2} = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}$$

ovvero:

$$\frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

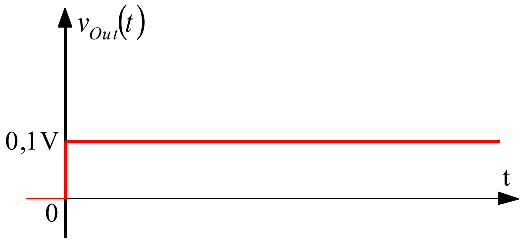
dalla quale si ricava:

$$C_1 R_1 = C_2 R_2$$

e quindi:

$$C_1 = \frac{R_2}{R_1} C_2 = \frac{(1M\Omega)}{(9M\Omega)}(18\,pF) = 2\,pF$$

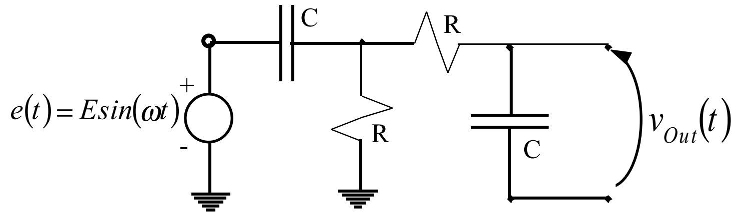
In questo modo, rifacendo i conti già visti, si ottiene il seguente andamento del segnale di risposta:



Concludiamo osservando che la resistenza da 9 MΩ è presente in questo tipo di circuiti per compensare gli errori di valutazione dovuti alla presenza di una resistenza interna che ovviamente accompagna il generatore di tensione.

Trasformate di Laplace delle funzioni di trasferimento.

Si consideri il circuito rappresentato nella figura seguente



Si valuti la pulsazione ω in corrispondenza della quale lo sfasamento tra ingresso e uscita è nullo; valutare poi l'attenuazione alla pulsazione trovata.

Per risolvere questo esercizio non dobbiamo fare altro che valutare la risposta in frequenza della rete, ovvero gli andamenti del modulo e della fase della funzione di trasferimento di tale circuito. Ricordiamo dunque la definizione generica della funzione di trasferimento:

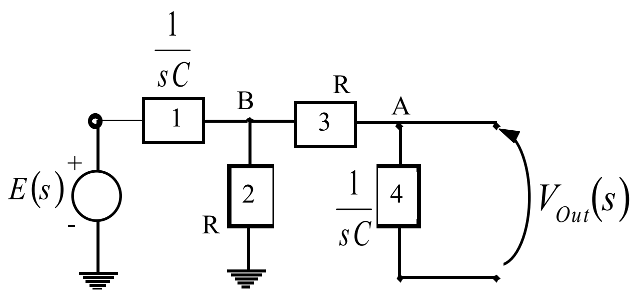
$$H(s) = \frac{Out(s)}{In(s)}$$

ovvero, nel nostro caso:

$$H(s) = \frac{V_{Out}(s)}{E(s)}$$

Osservando semplicemente il circuito possiamo subito dire che la funzione di trasferimento avrà due poli, infatti nel circuito sono presenti due condensatori indipendenti.

Passiamo ora dal circuito reale al circuito ideale composto dalle trasformate di Laplace delle grandezze di ingresso e di uscita e dalle impedenze simboliche:



Notiamo ora che, per la legge di Kirchhoff alle maglie, la tensione di uscita (che da ora in poi indicheremo semplicemente con V) equivale alla caduta di tensione sull'impedenza numero 4, ovvero:

$$V_4 = V$$

A questo punto possiamo calcolare la corrente che attraversa l'impedenza numero 4 sfruttando la relazione seguente:

$$I_4 = CsV_4 = CsV$$

Ovviamente la corrente che scorre nell'impedenza numero 4 è anche la medesima corrente che scorre nell'impedenza numero 3 (dalla legge di Kirchhoff al nodo A), ovvero:

$$I_4 = I_3$$

A questo punto è possibile valutare la caduta di tensione sull'impedenza numero 3 tramite la seguente relazione:

$$V_3 = RI_3 = RCsV$$

Sfruttiamo ora la legge di Kirchhoff alla maglia centrale per ricavare la caduta di tensione sull'impedenza numero 2:

$$V_2 = V_3 + V_4 = RCsV + V = V(1 + RCs)$$

Possiamo dunque ricavare nel modo seguente la corrente che circola nell'impedenza numero 2:

$$I_2 = \frac{V_2}{R} = \frac{V(1 + RCs)}{R}$$

Applichiamo ora la legge di Kirchhoff alla maglia di sinistra per ricavare la tensione sull'impedenza numero 1:

$$V_1 = E - V_2 = E - V(1 + RCs)$$

Possiamo ora valutare la corrente che circola nell'impedenza numero 1 tramite la seguente espressione:

$$I_1 = CsV_1 = Cs[E - V(1 + RCs)]$$

Applichiamo ora la legge di Kirchhoff al nodo B, ottenendo la seguente relazione:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

dalla quale si ricava, sostituendo i valori fino ad ora trovati:

$$RCsE = V\left(R^2C^2s^2 + 3RCs + 1\right)$$

ovvero:

$$\frac{V}{E} = \frac{RCs}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1}$$

Abbiamo dunque trovato la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{RCs}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1} = \frac{s}{RCs^2 + 3s + \frac{1}{RC}} = \frac{s}{RC\left(s^2 + \frac{3s}{RC} + \frac{1}{R^2C^2}\right)}$$

Notiamo dunque che la funzione di trasferimento presenta uno zero quando s si annulla; questa informazione si poteva ricavare a priori osservando il circuito simbolico (ovvero quello con le impedenze) e notando che interrompendo il circuito in prossimità dell'impedenza numero 1 si ottiene risposta nulla (e si ha quindi uno zero della funzione di trasferimento) qualunque sia l'ingresso. Interrompere il circuito in prossimità dell'impedenza numero 1 significa far tendere tale impedenza all'infinito e quindi, essendo la capacità un parametro fissato, significa annullare s, da cui si ricavava che in s nullo si ha uno zero della funzione di trasferimento; questo ragionamento si rifà a quella che prende il nome di proprietà bloccante degli zeri.
Una volta trovata la funzione di trasferimento possiamo ricavare i poli del circuito risolvendo il polinomio di secondo grado che vi appare al denominatore, si pone dunque:

$$s^2 + \frac{3s}{RC} + \frac{1}{R^2C^2} = 0$$

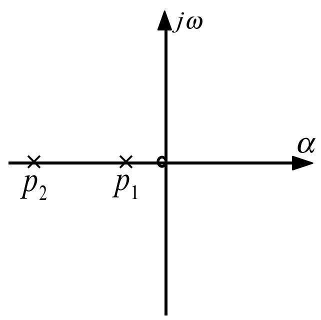
e si ricava:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{RC}\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ p_2 = \dfrac{1}{RC}\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Notiamo che entrambi i poli sono reali; anche questa era un'informazione che si poteva ricavare in precedenza perché, riscrivendo il denominatore della funzione di trasferimento nella forma seguente:

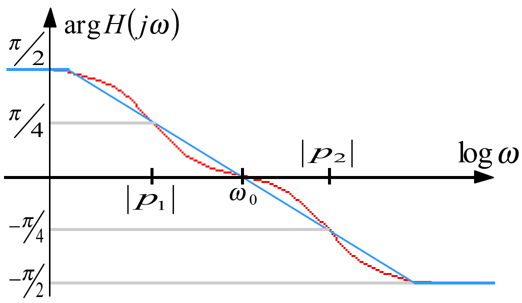
$$1 + 2\xi\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}$$

si sarebbe ottenuto un termine ξ maggiore di 1.Una volta trovati i poli e gli zeri della funzione di trasferimento possiamo riportarli sul piano complesso s.



Valutiamo ora l'andamento della fase: sfruttando la rappresentazione sul piano complesso s possiamo ricavare facilmente quali siano gli andamenti asintotici: quando $j\omega$ tende a zero lo sfasamento complessivo tende ad essere pari a π/2 perché i due poli non danno contributo alla fase mentre lo zero dà, appunto, un contributo pari a π/2. Quando invece $j\omega$ tende all'infinito i due poli danno entrambi un contributo di -π/2 (in realtà il contributo è positivo ma deve essere contato con il segno -) mentre lo zero continua a dare un contributo di π/2; complessivamente si avrà allora uno sfasamento complessivo pari a -π/2. L'andamento della fase è allora quello rappresentato nella prima immagine della pagina seguente. La frequenza che corrisponde allo sfasamento nullo tra ingresso e uscita è quella che, nel grafico, corrisponde al punto in cui la curva attraversa l'asse delle ascisse, ovvero il punto medio tra i due poli; siccome siamo in scala logaritmica, tale punto rappresenta la media geometrica dei due valori e quindi si avrà:

$$\omega_0 = \sqrt{|p_1||p_2|} = \frac{1}{RC}$$



Dopo aver trovato la frequenza con sfasamento nullo occupiamoci del grafico dell'attenuazione (ovvero del modulo della funzione di trasferimento). Siccome è presente uno zero nell'origine, sappiamo che l'andamento asintotico parte con una pendenza di +20 dB/dec, una volta stabilita la pendenza dobbiamo però effettivamente valutare dove disegnare tale andamento asintotico. Per fare questo notiamo che l'andamento asintotico iniziale fa riferimento solo alle singolarità che stanno alla sua sinistra, ovvero al solo zero, e quindi possiamo non considerare le singolarità successive alla zona di interesse (ovvero i due poli) approssimando la funzione di trasferimento nel modo seguente:

$$H(s) = \frac{s}{RC\left(s^2 + \frac{3s}{RC} + \frac{1}{R^2C^2}\right)} \cong \frac{s}{RC\frac{1}{R^2C^2}} = RCs$$

Siccome poi stiamo valutando la risposta in frequenza possiamo scrivere:

$$H(j\omega) = RCj\omega$$

Ora, per stabilire dove effettivamente l'andamento asintotico iniziale intercetta l'asse dobbiamo porre, ricordando di essere in un riferimento logaritmico:

$$|H(j\omega)| = 1$$

e quindi:

$$|RCj\omega| = 1$$

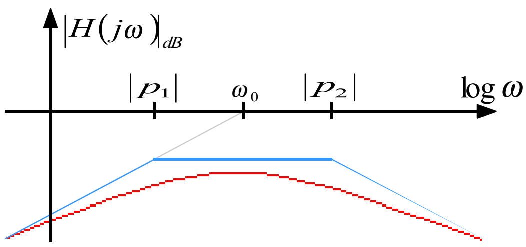
dalla quale si ricava:

$$RC\omega = 1$$

e quindi:

$$\omega = \frac{1}{RC}$$

Dunque il punto di intersezione corrisponde con la frequenza con sfasamento nullo. Possiamo ora costruire il grafico del modulo della funzione di trasferimento.



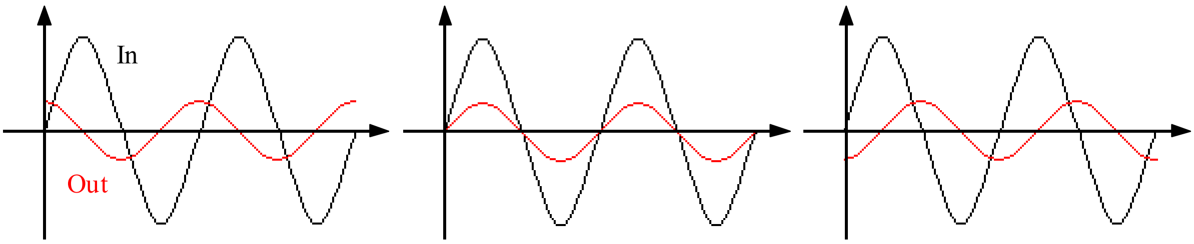
Per valutare l'attenuazione possiamo ora utilizzare due metodi; è infatti possibile valutare l'attenuazione in base all'andamento approssimato, oppure si può calcolare l'attenuazione precisa. L'attenuazione approssimata si calcola andando a calcolare il valore dell'andamento approssimato sul plateau centrale; per fare questo dobbiamo nuovamente approssimare la funzione di trasferimento in modo da tenere conto solo delle singolarità alla sinistra della zona di interesse (ovvero, in questo caso, lo zero e il primo polo). Si otterrà dunque:

$$H(s) = \frac{s}{RC\left(s^2 + \frac{3s}{RC} + \frac{1}{R^2C^2}\right)} \cong -\frac{1}{RC}\frac{RC}{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

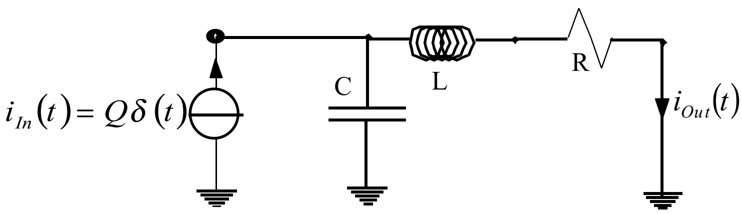
L'attenuazione reale si ottiene invece sostituendo il valore reale nella funzione di trasferimento, ovvero:

$$H(j\omega_0)=\frac{j\frac{1}{RC}}{RC\left(-\frac{1}{R^2C^2}+\frac{3j}{R^2C^2}+\frac{1}{R^2C^2}\right)}=\frac{j}{R^2C^2\left(\frac{3j}{R^2C^2}\right)}=\frac{j}{3j}=\frac{1}{3}$$

Siccome la rete è lineare, ad un ingresso sinusoidale corrisponderà un'uscita anch'essa sinusoidale con intensità pari ad un terzo di quella di partenza e con sfasamento che varia a seconda della frequenza; nell'immagine seguente vediamo dunque i grafici di ingresso ed uscita nel caso, rispettivamente, di basse frequenza, di frequenza ω_0 e di alta frequenza:



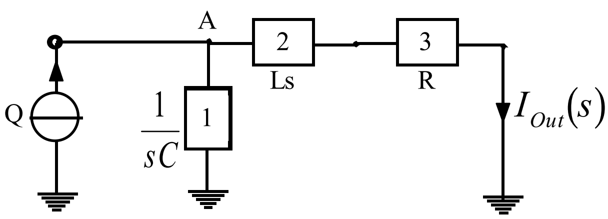
Notiamo che il circuito che abbiamo studiato si comporta come un filtro passa banda (può infatti essere visto come la composizione di un filtro passa basso e di un filtro passa alto); la banda passante è l'intervallo di frequenza comprese tra i due poli.
Sia dato il seguente circuito:



corredato dei seguenti valori numerici:

$$\begin{cases} C=10nF \\ L=200\mu H \\ R=22{,}4\Omega \end{cases}$$

Valutare l'andamento temporale della corrente in uscita e stabilire il valore numerico della resistenza R da utilizzare per non avere andamento oscillatorio dell'uscita.
Passiamo dal circuito reale al circuito ideale composto dalle trasformate di Laplace delle grandezze di ingresso e di uscita e dalle impedenze simboliche:



Notiamo dunque che, per ricavare la corrente in uscita, sarà sufficiente applicare la regola del partitore di corrente al nodo A, ottenendo:

$$I_{Out}=I_{In}\frac{Z_1}{Z_1+Z_2+Z_3}$$

Da questa relazione si ricava facilmente la funzione di trasferimento:

$$H(s)=\frac{I_{Out}(s)}{I_{In}(s)}=\frac{Z_1}{Z_1+Z_2+Z_3}=\frac{1/sC}{\frac{1}{sC}+sL+R}=\frac{1}{s^2CL+sRC+1}$$

Per semplicità di notazione introduciamo ora i seguenti due termini (dei quali vediamo anche il valore numerico):

$$\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 2{,}24 \dfrac{Mrad}{s} \\ Q_f = \dfrac{\omega_0 L}{R} = 200 \end{cases}$$

il secondo dei quali prende il nome di fattore di qualità. Utilizzando tali due relazioni, la funzione di trasferimento può essere espressa nel modo seguente:

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \dfrac{s\omega_0}{Q_f} + \omega_0^2}$$

Al denominatore troviamo un polinomio di secondo grado e quindi deduciamo che il circuito sia caratterizzato da due poli che otteniamo risolvendo la seguente equazione:

$$s^2 + \frac{s\omega_0}{Q_f} + \omega_0^2 = 0$$

dalla quale si ricavano due poli complessi e coniugati espressi nel modo seguente:

$$\begin{cases} p = \omega_0 \left(-\dfrac{1}{2Q_f} + j\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q_f^2}} \right) \\ p^* = \omega_0 \left(-\dfrac{1}{2Q_f} - j\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q_f^2}} \right) \end{cases}$$

Per semplicità di notazione imponiamo che sia:

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{\omega_0}{2Q_f} \\ \beta = \omega_0 \sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q_f^2}} \end{cases}$$

in modo che i due poli possano essere espressi nel modo seguente:

$$\begin{cases} p = \alpha + j\beta \\ p^* = \alpha - j\beta \end{cases}$$

Riscriviamo dunque la funzione di trasferimento nel modo seguente:

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{(s-p)(s-p^*)}$$

La trasformata di Laplace della corrente in uscita sarà allora la seguente:

$$I_{Out}(s) = \frac{Q\omega_0^2}{(s-p)(s-p^*)}$$

Per valutare l'andamento temporale della corrente in uscita è ora necessario antitrasformare l'ultima relazione scritta; usiamo dunque il metodo dell'espansione in frazioni parziali grazie alla quale si ottiene:

$$i_{Out}(t) = L^{-1}\left\{ \frac{Q\omega_0^2}{(s-p)(s-p^*)} \right\} = L^{-1}\left\{ Q\omega_0^2 \left(\frac{A}{s-p} + \frac{A^*}{s-p^*} \right) \right\}$$

Per trovare il termine A utilizzo la seguente espressione:

$$A = \lim_{s \to p} H(s)(s-p) = \frac{1}{p-p^*} = \frac{1}{2j\,\mathrm{Im}\{p\}} = \frac{1}{2j\beta} = -\frac{j}{2\beta}$$

Si avrà quindi:

$$i_{Out}(t) = L^{-1}\left\{ Q\omega_0^2 \left(-\frac{j}{2\beta(s-p)} + \frac{j}{2\beta(s-p^*)} \right) \right\}$$

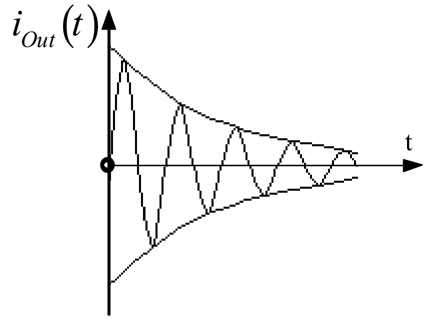
dalla quale si ricava:

$$i_{Out}(t) = \frac{Q\omega_0^2}{\beta}\left(\frac{e^{pt} - e^{p^*t}}{2j}\right) = \frac{Q\omega_0^2}{\beta} e^{\alpha t} sin(\beta t)$$

Per avere una ulteriore informazione sul comportamento dell'uscita nell'origine, possiamo sfruttare il teorema del valore iniziale, secondo il quale si ottiene:

$$i_{Out}^0 = \lim_{s \to \infty} s\, I_{Out}(s) = 0$$

Possiamo quindi rappresentare graficamente l'andamento temporale nel modo seguente:



L'esponenziale che mitiga la sinusoide è ovviamente decrescente, essendo α negativo; il periodo della sinusoide è il seguente:

$$T = \frac{2\pi}{\beta} \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$$

mentre l'intersezione dell'esponenziale con l'asse delle ordinate sarà:

$$\bar{i} = \frac{Q\omega_0^2}{\beta} \approx Q\omega_0$$

Dobbiamo ora trovare il valore della resistenza R in corrispondenza della quale la risposta del circuito non presenta oscillazioni; osserviamo dunque che l'andamento oscillatorio è dovuto al fatto che sono stati trovati due poli complessi e coniugati, perché le oscillazioni non ci siano i due poli dovranno essere reali e coincidenti. Ciò significa che si deve annullare la parte immaginaria dei poli, ovvero si deve avere:

$$\beta = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_f^2}} = 0$$

ovvero:

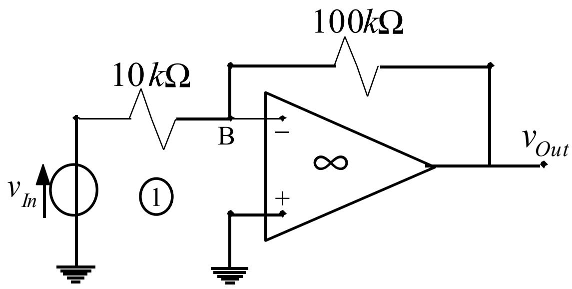
$$Q_f = \frac{1}{2}$$

Ricordando allora la definizione precedentemente data del fattore di qualità, si ricava:

$$R = 2\omega_0 L = 8960\Omega$$

Amplificatori operazionali. Convertitore corrente tensione. Il buffer. Sommatore invertente e non invertente.

Come prima cosa ci occupiamo dell'amplificatore operazionale in configurazione invertente con guadagno tendente all'infinito, ovvero consideriamo la seguente situazione:



Il guadagno ideale di un amplificatore invertente è dato dalla seguente relazione:

$$G_{Id} = -\frac{R_2}{R_1}$$

e quindi nel nostro caso si avrà:

$$G_{Id} = -10$$

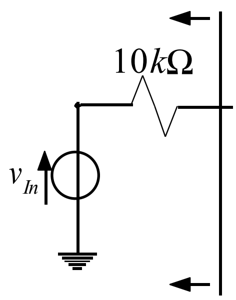
da cui si ricava:

$$v_{Out} = -10 v_{In}$$

Per quanto riguarda, invece, l'impedenza di ingresso; questa sarà:

$$Z_{In} = \frac{v}{i}$$

Con riferimento al seguente disegno vediamo che la tensione e la corrente di ingresso sono quelle relative alla resistenza da 10 kΩ.



Facendo riferimento alla prima immagine di questa pagina osserviamo dunque che la caduta di tensione sul resistore da 10 kΩ (ricordando che il nodo B è una terra virtuale) sarà (dalla legge di Kirchhoff applicata alla maglia numero 1):

$$v_R = v_{In}$$

e quindi la corrente che circola all'interno di tale resistore sarà:

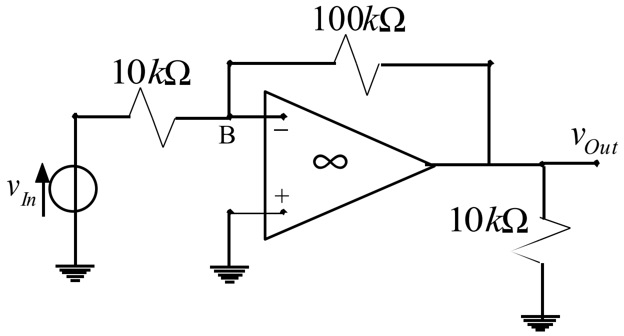
$$i_R = \frac{v_R}{10k\Omega} = \frac{v_{In}}{10k\Omega}$$

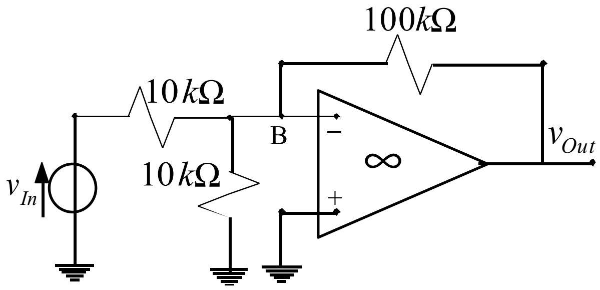
e quindi l'impedenza di ingresso sarà:

$$Z_{In} = \frac{v_{In}}{v_{In}/10k\Omega} = 10k\Omega$$

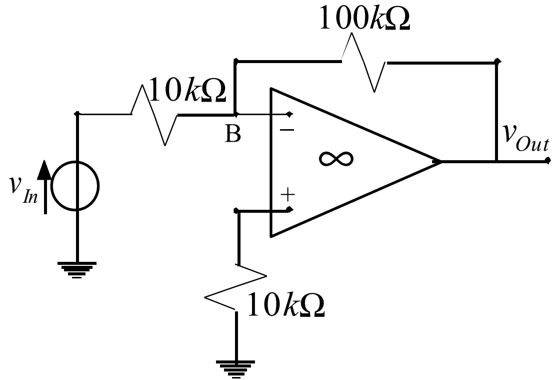
Modifichiamo ora una prima volta il circuito in modo da ottenere la situazione rappresentata nella prima immagine della pagina seguente. Notiamo che sia il guadagno ideale e che l'impedenza di ingresso non vengono influenzata dalla modifica della rete. La resistenza non modifica il guadagno della rete perché all'interno dell'amplificatore operazionale c'è un generatore pilotato di tensione che fornisce tutta la corrente che serve al carico che abbiamo aggiunto; l'impedenza di ingresso non viene invece modificata perché all'ingresso dell'amplificatore non è cambiato assolutamente nulla.

Modifichiamo ora una seconda volta il circuito in modo da ottenere la configurazione rappresentata nella seconda immagine della pagina seguente. Anche in questo caso non cambierà niente infatti la presenza della terra virtuale manterrà a zero la caduta di tensione sul nuovo resistore aggiunto nel quale, quindi, non circolerà corrente, a tutti gli effetti, dunque, tale nuovo resistore non perturberà in nessun modo la rete e quindi sia il guadagno ideale che l'impedenza di ingresso saranno le medesime prima calcolate.

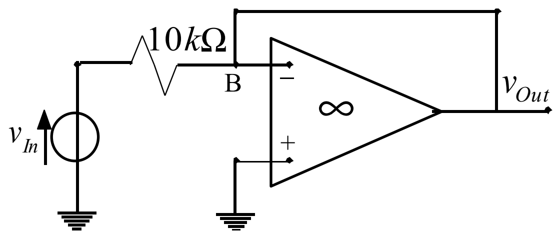




Si modifichi poi nuovamente il circuito di partenza in modo da ottenere la seguente situazione:



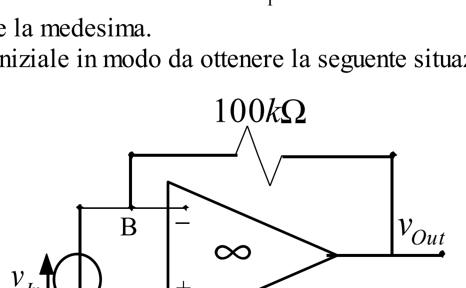
Ancora una volta il guadagno dell'amplificatore non viene modificato perché nella nuova resistenza non circola corrente; per lo stesso motivo rimane inalterata anche l'impedenza di ingresso.
Consideriamo ora un'altra variante del circuito iniziale:



In questa situazione, ovviamente, il guadagno dell'amplificatore risulta modificato in quanto si avrà:

$$G_{Id} = -\frac{R_2}{R_1} = 0$$

L'impedenza di ingresso rimane invece la medesima.
Modifichiamo nuovamente il circuito iniziale in modo da ottenere la seguente situazione:



In questa situazione non può esistere un nodo di massa virtuale; si nota infatti che il nodo B dovrà avere lo stesso potenziale del generatore di tensione, ovvero:

$$v^{-} = v_{In}$$

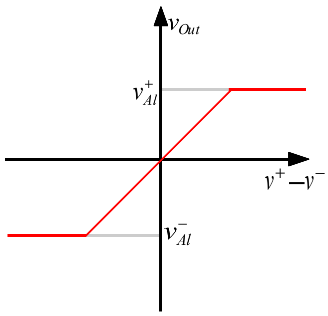
Ricordando allora l'espressione caratteristica dell'amplificatore si avrà:

$$v_{Out} = A(v^{+} - v^{-}) = -Av_{In}$$

Siccome poi ci siamo messi nel caso in cui A tende all'infinito, avremo:

$$v_{Out} \to -\infty$$

Ovviamente per trattare in modo realistico una situazione come questa dovremo fare riferimento all'alimentazione dell'amplificatore, che impone una tensione di saturazione oltre la quale l'amplificatore perde la proprietà di linearità.



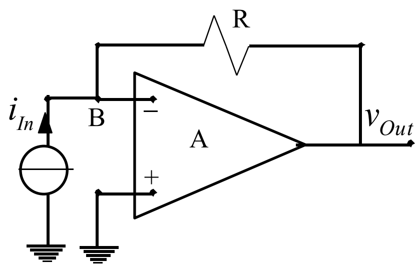
Per valutare i limiti dell'ingresso all'interno dei quali si può avere andamento lineare dell'amplificatore si deve conoscere il valore numerico della tensione di alimentazione e del coefficiente di amplificazione A; utilizzando i due seguenti valori piuttosto ragionevoli:

$$\begin{cases} v_{Al} = 10V \\ A = 10^{6} \end{cases}$$

si ottiene il seguente valore della tensione limite per l'ingresso:

$$v_{In}^{Lim} = \frac{v_{Al}}{A} = 10\mu V$$

Concentriamoci ora su un circuito particolarmente importante perché permette di convertire un segnale di ingresso di corrente in un segnale di uscita di tensione.



Anche in questo caso l'espressione caratteristica dell'amplificatore sarà la seguente:

$$v_{Out} = A(v^{+} - v^{-}) = -Av^{-}$$

dalla quale si ricava:

$$v^{-} = -\frac{v_{Out}}{A}$$

Osserviamo ora che, per la legge di Kirchhoff al nodo B, tutta la corrente di ingresso si deve per forza riversare nel resistore e quindi la caduta di tensione su questo elemento sarà:

$$v_R = i_{In}R$$

A questo punto possiamo sfruttare la legge di Kirchhoff alla maglia per ricavare la seguente espressione:

$$v_{Out} + v_R - v^{-} = 0$$

ovvero:

$$v_{Out} + i_{In}R + \frac{v_{Out}}{A} = 0$$

dalla quale si ricava:

$$v_{Out} = -i_{In}R\frac{A}{1+A} \qquad (1)$$

Il guadagno di questo convertitore sarà allora:

$$G = -R\frac{A}{1+A}$$

Ovviamente, nel caso ideale nel quale A tende all'infinito si avrà:

$$G = -R$$

Per quanto riguarda l'impedenza di ingresso osserviamo che la corrente di ingresso è sicuramente pari alla corrente fornita dal generatore, la tensione di ingresso equivale questa volta alla caduta di tensione sul generatore che, per la legge di Kirchhoff applicata alla maglia di sinistra, sarà:

$$v_G = v^-$$

L'impedenza di ingresso sarà dunque la seguente:

$$Z_{In} = \frac{v_{In}}{i_{In}} = \frac{v^-}{i_{In}} = -\frac{v_{Out}/A}{i_{In}}$$

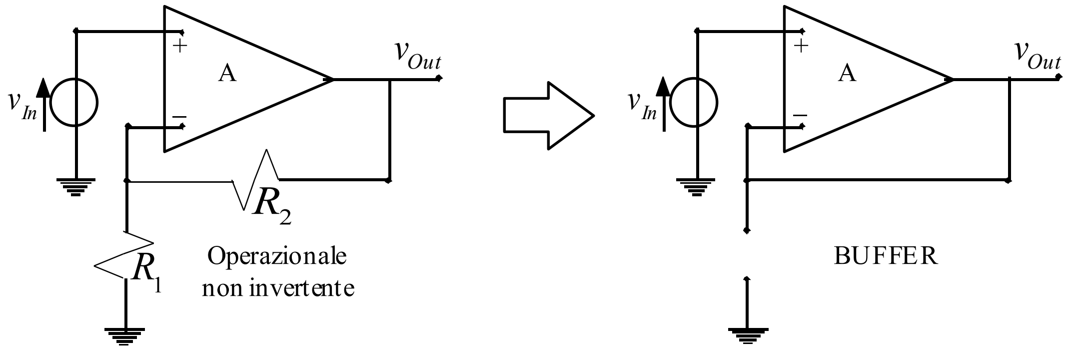
Combinando quest'ultima relazione con l'espressione della tensione d'uscita prima trovata, si avrà:

$$Z_{In} = -\frac{R}{1+A} \qquad (2)$$

Ovviamente, nel caso ideale nel quale il parametro A tende all'infinito si avrà:

$$Z_{In} = 0$$

Vediamo ora un altro importante amplificatore operazionale che avevamo già introdotto precedentemente nel corso: il buffer. Si ricordi che il buffer veniva utilizzato per disaccoppiare due parti del medesimo circuito (in particolare era stato utilizzato per disaccoppiare due gruppi RC in un circuito). La rappresentazione circuitale rigorosa del buffer deriva dall'amplificatore operazionale non invertente come mostrato nell'immagine seguente:



Ricordiamo che il guadagno ideale nel caso di un amplificatore non invertente era:

$$G_{Id} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Siccome nel passaggio tra il generale amplificatore non invertente e il buffer si ha:

$$\begin{cases} R_1 = \infty \\ R_2 = 0 \end{cases}$$

appare ovvio che il guadagno ideale del buffer è il seguente:

$$G_{Id} = 1$$

Il buffer ha dunque un guadagno unitario perché il suo compito non è quello di amplificare un segnale ma di disaccoppiare.

Soffermiamoci ora sul sommatore invertente la cui rappresentazione circuitale è la prima della pagina seguente. Per gestire questo circuito sfruttiamo il principio della sovrapposizione degli effetti e quindi, per prima cosa, spegniamo il generatore b ottenendo la configurazione rappresentata nella seconda immagine della pagina seguente. In tale configurazione, osservando la maglia numero 1 si vede che la caduta di tensione sul resistore b è nulla e quindi il sistema è equivalente a quello mostrato nella terza immagine della pagina seguente che è un normalissimo amplificatore non invertente la cui uscita sarà:

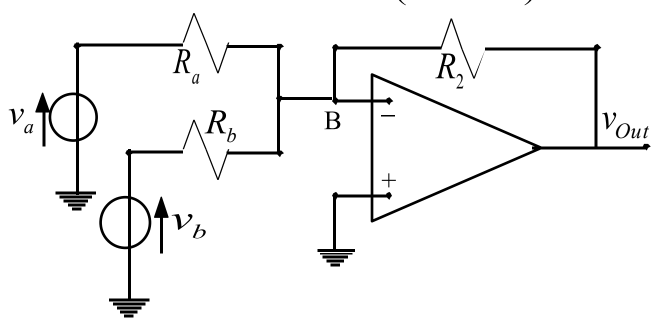
$$v_{Out}^a = -v_a \frac{R_2}{R_a}$$

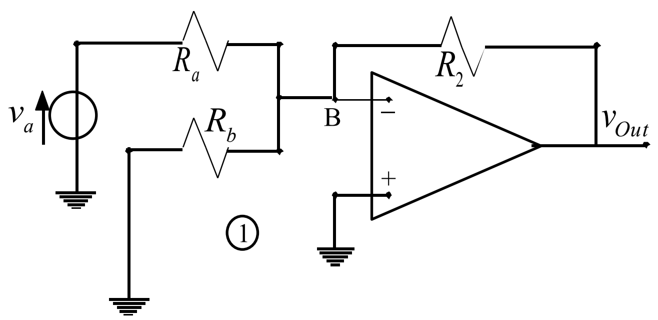
Possiamo poi ripetere il medesimo discorso spegnendo il generatore a e ricavando la seguente uscita:

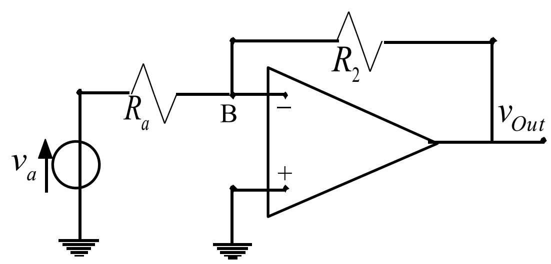
$$v_{Out}^{b} = -v_b \frac{R_2}{R_b}$$

L'uscita complessiva sarà dunque la seguente:

$$v_{Out} = v_{Out}^{a} + v_{Out}^{b} = -R_2\left(\frac{v_a}{R_a} + \frac{v_b}{R_b}\right)$$





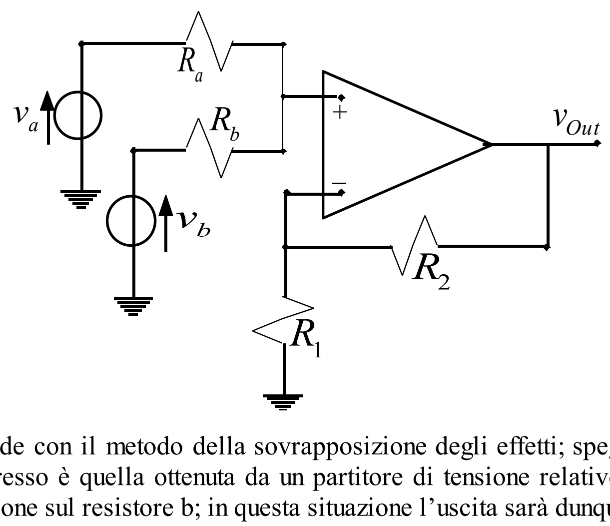


Notiamo che nella parentesi dell'ultima relazione scritta appaiono delle correnti; in effetti una relazione più generica potrebbe essere la seguente:

$$v_{Out} = -R_2 \sum_{i=1}^{n} i_{In}^{i}$$

dove le correnti che appaiono nella sommatoria non sono altro che le correnti che entrano nel nodo B e possono quindi essere le correnti che vi arrivano attraversando un resistore in serie con un generatore di tensione oppure possono essere le correnti iniettate nel nodo direttamente con un generatore di corrente.

Esiste anche il sommatore non invertente la cui rappresentazione circuitale (nel caso in cui siano solo due i termini da sommare) è la seguente:



Anche in questo caso si procede con il metodo della sovrapposizione degli effetti; spegnendo dunque il generatore b si ottiene che la tensione in ingresso è quella ottenuta da un partitore di tensione relativo alle due resistenze di ingresso con il quale si esplicita la tensione sul resistore b; in questa situazione l'uscita sarà dunque la seguente:

$$v_{Out}^{a} = v_a \frac{R_b}{R_a + R_b}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Spegnendo invece il generatore a si avrà al seguente uscita:

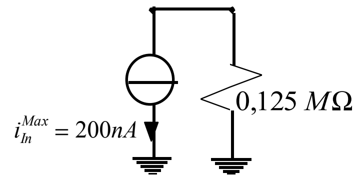
$$v_{Out}^{b} = v_b \frac{R_a}{R_a + R_b}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

e quindi l'uscita complessiva sarà:

$$v_{Out} = v_{Out}^{a} + v_{Out}^{b} = \left[\frac{v_a R_b}{R_a + R_b} + \frac{v_b R_a}{R_a + R_b}\right]\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

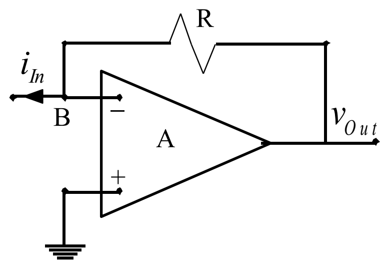
Concludiamo con il seguente esercizio numerico:

Un fotorivelatore può essere modellizzato tramite il seguente equivalente Norton:



Il segnale deve essere processato in modo da entrare in un ADC (Analog to Digital Converter) che legge tensioni dell'ordine dei 5V. Realizzare il circuito che permette il processamento richiesto.

Siccome abbiamo un segnale di corrente in ingresso e vogliamo un segnale di tensione in uscita dovremo utilizzare il convertitore corrente tensione visto durante questa esercitazione ovvero dovremo utilizzare il seguente circuito:



Per ricavare la resistenza da utilizzare ci mettiamo inizialmente nel caso ideale nel quale A tende all'infinito e sfruttiamo la relazione (1) nella quale si utilizza il segno positivo invece che quello negativo perché la corrente ha verso opposto rispetto al caso che abbiamo analizzato precedentemente; si avrà quindi:

$$v_{Out} = i_{In} R_{Id}$$

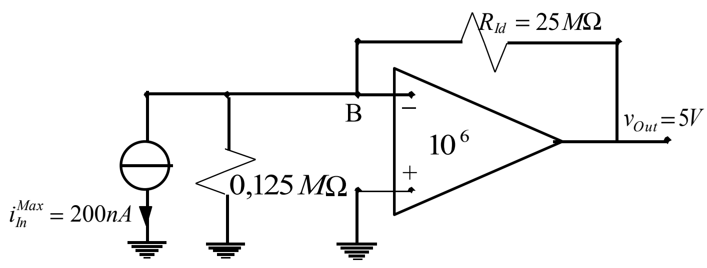
dalla quale si ricava:

$$R_{Id} = \frac{v_{Out}}{i_{In}} = \frac{5V}{0{,}2\mu A} = 25M\Omega$$

Notiamo dunque che quando l'operazionale è ideale la resistenza da 0,125 MΩ non è assolutamente influente. Abbandoniamo ora il caso ideale e mettiamoci in un caso più realistico nel quale sia:

$$A = 10^6$$

Il circuito complessivo sia dunque il seguente nel quale si utilizza la resistenza trovata nel caso ideale:



Sfruttiamo dunque la relazione (2) per ricavare l'impedenza di ingresso (ricordando ancora di utilizzare il segno positivo invece che quello negativo)::

$$Z_{In} = \frac{R_{Id}}{1 + A} = \frac{25M\Omega}{1 + 10^6} \approx 25\Omega$$

La corrente che entra nell'operazionale non sarà dunque, in questo caso, esattamente coincidente con la corrente imposta dal generatore sorgente; per ricavare la vera corrente di ingresso dobbiamo considerare la legge del partitore *tra la resistenza di sorgente e l'impedenza creata dall'operazionale e considerare solo la corrente che circola effettivamente nell'operazionale; si avrà quindi:*

$$i_{In}^{Amp} = i_{In}\frac{R_s}{Z_{In}+R_s} = i_{In}\frac{0{,}125M\Omega}{(0{,}125M\Omega)+(25\Omega)} = 0{,}999\cdot i_{In}$$

Vediamo che la correzione nella corrente che entra nell'operazionale è minima e quindi si potrebbe effettivamente gestire il tutto come se si fosse nel caso ideale. Continuando nella rappresentazione del caso reale sfruttiamo ancora la relazione (1) e avremo:

$$v_{Out} = iR\frac{A}{1+A} = 0{,}999\cdot i_{In}R\frac{10^6}{1+10^6} = 0{,}999\cdot i_{In}R$$

dalla quale ricaviamo la vera resistenza che dobbiamo utilizzare che sarà:

$$R = \frac{v_{Out}}{0{,}999\cdot i_{In}} = \frac{5V}{0{,}999(0{,}2\mu A)} = 25{,}025M\Omega$$

Elementi di non linearità.

Per lo studio degli elementi di non linearità facciamo riferimento al circuito di figura 1.

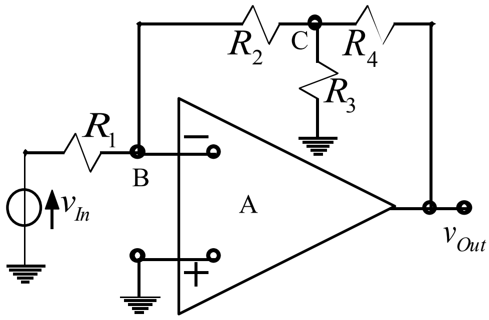


Figura 1

I valori numerici siano i seguenti:

$$\begin{cases} R_1 = R_2 = R_4 = 1M\Omega \\ R_3 = 1k\Omega \\ A = 10^6 \\ v_{Os} = 5mV \end{cases}$$

Vogliamo valutare il guadagno reale e poi valutare come si propaga verso l'uscita un segnale di Offset.
Ricordiamo dunque che il guadagno reale è dato dalla seguente espressione:

$$G_R = G_{Id}\frac{1}{1-\dfrac{1}{G_{Loop}}} + G_{Dir}\frac{1}{1-G_{Loop}}$$

dove il guadagno ideale, il guadagno diretto e il guadagno d'anello sono rispettivamente espressi nel modo seguente:

$$\begin{cases} G_{Id} = \left.\dfrac{v_{Out}}{v_{In}}\right|_{A\to\infty} \\ G_{Dir} = \left.\dfrac{v_{Out}}{v_{In}}\right|_{A=0} \\ G_{Loop} = \left.\dfrac{v_{Out}^{Test}}{v_{Test}}\right|_{v_{In}=0} \end{cases}$$

Notiamo dunque subito che, nella situazione in cui ci siamo posti, il guadagno diretto non ci sarà perché, siccome il valore di a è stato fissato, non è possibile porlo pari a zero. Iniziamo dunque con il concentrarci sulla maglia composta dal generatore di tensioni di ingresso e il resistore numero 1 dalla quale si può dedurre che la caduta di tensione su tale resistore sarà:

$$v_{R_1} = v_{In}$$

La corrente che attraversa il resistore numero 1 sarà dunque:

$$i_{R_1} = \frac{v_{R_1}}{R_1} = \frac{v_{In}}{R_1}$$

Facendo riferimento al nodo B appare poi evidente che si ha:

$$i_{R_1} = i_{R_2}$$

e quindi la caduta di tensione sul resistore numero 2 sarà:

$$v_{R_2} = R_2 i_{R_2} = R_2\frac{v_{In}}{R_1}$$

Come conseguenza del contatto virtuale, il punto B si trova a tensione nulla e quindi, facendo riferimento alla maglia composta dal resistore numero 2 e dal resistore numero3, si ricava la caduta di tensione su quest'ultimo resistore nel modo seguente:

$$v_{R_3} = v^- - v_{R_2} = -\frac{R_2}{R_1} v_{In}$$

e quindi la corrente che lo attraversa sarà:

$$i_{R_3} = \frac{v_{R_3}}{R_3} = -\frac{R_2}{R_1 R_3} v_{In}$$

Applichiamo ora la legge di Kirchhoff al nodo C, ottenendo:

$$i_{R_4} = i_{R_2} - i_{R_3} = \frac{v_{In}}{R_1}\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)$$

e dunque la caduta di tensione sul quarto resistore sarà:

$$v_{R_4} = R_4 i_{R_4} = \frac{R_4}{R_1}\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) v_{In}$$

A questo punto possiamo ricavare la tensione di uscita sfruttando la maglia all'estrema destra del circuito, dalla quale si ricava:

$$v_{Out} = v_{R_3} - v_{R_4} = -\frac{R_2}{R_1} v_{In}\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) - \frac{R_4}{R_1} v_{In}$$

Il guadagno ideale sarà dunque:

$$G_{Id} = \frac{v_{Out}}{v_{In}} = -\frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) - \frac{R_4}{R_1} = -1002$$

Calcoliamo ora il guadagno d'anello facendo riferimento al segnale di test introdotto in figura 2.

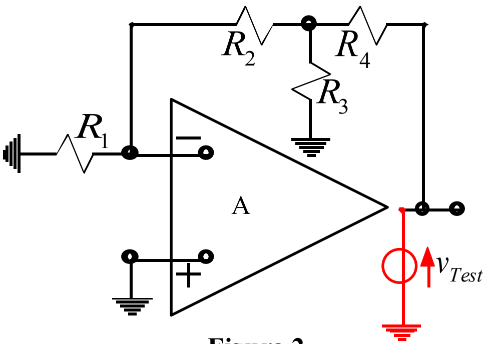


Figura 2

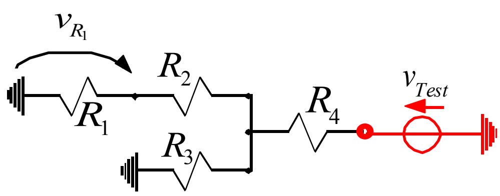


Figura 3

La tensione di uscita del segnale di test è la tensione in uscita dall'operazionale che è, ovviamente:

$$v_{Out}^{Test} = -Av^-$$

dove ovviamente sarà:

$$v^- = v_{R_1}$$

Per calcolare, dunque, la caduta di tensione sulla prima resistenza, si faccia riferimento allo schema semplificato della figura 3 dal quale si ricava che la resistenza complessiva vista dal generatore sarà:

$$R_{Tot} = R_4 + \left[R_3 // (R_1 + R_2)\right]$$

e dunque la corrente che circola sarà:

$$i_{Tot} = \frac{v_{Test}}{R_{Tot}} = \frac{v_{Test}}{R_4 + \left[R_3 // (R_1 + R_2)\right]}$$

di tutta la corrente a noi interessa solo quella che si ripartisce nel ramo che contiene la prima e la seconda resistenza, ovvero:

$$i_{R_1+R_2} = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} i_{Tot} = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot \frac{v_{Test}}{R_4 + \left[R_3 // (R_1 + R_2)\right]}$$

Ora possiamo ricavare la caduta di tensione sul primo resistore nel modo seguente:

$$v_{R_1} = R_1 i_{R_1} = R_1 \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot \frac{v_{Test}}{R_4 + [R_3 // (R_1 + R_2)]}$$

La tensione di uscita del segnale di test sarà dunque:

$$v_{Out}^{Test} = -AR_1 \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot \frac{v_{Test}}{R_4 + [R_3 // (R_1 + R_2)]} = -AR_1 \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot \frac{v_{Test}}{R_4 + \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}}$$

Il guadagno d'anello sarà allora il seguente:

$$G_{Loop} = \frac{v_{Out}^{Test}}{v_{Test}} = -AR_1 \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot \frac{1}{R_4 + \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}} = -A \frac{R_1 R_3}{R_4 (R_1 + R_2 + R_3) + R_3 (R_1 + R_2)}$$

Sfruttando i valori numerici si ricava:

$$G_{Loop} = -499{,}25$$

e quindi:

$$T = -G_{Loop} = 499{,}25$$

Il guadagno reale di questo amplificatore reazionato è allora il seguente:

$$G_R = G_{Id} \frac{T}{1 + T} = -1000$$

L'utilità di una configurazione come quella che stiamo esaminando si comprende pensando che l'impedenza di ingresso di tale circuito è pari ad 1 MΩ; per avere una configurazione puramente invertente con pari guadagno ideale (1000) e con pari impedenza di ingresso sarebbe necessario avere il primo resistore da 1 MΩ e il secondo resistore da 1 GΩ; questo però implicherebbe un guadagno diretto altissimo e quindi non si avrebbe un buon circuito.
Vediamo ora quali effetti si trasferiscono sull'uscita qualora sia presente anche il generatore di Offset; facciamo dunque riferimento alla figura 4.

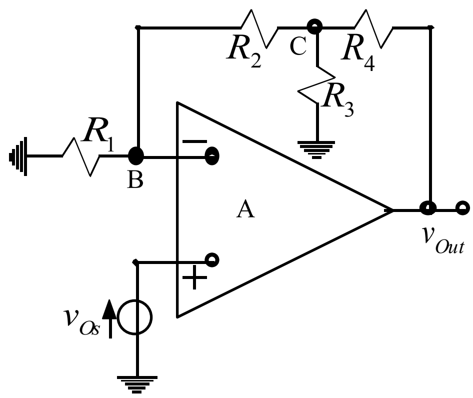


Figura 4

Dall'applicazione della legge di Kirchhoff alla maglia composta dal generatore e dal primo resistore si ricava:

$$v_{R_1} = v_{Os}$$

e quindi la corrente che attraversa il primo resistore sarà:

$$i_{R_1} = \frac{v_{R_1}}{R_1} = \frac{v_{Os}}{R_1}$$

Dalla legge di Kirchhoff al nodo B si ricava poi che:

$$i_{R_1} = i_{R_2}$$

e quindi anche la caduta di tensione sul secondo resistore sarà:

$$v_{R_2} = R_2 i_{R_2} = R_2 \frac{v_{Os}}{R_1}$$

Siccome dai dati del problema risulta che le prime due resistenze sono uguali si avrà:

$$v_{R_2} = v_{Os}$$

Sfruttando ora la maglia composta dal generatore di Offset (ricordando che siamo in presenza di contatto virtuale) e dal secondo e terzo resistore, si ricava:

$$v_{R_3} = v_{Os} + v_{R_2} = 2v_{Os}$$

dunque la corrente che circola nel resistore numero 3 sarà la seguente:

$$i_{R_3} = \frac{v_{R_3}}{R_3} = \frac{2v_{Os}}{R_3}$$

Sfruttiamo ora la legge di Kirchhoff al nodo C e otteniamo:

$$i_{R_4} = i_{R_3} + i_{R_2}$$

Siccome però la resistenza numero 2 vale 1 MΩ mentre la resistenza numero 3 vale solo 1 kΩ, possiamo in prima approssimazione pensare che la corrente che attraversa il resistore numero 4 si riversi tutta nel resistore numero 3; questo permetterebbe di modificare l'ultima relazione scritta nel modo seguente:

$$i_{R_4} = i_{R_3}$$

e quindi la caduta di tensione sul quarto resistore sarà:

$$v_{R_4} = R_4 i_{R_4} = R_4 \frac{2v_{Os}}{R_3}$$

La tensione in uscita si può allora calcolare sfruttando la maglia composta dal terzo e dal quarto resistore e ottenere:

$$v_{Out} = v_{R_3} + v_{R_4} = 2v_{Os}\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) = 10{,}01V$$

Ovviamente un trasporto in uscita di 10 V dovuto alla sola tensione di Offset è inconcepibile; dobbiamo dunque trovare un sistema per ridurre tale trasporto. Notiamo che una configurazione come quella proposta dalla figura 5 non modifica molto la situazione.

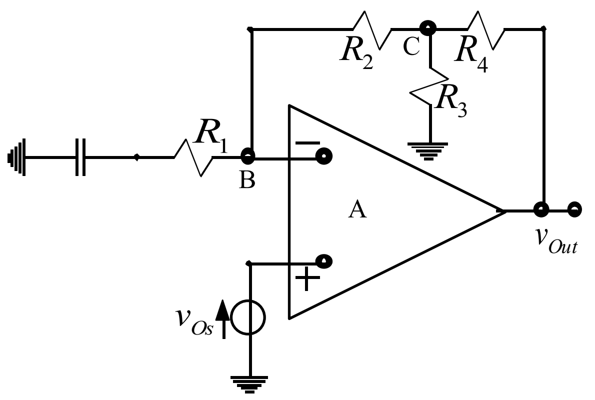


Figura 5

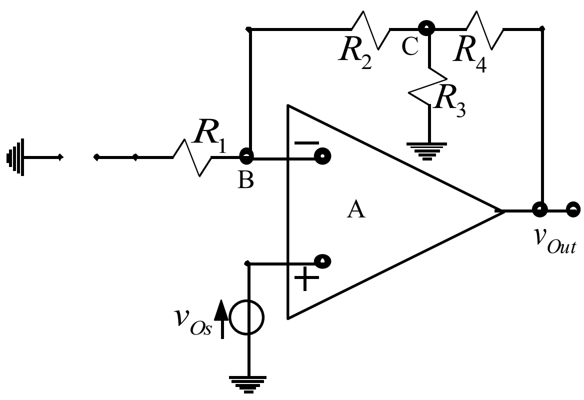


Figura 6

Quando facciamo infatti riferimento ad un segnale in continua (come è appunto quello di Offset) dobbiamo infatti fare riferimento ad un circuito aperto al posto del condensatore inserito (come mostrato nella figura 6); in questa situazione all'interno del resistore numero 1 non circolerà nessuna corrente e quindi, di riflesso, nessuna corrente circolerà neanche nel secondo resistore; su tali due resistori non avrò dunque cadute di tensioni. Sfruttando poi la maglia composta dal generatore di Offset (ricordando che siamo in presenza di contatto virtuale) e dal secondo e terzo resistore, si ricaverà, questa volta

$$v_{R_3} = v_{Os}$$

dunque la corrente che circola nel resistore numero 3 sarà:

$$i_{R_3} = \frac{v_{R_3}}{R_3} = \frac{v_{Os}}{R_3}$$

Sfruttiamo ora la legge di Kirchhoff al nodo C e otteniamo (ricordando che nel secondo resistore non scorre corrente) :

$$i_{R_4} = i_{R_3}$$

e quindi la caduta di tensione sul quarto resistore sarà:

$$v_{R_4} = R_4 i_{R_4} = R_4 \frac{v_{Os}}{R_3}$$

La tensione in uscita si può allora calcolare sfruttando la maglia composta dal terzo e dal quarto resistore e ottenere:

$$v_{Out} = v_{R_3} + v_{R_4} = v_{Os}\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) = 5{,}005V$$

che è ancora un trasporto troppo alto. Facciamo invece riferimento alla situazione rappresentata in figura 7; notiamo che, in tale situazione, quando ci poniamo in continua e il condensatore si apre, è il resistore numero 3 ad essere tagliato fuori, come si nota in figura 8.

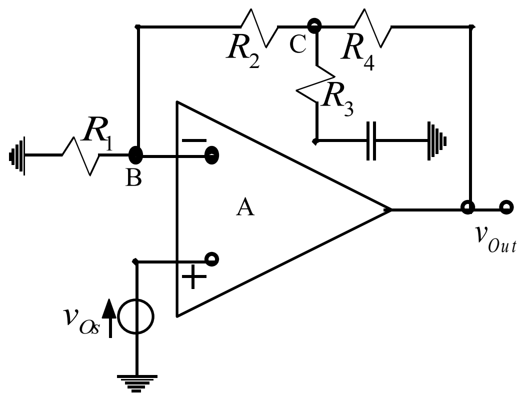


Figura 7

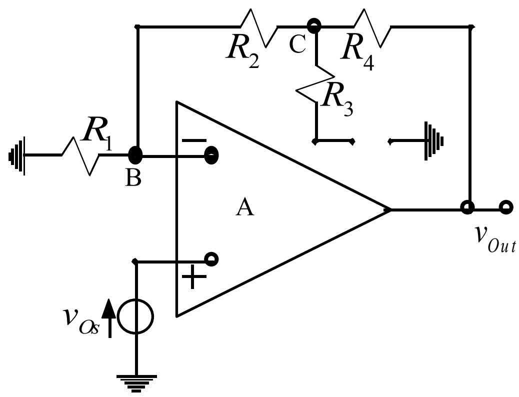


Figura 8

In questo modo osserviamo che dall'applicazione della legge di Kirchhoff alla maglia composta dal generatore e dal primo resistore si ricava:

$$v_{R_1} = v_{Os}$$

e quindi la corrente che attraversa il primo resistore sarà:

$$i_{R_1} = \frac{v_{R_1}}{R_1} = \frac{v_{Os}}{R_1}$$

Dalla legge di Kirchhoff al nodo B si ricava poi che:

$$i_{R_1} = i_{R_2}$$

e quindi anche la caduta di tensione sul secondo resistore sarà:

$$v_{R_2} = R_2 i_{R_2} = R_2 \frac{v_{Os}}{R_1}$$

Siccome dai dati del problema risulta che le prime due resistenze sono uguali si avrà:

$$v_{R_2} = v_{Os}$$

Dalla legge di Kirchhoff al nodo C (tenendo conto che in questa situazione la resistenza numero 3 si trova su un ramo morto) si ricava successivamente che:

$$i_{R_2} = i_{R_4}$$

e quindi anche la caduta di tensione sul quarto resistore sarà:

$$v_{R_4} = R_4 i_{R_4} = R_4 \frac{v_{Os}}{R_1}$$

Siccome dai dati del problema risulta che anche la seconda e la quarta resistenza sono uguali, risulta:

$$v_{R_4} = v_{Os}$$

Sfruttando dunque la maglia composta dal generatore di Offset (ricordando che siamo in presenza di contatto virtuale) e dal secondo e quarto resistore, si ricava la tensione di uscita:

$$v_{Out} = v_{Os} + v_{R_2} + v_{R_4} = 3v_{Os} = 15mV$$

e dunque abbiamo trovato per trasmettere all'uscita una piccola tensione dovuta all'Offset.

<u>Passiamo ora ad occuparci di un altro circuito e, in particolare, consideriamo l'amplificatore delle differenze nostrato in figura 9 per il quale siano anche forniti i seguenti valori numerici:</u>

$$\begin{cases} CMRR_{Op} = \infty \\ R_1 = R_3 = 1(1 \pm \varepsilon)k\Omega \\ R_2 = R_4 = 100(1 \pm \varepsilon)k\Omega \\ \varepsilon = 0{,}01 \end{cases}$$

Si valuti il CMRR dell'intero circuito; si consideri poi il CMRR dell'intero circuito nel caso in cui l'operazionale abbia un suo CMRR pari ad 80 dB

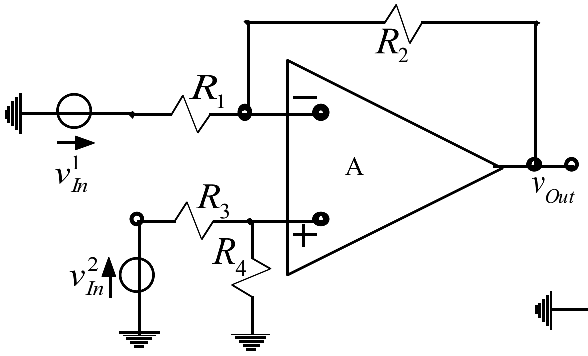


Figura 9

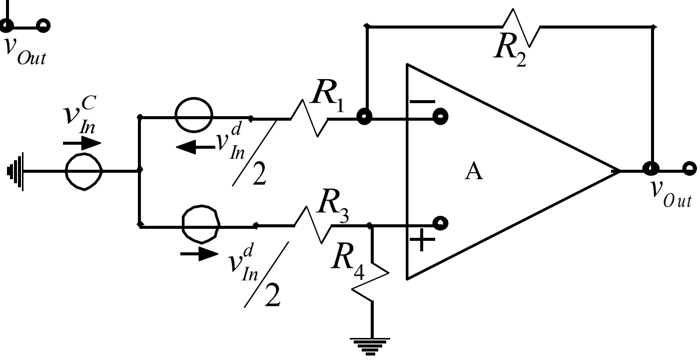


Figura 10

Calcolare il CMRR totale del circuito sapendo che il CMRR dell'operazionale è infinito significa calcolare il CMRR dovuto alle incertezze sulle resistenze. Per risolvere questo problema ci sono due modi possibili: il primo consiste nel separare i due segnali di ingresso in un segnale di ingresso differenziale e in un segnale di ingresso di modo comune e di ottenere dunque una configurazione come quella mostrata in figura 10. In questa configurazione si potrebbero le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} A_d = \left.\dfrac{v_{Out}}{v_{In}^d}\right|_{v_{In}^C=0} \\ A_C = \left.\dfrac{v_{Out}}{v_{In}^C}\right|_{v_{In}^d=0} \end{cases}$$

grazie alle quali si giungeva poi alla seguente espressione del CMRR totale

$$CMRR = \left|\frac{A_d}{A_C}\right|$$

Un secondo modo è quello di mantenere il circuito come mostrato in figura 9 e di calcolare la tensione di uscita sfruttando il metodo della sovrapposizione degli effetti: spegniamo dunque il generatore numero 2 e otteniamo una configurazione nella quale vediamo che il resistore numero 3 e il resistore numero 4 diventano assolutamente ininfluenti; ciò significa che siamo tornati ad avere un amplificatore invertente. L'uscita sarà dunque:

$$v_{Out}^I = -v_1 \frac{R_2}{R_1}$$

Se invece spegniamo il generatore numero 1 si ottiene una configurazione nella quale siamo tornati ad avere un amplificatore non invertente dove la tensione in ingresso non coincide con la tensione del generatore ma coincide con la tensione che ricade sul solo resistore numero 4 (sarà dunque necessario applicare la regola del partitore di tensione). In questa seconda situazione l'uscita sarà:

$$v_{Out}^{II} = v_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Complessivamente si avrà allora:

$$v_{Out} = v_{Out}^{I} + v_{Out}^{II} = v_1\left(-\frac{R_2}{R_1}\right) + v_2\frac{R_4}{R_3+R_4}\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Imponiamo ora che sia:

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{R_2}{R_1} \\ k_2 = \dfrac{R_4}{R_3} \end{cases}$$

così che l'uscita possa essere espressa nel modo seguente:

$$v_{Out} = -v_1 k_1 + v_2\left[\frac{k_2}{1+k_2}(1+k_1)\right]$$

Imponendo, ancora, che sia:

$$\begin{cases} G^- = k_1 \\ G^+ = \dfrac{k_2}{1+k_2}(1+k_1) \end{cases}$$

Si avrà allora:

$$v_{Out} = -G^- v_1 + G^+ v_2$$

Consideriamo ora le due seguenti espressioni:

$$\begin{cases} A_d = \dfrac{G^+ + G^-}{2} \\ A_C = G^+ - G^- \end{cases}$$

che, nel caso che stiamo considerando, possono essere riscritte nel modo seguente:

$$\begin{cases} A_d = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{k_2}{1+k_2}(1+k_1) + k_1\right] \\ A_C = \dfrac{k_2}{1+k_2}(1+k_1) - k_1 \end{cases}$$

Il CMRR complessivo del circuito sarà allora:

$$CMRR = \left|\frac{A_d}{A_C}\right| = \left|\frac{\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{k_2}{1+k_2}(1+k_1)+k_1\right]}{\dfrac{k_2}{1+k_2}(1+k_1)-k_1}\right| = \frac{1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}\right)}{\left|\dfrac{1}{k_1}-\dfrac{1}{k_2}\right|}$$

Siccome la prima resistenza è identica alla terza e la seconda è identica alla quarta si avrà:

$$k_1 = k_2 = k = 100$$

Tenendo poi conto degli errori ε *nella definizione delle resistenze, si può scrivere:*

$$\frac{R_1(1\pm\varepsilon)}{R_2(1\pm\varepsilon)} = \frac{R_3(1\pm\varepsilon)}{R_4(1\pm\varepsilon)} = \frac{1}{k}(1\pm 2\varepsilon)$$

e quindi il CMRR complessivo sarà espresso nel modo seguente:

$$CMRR = \frac{1+\dfrac{1}{2k}(1\pm 2\varepsilon + 1 \pm 2\varepsilon)}{\dfrac{1}{k}(1\pm 2\varepsilon - 1 \pm 2\varepsilon)} = \frac{1+\dfrac{1}{2k}(2\pm 4\varepsilon)}{\pm\dfrac{4\varepsilon}{k}} = \frac{k+1(1\pm 2\varepsilon)}{\pm 4\varepsilon} = 2525{,}5 = 68{,}05dB$$

Qualora l'operazionale abbia anche un suo CMRR interno, l'operazionale complessivo del circuito si ricaverà dalla seguente espressione:

$$\frac{1}{CMRR_{Tot}} = \frac{1}{CMRR_R} + \frac{1}{CMRR_{Op}}$$

dalla quale si ricava:

$$CMRR_{Tot} = 66{,}09dB$$

Temi d'esame sugli amplificatori operazionali.

Dato l'amplificatore reazionato di figura 1 stabilire, motivando la scelta, i segni dei morsetti di ingresso del primo operazionale e stabilire il guadagno ideale dell'amplificatore. Si valuti poi l'effetto sull'uscita di due generatori di Offset connessi con i due operazionali. I dati numerici sono i seguenti:

$$\begin{cases} A_1 = A_2 = 10^5 \\ R_1 = R_2 = 8k\Omega \\ R_3 = 100\Omega \\ R_4 = 100k\Omega \\ v_{Os}^1 = v_{Os}^2 = 1mV \end{cases}$$

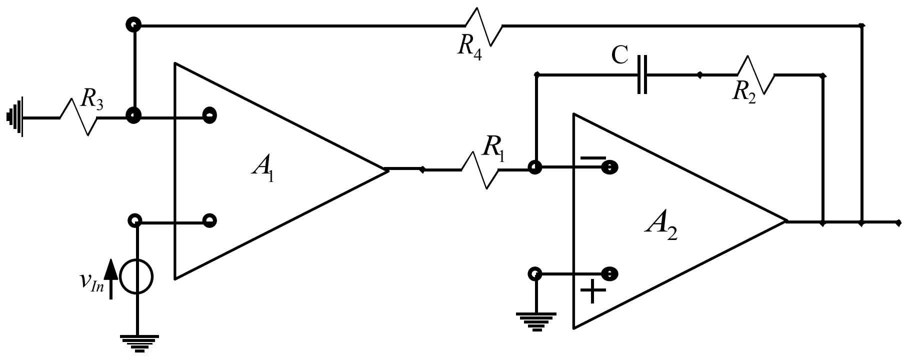


Figura 1

Come prima cosa osserviamo che, siccome il testo parla di un amplificatore reazionato, si dovrà avere il guadagno d'anello negativo. Valutiamo dunque il guadagno d'anello in continua (e quindi apriamo il condensatore) facendo riferimento alla figura 2.

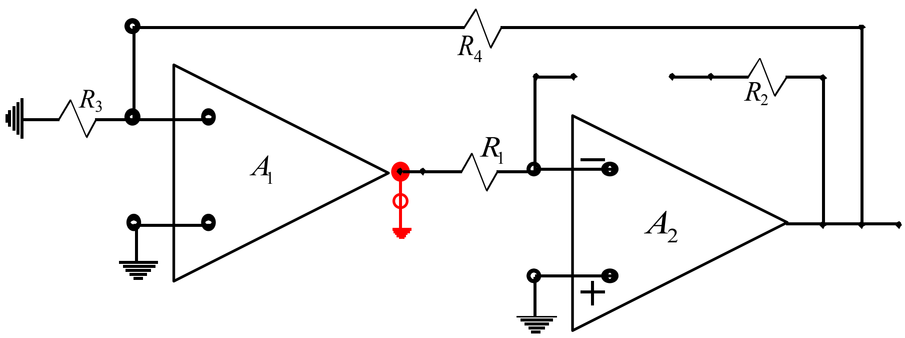


Figura 2

Per calcolare il guadagno d'anello vediamo che la tensione che viene imposta dal generatore di testi entra tutta nel secondo operazionale perché, non scorrendo corrente nella resistenza numero 1, la caduta di tensione su tale elemento sarà nulla. All'uscita dal secondo operazionale si avrà allora:

$$v_{Out2} = -A_2 v_{Test}$$

La tensione che esce dal secondo operazionale si ripartisce sulla quarta e terza resistenza (essendo la resistenza numero 2 su un ramo morto); all'ingresso del primo operazionale si avrà allora:

$$v = -A_2 \frac{R_3}{R_3 + R_4} v_{Test}$$

Attraversando il primo operazionale si avrà allora:

$$v_{Out}^{Test} = (\pm A_1)\left(-A_2 \frac{R_3}{R_3 + R_4}\right) v_{Test}$$

e quindi il guadagno d'anello sarà:

$$G_{Loop} = (\pm A_1)\left(-A_2 \frac{R_3}{R_3 + R_4}\right)$$

Siccome, come si è detto in precedenza, il guadagno d'anello deve essere negativo, il morsetto di ingresso della tensione del primo operazionale deve essere il morsetto non invertente, in modo da avere:

$$G_{Loop} = (+A_1)\left(-A_2 \frac{R_3}{R_3 + R_4}\right) = -A_1 A_2 \frac{R_3}{R_3 + R_4} \cong -10^7$$

Valutiamo ora il guadagno ideale; per fare questo facciamo riferimento alla figura 3.

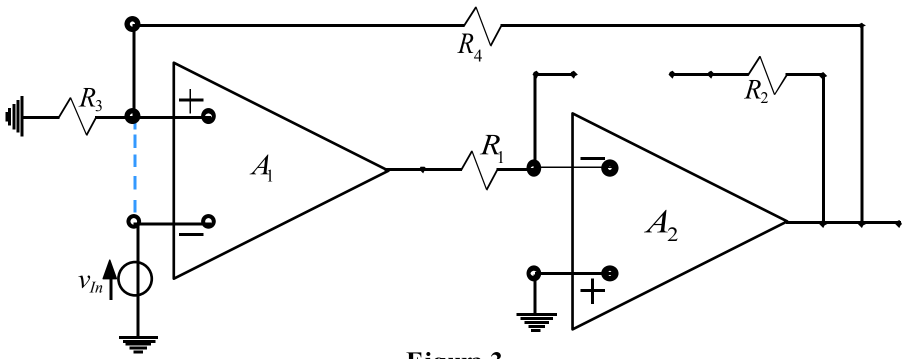


Figura 3

Grazie al contatto virtuale possiamo dire che la resistenza numero 3 ha la stessa tensione del generatore di ingresso e quindi la corrente che attraversa tale resistore sarà:

$$i_3 = \frac{v_3}{R_3} = \frac{v_{In}}{R_3}$$

Questa corrente non può far altro che riversarsi tutta nel resistore numero 4 e quindi la caduta di tensione su tale elemento sarà:

$$v_4 = R_4 i_4 = R_4 i_3 = R_4 \frac{v_{In}}{R_3}$$

La tensione di uscita si può allora valutare sfruttando (grazie al collegamento ideale) la maglia composta dal generatore di ingresso e dalla resistenza numero 4; si avrà dunque:

$$v_{Out} = v_{In} + v_4 = v_{In}\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)$$

Ricaviamo dunque il seguente guadagno ideale:

$$G_{Id} = 1 + \frac{R_4}{R_3} = 1001$$

Calcoliamo ora anche il guadagno diretto imponendo che il primo operazionale sia quello che guida il tutto. Il guadagno diretto si ottiene allora facendo riferimento alla figura 4.

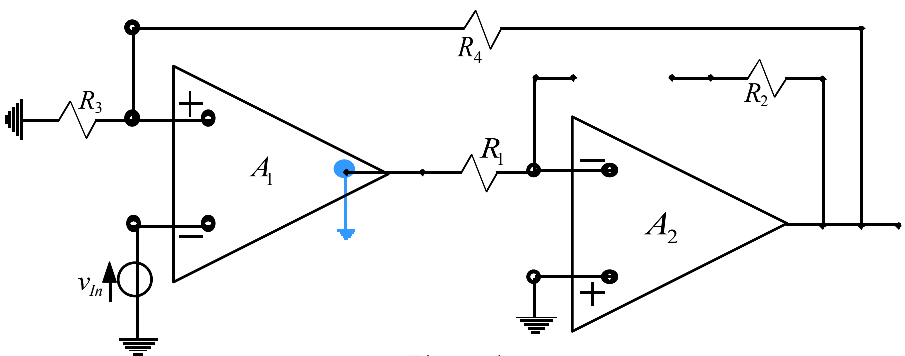


Figura 4

Vediamo dunque che, essendo il primo operazionale spento e non circolando corrente attraverso la resistenza numero 1, non ci sarà caduta di tensione su tale resistore e quindi la tensione nulla si trasferirà direttamente nell'ingresso del secondo operazionale e quindi, complessivamente, l'uscita è nulla. Possiamo dunque dire che:

$$G_{Dir} = 0$$

Per valutare come si trasferiscono in uscita le tensioni di Offset dei due operazionali devo far riferimento alla figura 5.

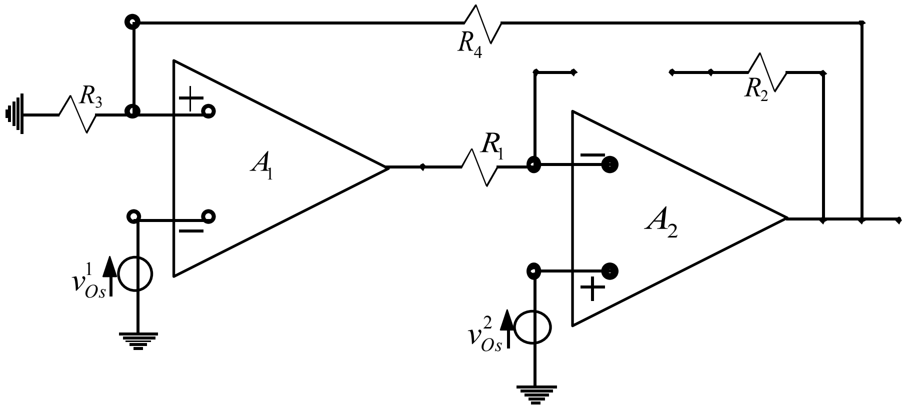


Figura 5

Vediamo come le due tensioni di Offset si trasferiscono singolarmente sull'uscita; per fare questo spegniamo inizialmente la tensione di Offset del secondo operazionale e soffermiamoci solo sul primo. Spegnendo il generatore di Offset del secondo operazionale torniamo in una situazione circuitalmente identica a quella mostrata in figura 1 e quindi avremo il medesimo guadagno ideale e il medesimo guadagno diretto valutati prima. Essendo nullo il guadagno diretto possiamo dire che la tensione di Offset del primo operazionale si presenta in uscita mediata dal solo guadagno ideale e quindi si avrà:

$$G_R^{Os1} = G_{Id}^{Os1}\frac{T}{1+T} \approx G_{Id}^{Os1}$$

Dunque tale tensione di Offset si presenterà in uscita come segue:

$$v_{Out}^{Os1} \approx G_{Id}^{Os1} v_{Os}^{1} = 1{,}001V$$

Spegniamo ora la tensione di Offset del primo operazionale e soffermiamoci solo sul secondo; facendo questo si ottiene la situazione circuitale mostrata in figura 6

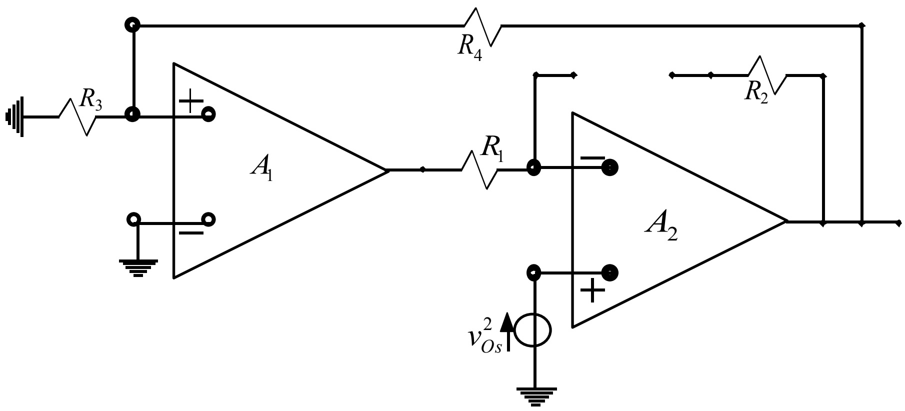


Figura 6

Per calcolare il guadagno reale relativo a questa tensione di Offset dobbiamo per prima cosa valutare il relativo guadagno ideale e quindi dobbiamo fare riferimento alla figura 7 (ricordando che abbiamo scelto come operazionale guida il primo). Da tale figura si vede che, considerando il contatto virtuale, la caduta di tensione sul resistore numero 3 è nulla e dunque in tale resistore non può circolare corrente. Se non circola corrente nel resistore numero 3 non ne circolerà nemmeno nel resistore numero 4 e quindi anche la caduta di tensione su tale resistore sarà nulla; come conseguenza l'uscita sarà nulla e si avrà:

$$G_{Id}^{Os2} = 0$$

Per calcolare il guadagni diretto relativo a questa tensione di Offset, invece, facciamo riferimento alla figura 8 (ricordando che abbiamo scelto come operazionale guida il primo) e otteniamo:

$$G_{Dir}^{Os2} = A_2$$

Il guadagno reale relativo alla tensione di Offset sul secondo operazionale sarà allora:

$$G_R^{Os2} = G_{Id}^{Os2}\frac{1}{1+T}$$

Dunque tale tensione di Offset si presenterà in uscita come segue:

$$v_{Out}^{Os2} \approx G_R^{Os2} v_{Os}^2 = 10nV$$

Sarebbe stato anche possibile utilizzare il secondo operazionale come operazionale guida ma i conti sarebbero stati più complicati.

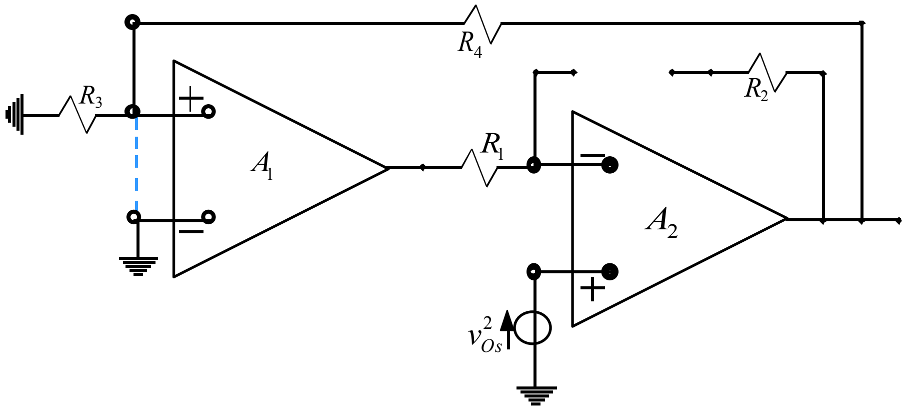


Figura 7

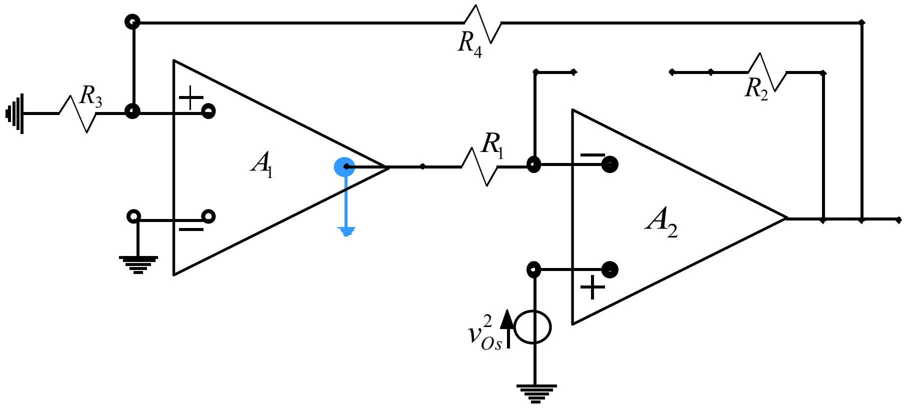


Figura 8

Si consideri ora il circuito di figura 9. E' richiesto di valutare la tensione del morsetto non invertente del primo operazionale, la tensione di uscita dal secondo operazionale a causa di una corrente di Bias del primo operazionale; il trasferimento al nodo J di una tensione di Offset sul primo operazionale (supposti ideali gli operazionali) e come varia tale trasferimento qualora si metta in parallelo al resistore numero 3 un condensatore. I dati numerici sono i seguenti:

$$\begin{cases} R_1 = R_2 = 10k\Omega \\ R_3 = 99k\Omega \\ R_4 = 1k\Omega \\ R_5 = 10M\Omega \\ I_B = nA \end{cases}$$

Per valutare il potenziale del morsetto non invertente del primo operazionale notiamo innanzitutto che tale morsetto è connesso direttamente con il morsetto invertente del secondo operazionale e quindi mi basterà valutare la tensione su tale morsetto per aver risposto alla domanda. Soffermandosi sul secondo operazionale si vede che, in continua, la capacità si apre e si ha, praticamente, una configurazione invertente con una resistenza in meno. Notiamo poi che il morsetto non invertente del secondo operazionale è a terra e di conseguenza ha potenziale zero e quindi, pensando al contatto virtuale tra i morsetti del secondo operazionale (è possibile pensare ciò perché gli operazionali sono tutti ideali) anche il morsetto invertente del secondo operazionale ha potenziale zero. In conclusione possiamo affermare che il morsetto non invertente del primo operazionale è ha potenziale nullo.

Per valutare ora come si trasferisce sull'uscita del secondo operazionale una corrente di Bias sul primo operazionale osserviamo, facendo riferimento alla figura 10, che solo il generatore di Bias connesso al morsetto non invertente del primo operazionale avrà una qualche influenza sul secondo operazionale. Osserviamo infatti che la corrente imposta da tale generatore si riverserà tutta nella resistenza numero 5 (essendo il condensatore aperto). L'uscita cercata sarà allora la seguente:

$$v_{Out}^2 = \pm I_B R_5$$

L'incertezza sul segno è dovuto al fatto che il segno delle correnti di Bias non è assegnato con certezza.
Passiamo ora a valutare come si trasmette la tensione di Offset del primo operazionale sul nodo J. Come prima cosa osserviamo che, siccome in precedenza abbiamo stabilito che la tensione del morsetto non invertente del primo operazionale è nulla, possiamo da ora in poi considerare un circuito come quello mostrato in figura 11.

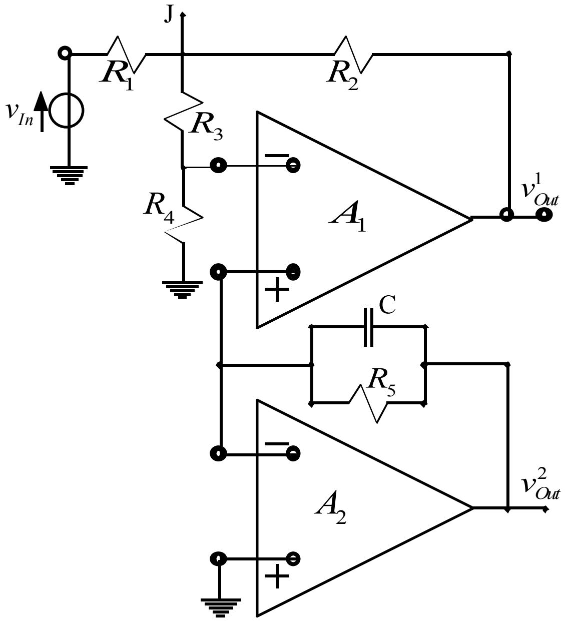


Figura 9

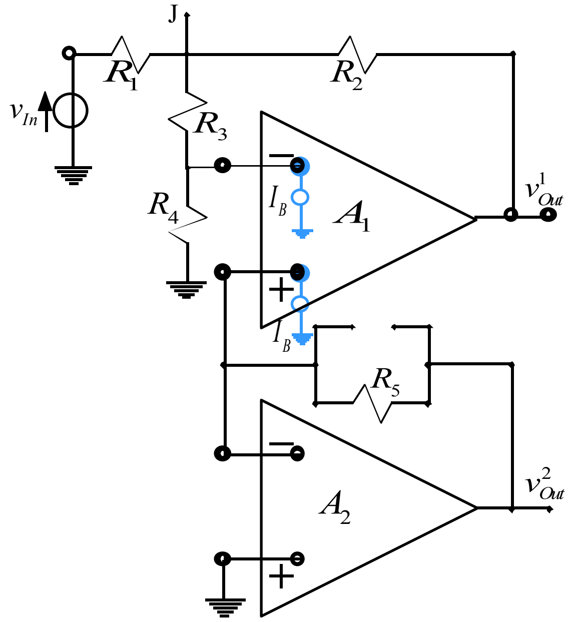


Figura 10

Sfruttando il contatto virtuale possiamo allora affermare che la tensione sul quarto resistore equivale alla tensione di Offset, ovvero:

$$v_4 = v_{Os}$$

La corrente che attraversa il quarto resistore sarà allora:

$$i_4 = \frac{v_4}{R_4} = \frac{v_{Os}}{R_4}$$

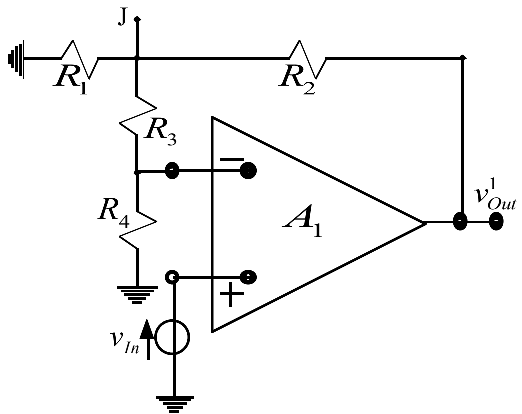


Figura 11

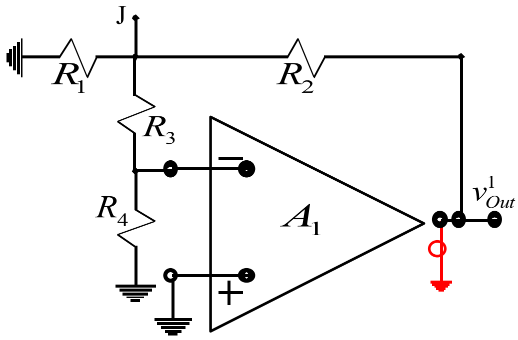


Figura 12

Tutta questa corrente non può fare altro che riversarsi nel terzo resistore e quindi la caduta di tensione su tale elemento sarà:

$$v_3 = R_3 i_3 = R_3 i_4 = R_3 \frac{v_{Os}}{R_4}$$

Facendo ora riferimento alla maglia composta dal terzo e dal quarto resistore si può ricavare la tensione tra il nodo J e terra, che è:

$$v_J = v_4 + v_3 = \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) v_{Os}$$

Ricaviamo dunque il guadagno ideale che in questo caso sarà:

$$G_{Id} = 1 + \frac{R_3}{R_4} = 100$$

Dobbiamo ora valutare il guadagno d'anello e quindi facciamo riferimento alla figura 12. Notiamo che la tensione che viene immessa nel circuito dal generatore si ripartisce in prima approssimazione solo tra il primo e il secondo resistore (in quanto il terzo resistore presenta una resistenza quasi 100 volte superiore); la tensione che cade sul primo resistore è allora la seguente:

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_{Test}$$

Applicando la legge di Kirchhoff alla maglia composta dal primo, dal terzo e dal quarto resistore, possiamo osservare che la caduta di tensione sul primo resistore equivale alla caduta di tensione sulla serie del terzo e del quarto resistore. Della tensione che si ripartisce sul terzo e sul quarto resistore, ci interessa solo quella che ricade sul quarto resistore. Sul quarto resistore ci sarà dunque la seguente caduta di tensione:

$$v_1 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_{Test}$$

La caduta di tensione sul quarto resistore corrisponde alla tensione in ingresso nell'operazionale; avremo dunque:

$$v_{Out}^{Test} = -A_1 \frac{R_4}{R_3 + R_4} \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_{Test}$$

e quindi il guadagno d'anello è il seguente:

$$G_{Loop} = -A_1 \frac{R_4}{R_3 + R_4} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = -\frac{A_1}{200}$$

Il trasferimento dalla tensione di Offset alla tensione del nodo J è allora, complessivamente, il seguente:

$$G_R = G_{Id} \frac{T}{1+T} = 100 \frac{T}{1+T}$$

Vediamo ora come si modifica la funzione di trasferimento quando introduciamo in parallelo alla resistenza numero 3 un condensatore, ovvero quando ci mettiamo nella situazione rappresentata in figura 13.

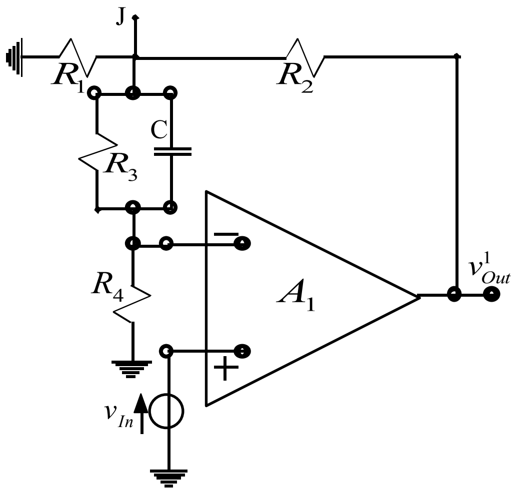


Figura 13

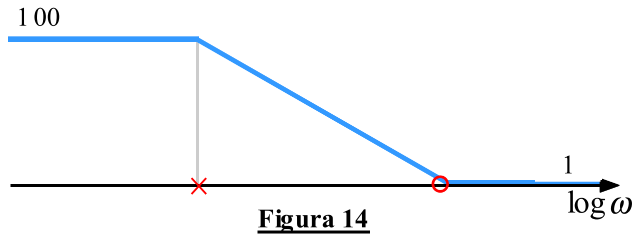


Figura 14

In questo caso il discorso si potrà ripetere in maniera assolutamente identica a quanto visto in precedenza con l'unica differenza che invece della semplice resistenza numero 3 si avrà un'impedenza; il guadagno ideale sarà allora il seguente:

$$G_{Id} = 1 + \frac{Z_3}{R_4}$$

dove sarà:

$$Z_3 = \frac{R_3}{1 + sCR_3}$$

Nella figura 14 vediamo come il modulo del trasferimento ideale varia con il variare della frequenza; quando siamo a basse frequenze il condensatore è aperto e quindi il trasferimento ideale è quello calcolato in precedenza; quando *invece si passa ad alte frequenze il condensatore diventa un corto circuito e quindi la tensione del generatore di Offset si ripartirà direttamente sul resistore numero 4 e quindi direttamente sul nodo J (poiché la resistenza numero 3 risulterà in parallelo con un corto circuito) e quindi il trasferimento ideale sarà unitario. L'andamento sarà quindi quello mostrato nella figura 14. Per trovare il polo vediamo che la capacità vede solo la resistenza numero 3 e quindi si avrà:*

$$\omega_p = \frac{1}{CR_3}$$

Per trovare lo zero possiamo sfruttare il rapporto tra le quote (che è pari a 100) e trasferirlo sul rapporto tra lo zero e il polo, si avrà così:

$$\omega_z = \frac{100}{CR_3}$$

Amplificatore per strumentazione. Impedenze di ingresso con operazionali retroazionati.
Come prima cosa ci occupiamo dell'amplificatore per strumentazione che vediamo in figura 1.

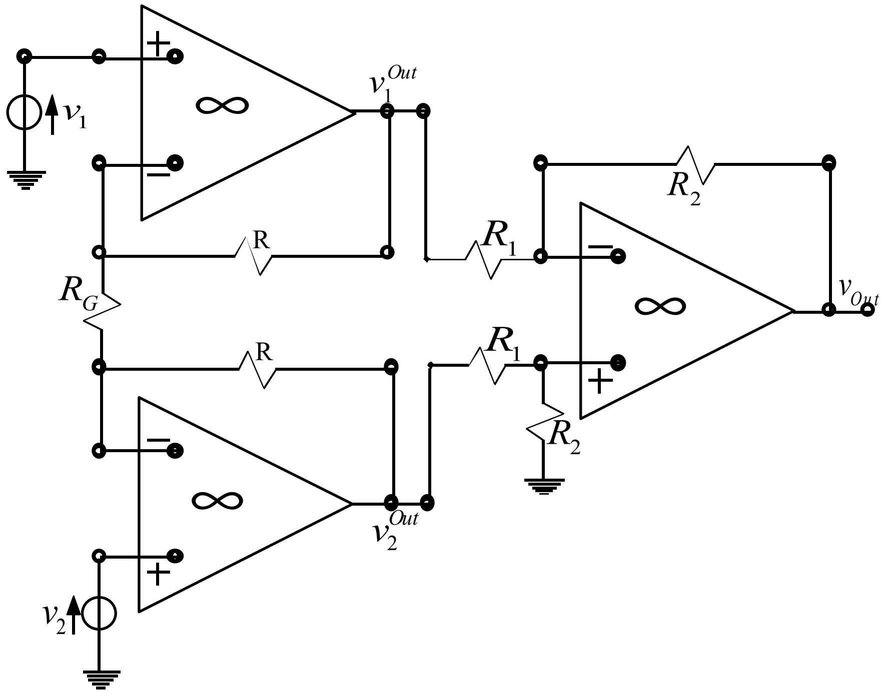


Figura 1

Notiamo che la seconda parte di questo circuito non è altro che un amplificatore delle differenze come quello di cui ci siamo occupati nell'esercitazione numero 4; ci concentriamo dunque solo sulla prima parte del circuito e, in particolare, vogliamo valutare la differenza di tensione che entra nell'amplificatore delle differenze. Siccome gli operazionali sono tutti ideali possiamo tener conto del contatto virtuale per i due operazionali che precedono l'amplificatore delle differenze; questo fa si che sulla resistenza R_G cada una tensione

$$v_G = v_1 - v_2$$

Nel medesimo resistore scorrerà dunque la corrente

$$i_G = \frac{v_G}{R_G} = \frac{v_1 - v_2}{R_G}$$

Siccome tale corrente non può venire dai due operazionali, la medesima corrente i_G sarà anche la corrente che scorre attraverso le due resistenze R; la caduta di tensione su tali resistori sarà dunque:

$$v_R = i_R R = \frac{v_1 - v_2}{R_G} R$$

Sfruttando allora la maglia composta dalle due resistenze R, dalla resistenza R_G e dalle tensioni di uscita dei due primi operazionali, si ricava:

$$v_1^{Out} - v_R - v_G - v_R - v_2^{Out} = 0$$

dalla quale si ricava:

$$v_1^{Out} - v_2^{Out} = (v_1 - v_2)\left(1 + \frac{2R}{R_G}\right)$$

<u>*Valutare l'impedenza di ingresso vista al punto B del circuito di figura 2 corredato dei seguenti valori numerici:*</u>

$$\begin{cases} R_1 = 1k\Omega \\ R_2 = 99k\Omega \\ R_d = 1M\Omega \\ R_{Out} = 100\Omega \\ A = 10^5 \end{cases}$$

Il primo passo per valutare l'impedenza vista dal punto B è la scelta del generatore; a seconda che si scelga un generatore di corrente o di tensione si ottengono le due configurazioni mostrate in figura 3 e 4.

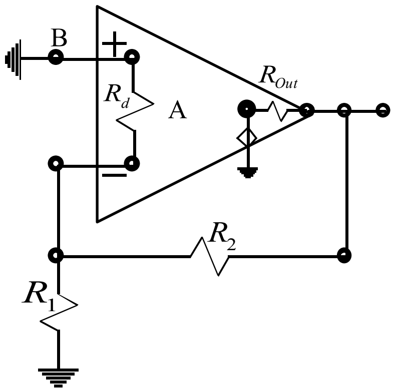


Figura 2

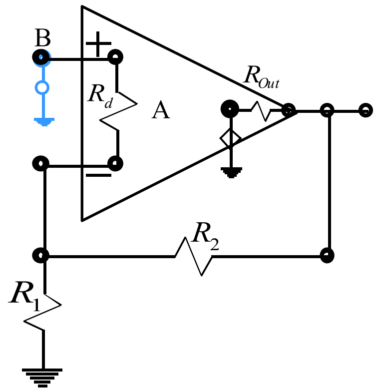


Figura 3

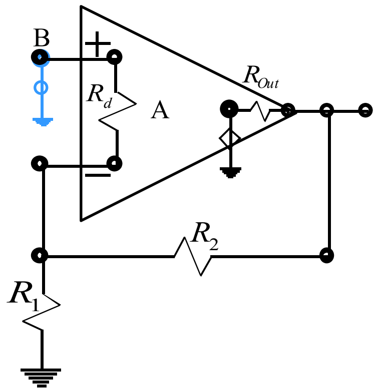


Figura 4

Usando il generatore di corrente per calcolare il guadagno d'anello dobbiamo fare riferimento alla figura 5 nella quale viene spento il generatore indipendente ed inserito il generatore di test.

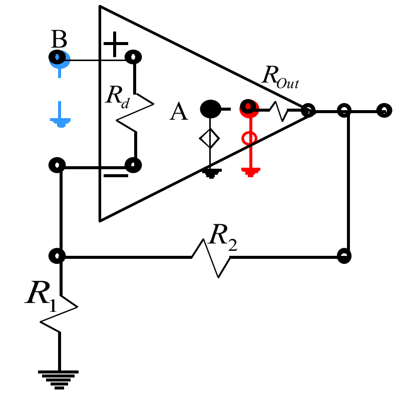


Figura 5

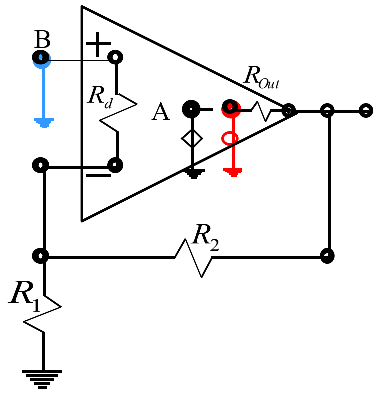


Figura 6

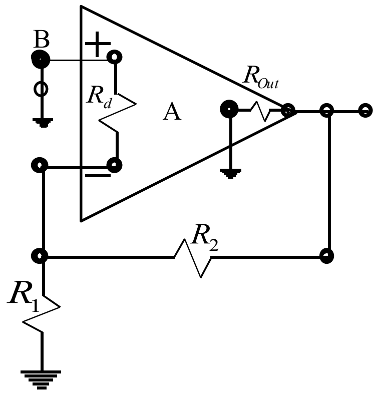


Figura 7

Avendo aperto il generatore di corrente, la resistenza R_d si viene a trovare su un ramo morto e quindi la tensione imposta dal generatore di test si trasferisce dapprima sulla resistenza R_{Out}, poi sulla resistenza R_2 e infine sulla sola resistenza R_1. In ingresso dell'operazionale non abbiamo dunque tensione e questo significa che il guadagno d'anello in questa situazione è nullo. Mettiamoci dunque nel caso in cui venga utilizzato un generatore di tensione; il calcolo del guadagno d'anello si farà sfruttando la figura 6 nella quale si è spento il generatore ed inserito il generatore di test. In questo caso la tensione introdotta dal generatore di tensione ricade sulla resistenza R_{Out}, sulla resistenza R_2 e poi sul parallelo tra le resistenze R_1 ed R_d. La tensione che entra nell'operazionale sarà allora:

$$v = \frac{R_1 // R_d}{R_{Out} + R_2 + (R_1 // R_d)} v_{Test}$$

e quindi il guadagno d'anello sarà, in questo caso:

$$G_{Loop} = -A \frac{R_1 // R_d}{R_{Out} + R_2 + (R_1 // R_d)} = -A \frac{\frac{R_1 R_d}{R_1 + R_d}}{R_{Out} + R_2 + \frac{R_1 R_d}{R_1 + R_d}} \cong -10^3$$

Osserviamo che il segno negativo è stato messo perché era:

$$v = v^- - v^+$$

mentre, come sappiamo, l'operazionale amplifica l'opposto di questa differenza. Siccome abbiamo trovato un G_{Loop} nullo con il generatore di corrente e non nullo per il generatore di tensione possiamo dire che il punto B si trova sull'anello di reazione e che il circuito è stabilizzato in corrente.

Per valutare l'impedenza di ingresso ad anello chiuso (Close Loop) possiamo utilizzare la seguente relazione:

$$Z_{CL} = Z_{OL} \left(1 - G_{Loop}\right) \qquad (1)$$

dove Z_{OL} è l'impedenza ad anello aperto (Open Loop) e si calcola facendo riferimento alla figura 7 nella quale si valuta l'impedenza al punto B spegnendo il generatore pilotato in uscita dell'operazionale. Come si vede in figura 7, *dunque, l'impedenza complessiva vista dal generatore è la somma tra la resistenza R_d e il parallelo tra la resistenza R_1 e la serie tra R_2 ed R_{Out}, ovvero:*

$$Z_{OL} = R_d + R_1 // (R_2 + R_{Out}) = R_d + \frac{R_1 (R_2 + R_{Out})}{R_1 + R_2 + R_{Out}} \cong 10^6 \Omega = 1 M\Omega$$

Possiamo ora calcolare l'impedenza cercata sfruttando la relazione (1) e ricavando:

$$Z_{CL} \cong 10^9 \Omega = 1 G\Omega$$

<u>Sfruttando lo stesso circuito dell'esercizio precedente (con i medesimi valori numerici) si ricalcoli l'impedenza di ingresso al punto B qualora sia presente una resistenza di ingresso di modo comune pari a 100 MΩ.</u>
Il circuito si modificherà nel modo mostrato in figura 8.

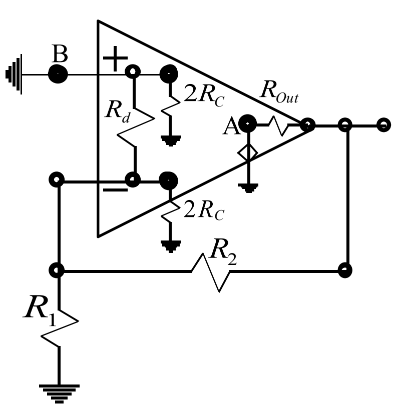


Figura 8

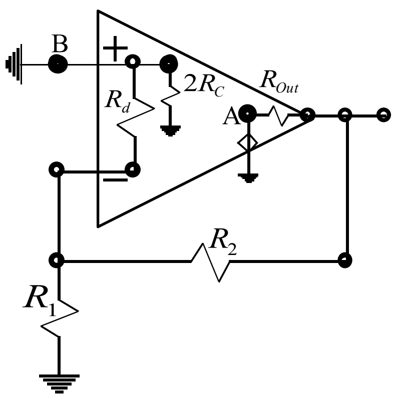


Figura 9

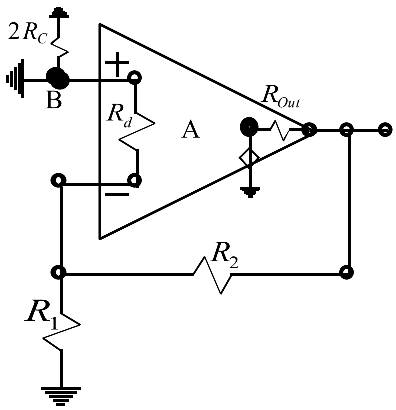


Figura 10

Il discorso relativo alla scelta del generatore rimane assolutamente identico a quello fatto per l'esercizio precedente. Notiamo poi che nel circuito si viene a configurare un parallelo tra la resistenza R_1 e la resistenza $2R_C$; a causa dell' enorme differenza numerica quest'ultima resistenza diventa praticamente trascurabile e quindi il circuito si può approssimare in quello mostrato in figura 9. Tale circuito è poi ovviamente coincidente con quello mostrato in figura 10 nella quale si vede che nel punto B si configura il parallelo tra l'impedenza in ingresso calcolata nell'esercizio precedente ed una resistenza $2R_C$. La nuova impedenza di ingresso, detta Z_{CL} l'impedenza di ingresso calcolata nell'esercizio precedente, sarà:

$$Z_{CL}^1 = Z_{CL} // 2R_C = \frac{Z_{CL} \cdot 2R_C}{Z_{CL} + 2R_C} \cong 160 M\Omega$$

<u>Valutare l'impedenza di ingresso vista al punto B del circuito di figura 11 corredato dei seguenti valori numerici:</u>

$$\begin{cases} R_1 = R_2 = R_4 = 1 M\Omega \\ R_3 = 1 k\Omega \\ A = 10^6 \end{cases}$$

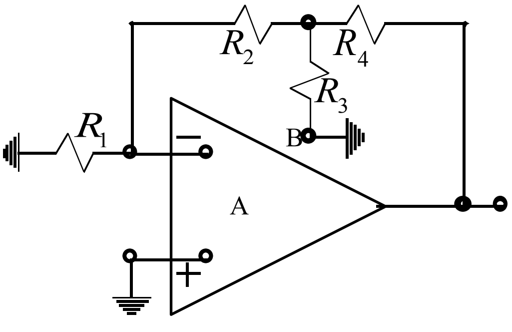


Figura 11

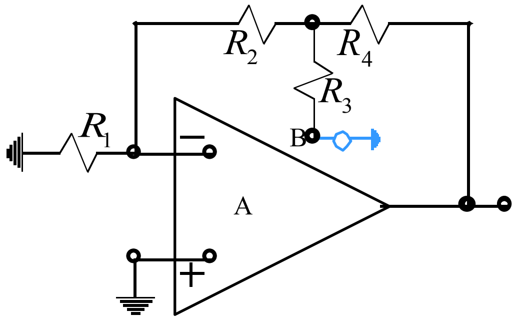


Figura 12

Il primo passo per valutare l'impedenza vista dal punto B è la scelta del generatore; a seconda che si scelga un generatore di corrente o di tensione si ottengono le due configurazioni mostrate in figura 12 e 13. Usando il generatore di corrente per calcolare il guadagno d'anello dobbiamo fare riferimento alla figura 14 nella quale viene spento il generatore indipendente ed inserito il generatore di test. Avendo aperto il generatore di corrente, la resistenza R_3 si viene a trovare su un ramo morto e quindi la tensione imposta dal generatore di test vede la serie dei resistori R_4, R_2 ed R_1. In ingresso dell'operazionale abbiamo dunque la tensione che cade sul resistore R_1 e questo significa che il guadagno d'anello in questa situazione è il seguente:

$$G_{Loop} = -A\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_4}$$

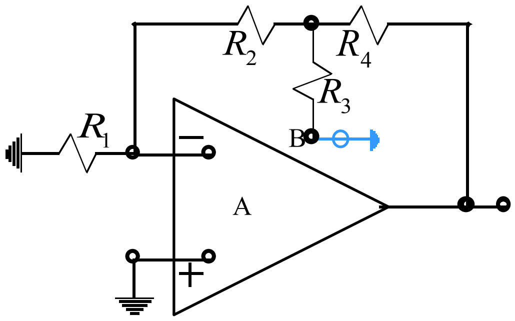


Figura 13

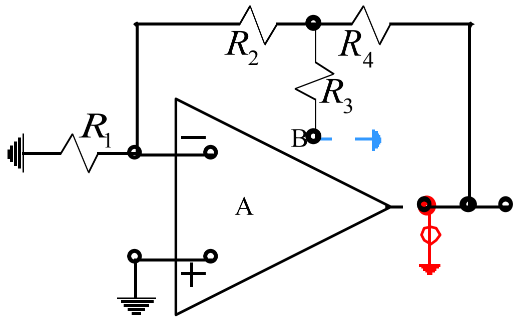


Figura 14

Mettiamoci ora nel caso in cui venga utilizzato un generatore di tensione; il calcolo del guadagno d'anello si farà sfruttando la figura 15 nella quale si è spento il generatore ed inserito il generatore di test.

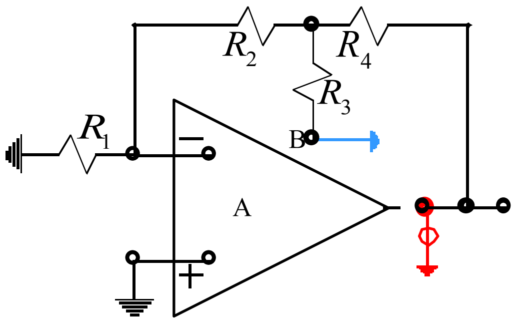


Figura 15

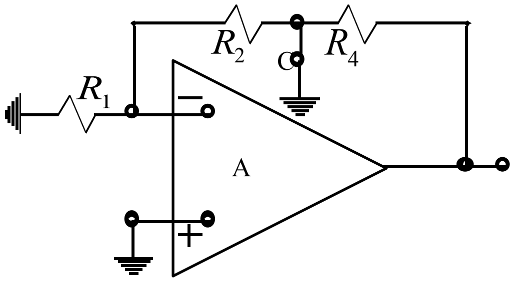


Figura 16

Nel primo esercizio dell'esercitazione numero 4 ci eravamo già trovati a dover affrontare il calcolo del G_{Loop} per una configurazione come questa e avevamo trovato il seguente risultato:

$$G_{Loop} - A\frac{R_1 R_3}{R_4\left(R_1 + R_2 + R_3\right) + R_3\left(R_1 + R_2\right)}$$

Siccome in entrambi i casi è stato trovato un G_{Loop} diverso da zero, concludiamo che non siamo sull'anello di retroazione; facciamo dunque un passo avanti e andiamo a cercare l'impedenza in ingresso nel punto C mostrato in figura 16 che chiameremo Z′; sarà allora necessario valutare quale generatore sia necessario mettere, a seconda che si scelga un generatore di tensione o di corrente si ottengono le due configurazioni mostrate in figura 17 e 18.

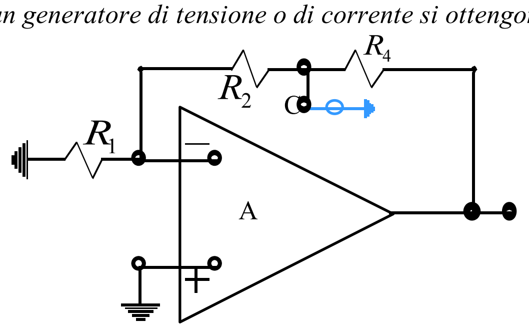


Figura 17

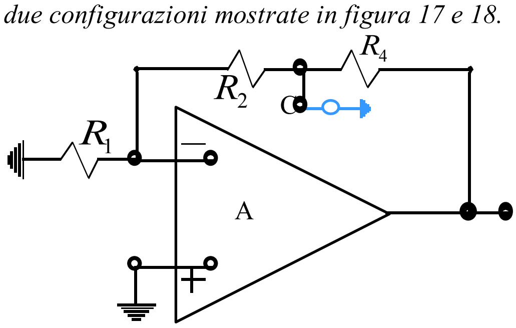


Figura 18

Usando il generatore di tensione per calcolare il guadagno d'anello dobbiamo fare riferimento alla figura 19 dalla quale appare evidente che la tensione imposta dal generatore di test si trasferisce completamente sul resistore R_4; il resistore R_2 si trova invece in parallelo con un corto circuito e quindi la sua caduta di tensione è nulla. Essendo nulla la caduta di tensione non circolerà corrente e quindi non circolerà corrente neppure nel resistore R_1. Non essendoci caduta di tensione su R_1 non ho tensione in ingresso dell'operazionale e quindi nemmeno in uscita. Se ne conclude che il G_{Loop} è nullo. Mettiamoci dunque nel caso in cui venga utilizzato un generatore di corrente; il calcolo del guadagno d'anello si farà sfruttando la figura 20 nella quale vediamo una situazione del tutto analoga a quello mostrata in figura 14. Ricordando il discorso visto in quell'occasione si ricava allora che il guadagno d'anello è il seguente:

$$G_{Loop} = -A\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_4} = -\frac{10^6}{3}$$

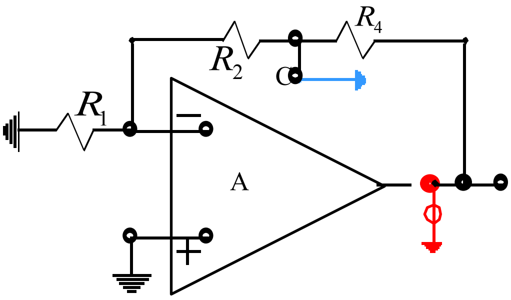


Figura 19

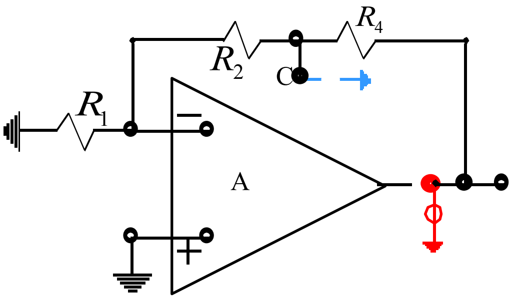


Figura 20

Siccome abbiamo trovato un G_{Loop} nullo con il generatore di tensione e non nullo con il generatore di corrente possiamo dire che il punto C si trova sull'anello di reazione e che il circuito è stabilizzato in tensione. Per valutare l'impedenza di ingresso ad anello chiuso utilizziamo la seguente relazione:

$$Z_{CL} = \frac{Z_{OL}}{(1 - G_{Loop})} \tag{2}$$

che si differenzia dalla relazione (1) perché in quel caso il circuito era stabilizzato in corrente. L'impedenza di ingresso ad anello aperto la valutiamo sfruttando il circuito di figura 21 nel quale si è spento il generatore pilotato dell'operazionale.

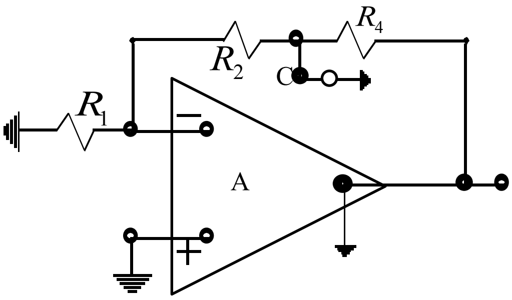


Figura 21

Come si vede in figura 21, dunque, l'impedenza complessiva vista dal generatore è il parallelo tra la resistenza R_4 e la somma delle resistenza R_1 ed R_2, ovvero:

$$Z_{OL} = R_4 // (R_2 + R_1) = \frac{R_4(R_2 + R_1)}{R_4 + R_2 + R_1} = \frac{2}{3} M\Omega$$

Applicando ora la relazione (2) si ricava:

$$Z_{CL} \cong 2\Omega$$

Abbiamo così trovato l'impedenza di ingresso Z′; ricordando che avevamo fatto un passo avanti saltando la resistenza R_3 otteniamo, osservando che Z′ ed R_3 sono in serie tra di loro:

$$Z = R_3 + Z^1 = 1002\Omega$$

I diodi. Amplificatore logaritmico. Amplificatore esponenziale. Moltiplicatore analogico. Diodo rettificatore.
Come prima cosa ci occupiamo dell'amplificatore logaritmico che vediamo in figura 1.

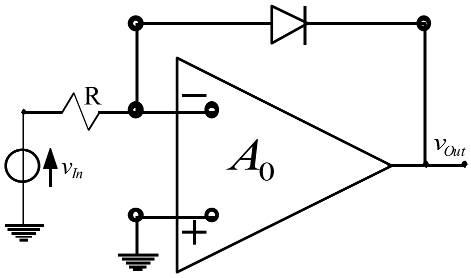


Figura 1

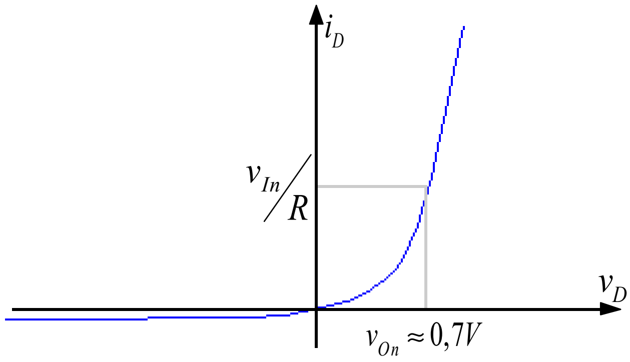


Figura 2

Il diodo presente nel circuito è acceso o spento a seconda del verso della tensione; come si nota dalla caratteristica del diodo, mostrata in figura 2, quando il diodo è in conduzione vi scorre una corrente

$$i_D = \frac{v_{In}}{R} \tag{1}$$

Tale risultato si ottiene osservando che il contatto virtuale tra i morsetti di ingresso dell'operazionale permette di affermare che sulla resistenza cade la medesima tensione v_{In} imposta dal generatore; la corrente che attraversa il resistore sarà dunque, appunto:

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{v_{In}}{R}$$

Tale corrente non può poi fare altro che riversarsi tutta nel diodo. Ricordiamo ora la legge caratteristica del diodo secondo la quale:

$$i_D = I_s\left(e^{v/v_{Th}} - 1\right)$$

che, per semplicità, approssimeremo nel modo seguente:

$$i_D = I_s e^{v/v_{Th}} \tag{2}$$

Uguagliando dunque quest'ultima relazione con la relazione (1) si ricava:

$$\frac{v_{In}}{R} = I_s e^{v/v_{Th}}$$

dalla quale si ricava:

$$v = v_{Th} \ln \frac{v_{In}}{RI_s} = v_D$$

Abbiamo così ricavato la caduta di tensione sul diodo, ricordando che la tensione termica è così definita:

$$v_{Th} = \frac{KT}{q}$$

La tensione di uscita dell'amplificatore è dunque calcolabile sfruttando la legge di Kirchhoff alla maglia composta dall'uscita, dal diodo e dalle due porte di ingresso dell'operazionale; si avrà dunque (ricordando che è attivo il contatto virtuale):

$$v_{Out} = v^- - v_D$$

ovvero:

$$v_{Out} = -v_D = -v_{Th} \ln \frac{v_{In}}{RI_s}$$

Dopo l'amplificatore logaritmico vediamo anche l'amplificatore esponenziale mostrato in figura 3; anche in questo caso il diodo conduce solo quando il verso della tensione è favorevole. Supponiamo dunque che l'espressione della caratteristica del diodo possa ancora essere approssimata tramite la relazione (2), sfruttando il contatto virtuale sappiamo che la caduta di tensione sul diodo sarà la medesima imposta dal generatore, ovvero:

$$v_{In} = v_D$$

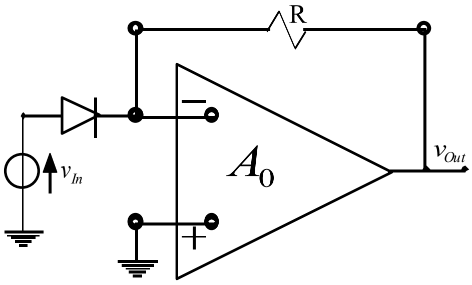


Figura 3

La relazione (2) si può dunque riscrivere come segue:

$$i_D = I_s e^{v_{In}/v_{Th}}$$

la corrente che attraversa il diodo non può far altro che attraversare anche la resistenza e quindi la caduta di tensione su tale elemento sarà:

$$v_R = Ri_R = Ri_D = RI_s e^{v_{In}/v_{Th}}$$

La tensione di uscita dell'amplificatore è dunque calcolabile sfruttando la legge di Kirchhoff alla maglia composta dall'uscita, dalla resistenza e dalle due porte di ingresso dell'operazionale; si avrà dunque (ricordando che è attivo il contatto virtuale):

$$v_{Out} = v^- - v_R$$

ovvero:

$$v_{Out} = -v_R = -RI_s e^{v_{In}/v_{Th}}$$

Vediamo ora il moltiplicatore analogico che è un circuito che congloba in sé alcune delle configurazioni circuitali viste fino ad ora. Soffermiamoci dunque sulla figura 4 nella quale riconosciamo il moltiplicatore analogico composto da due amplificatori logaritmici, un sommatore invertente e un amplificatore esponenziale.

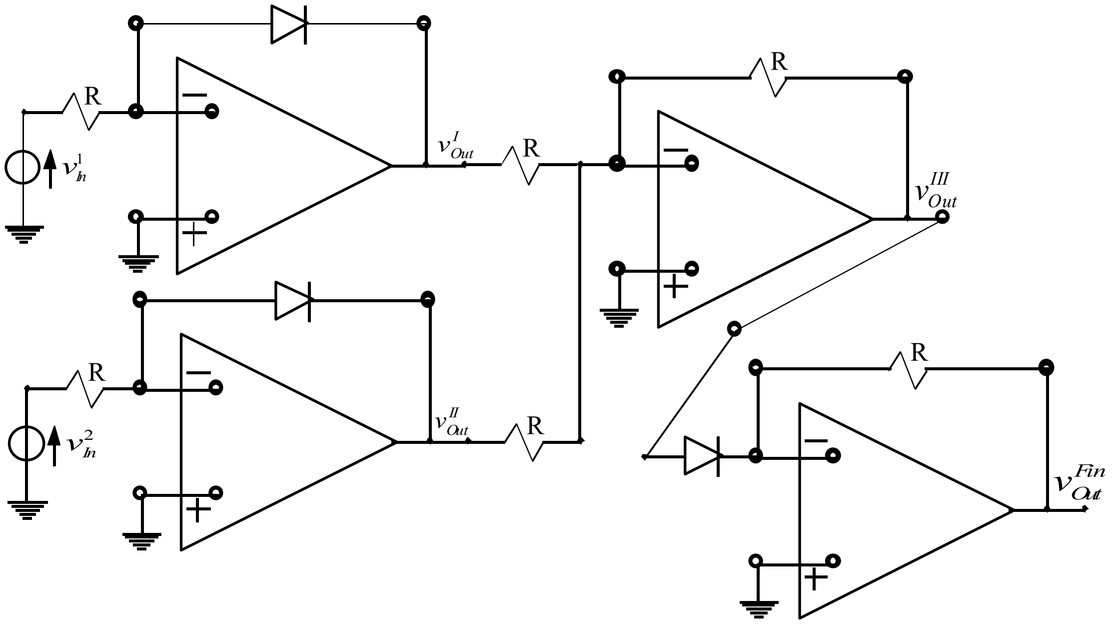


Figura 4

Partendo allora dai due segnali di ingresso vediamo che, dopo il passaggio attraverso i due amplificatori logaritmici (considerando tutti uguali i diodi presenti nel circuito), si trasformano nel modo seguente:

$$\begin{cases} v_{Out}^{I} = -v_{Th} \ln \dfrac{v_{In}^{1}}{RI_s} \\ v_{Out}^{II} = -v_{Th} \ln \dfrac{v_{In}^{2}}{RI_s} \end{cases}$$

Uscendo dal sommatore invertente si avrà invece:

$$v_{Out}^{III} = -v_{Out}^{I} + \left(-v_{Out}^{II}\right) = -\left(v_{Out}^{I} - v_{Out}^{II}\right) = -\left(-v_{Th} \ln \frac{v_{In}^{1}}{RI_s} - v_{Th} \ln \frac{v_{In}^{2}}{RI_s}\right) = v_{Th}\left(\ln \frac{v_{In}^{1}}{RI_s} + \ln \frac{v_{In}^{2}}{RI_s}\right)$$

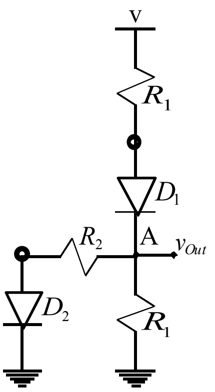
ovvero:

$$v_{Out}^{III} = v_{Th} \ln \frac{v_{In}^{1} \cdot v_{In}^{2}}{R^2 I_s^2}$$

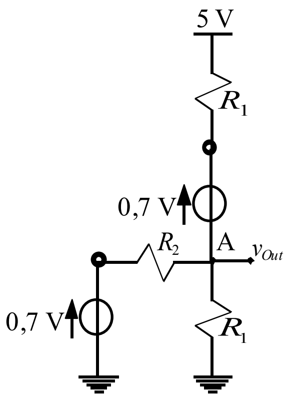
Passando poi attraverso l'amplificatore esponenziale si ottiene:

$$v_{Out}^{Fin} = -RI_s e^{\frac{v_{Th} \ln \frac{v_{In}^{1} \cdot v_{In}^{2}}{R^2 I_s^2}}{v_{Th}}} = -\frac{v_{In}^{1} \cdot v_{In}^{2}}{RI_s}$$

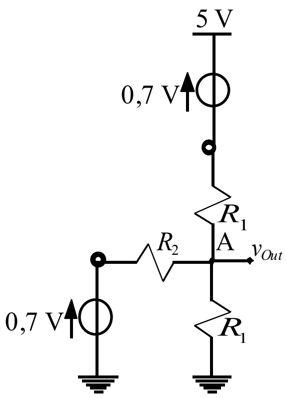
<u>Valutiamo ora la tensione al nodo A del circuito mostrato in figura 5.</u>



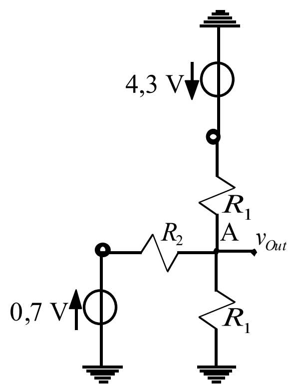
<u>Figura 5</u>



<u>Figura 6</u>



<u>Figura 7</u>



<u>Figura 8</u>

<u>I valori numerici siano i seguenti:</u>

$$\begin{cases} v = 5V \\ R_1 = 1k\Omega \\ R_2 = 9k\Omega \end{cases}$$

Supponiamo che i due diodi siano uguali e presentino una tensione di ON entrambi pari a 0,7 V; affrontiamo dunque questo problema con un metodo iterativo e imponiamo che la caduta di tensione sui due diodi sia proprio pari alla loro tensione di ON. Sostituiamo dunque ai diodi due generatori di tensione da 0,7 V ottenendo il circuito mostrato in figura 6. Per comodità facciamo ora slittare il generatore di tensione corrispondente al primo diodo verso l'alto, in modo da ottenere la configurazione mostrata in figura 7. Combinando, a questo punto, il generatore di tensione corrispondente al primo diodo con la tensione imposta in partenza, si ottiene la configurazione mostrata in figura 8. Per valutare la tensione al nodo A applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti; calcoliamo dunque, per prima cosa, la tensione in uscita che si ottiene con una configurazione come quella di figura 9. Sfruttiamo la formula del partitore di tensione e ricaviamo la seguente espressione:

$$v_{Out}^{I} = (4{,}3V)\frac{R_1 // R_2}{R_1 + (R_1 // R_2)} = (4{,}3V)\frac{R_1 R_2}{R_1^2 + R_1 R_2 + R_1 R_2} = 2{,}037V$$

Calcoliamo ora invece la tensione di uscita che si ottiene con una configurazione come quella della figura 10; sfruttando anche in questo caso la formula del partitore di tensione si ricava:

$$v_{Out}^{II} = (0{,}7V)\frac{R_1 // R_1}{R_2 + (R_1 // R_1)} = (0{,}7V)\frac{R_1}{2R_2 + R_1} = 0{,}037V$$

Complessivamente la tensione di uscita sarà quindi:

$$v_{Out} = v_{Out}^{I} + v_{Out}^{II} = 2{,}074V$$

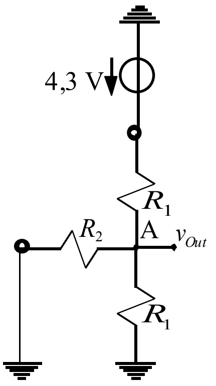


Figura 9

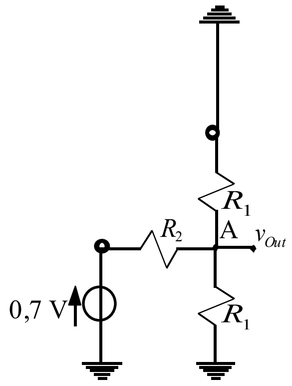


Figura 10

Dobbiamo ora valutare la corrente che attraversa i due diodi; per fare questo osserviamo che la corrente che attraversa il primo diodo equivale alla corrente che attraversa la resistenza R_1 in alto e quindi possiamo calcolare la corrente che scorre nel primo diodo nel modo seguente:

$$i_{D_1} = i_{R_1} = \frac{v_{R_1}}{R_1} = \frac{(4{,}3V) - v_{Out}}{R_1} = 2{,}226mA$$

La corrente che attraversa il secondo diodo equivale invece alla corrente che attraversa la resistenza R_2 e quindi possiamo valutare la corrente nel secondo diodo nel modo seguente:

$$i_{D_2} = i_{R_2} = \frac{v_{R_2}}{R_2} = \frac{v_{Out} - (0{,}7V)}{R_2} = 0{,}153mA$$

La prima iterazione sarà quindi caratterizzata dai seguenti valori:

I iterazione

v_{D_1}	v_{D_2}	v_{Out}	i_{D_1}	i_{D_2}
0,7 V	*0,7 V*	*2,074 V*	*2,226 mA*	*0,153 mA*

Per ricavare le tensioni sui diodi necessarie per implementare la seconda iterazione dobbiamo sfruttare le correnti sui diodi trovate nella prima iterazione; ricordiamo dunque la relazione che esprime la tensione sul diodo secondo la quale:

$$v_D = v_{Th} \ln \frac{i_D}{I_s}$$

Ricordiamo inoltre che la tensione termica a 300 K è:

$$v_{Th}(300K) = 25{,}7mV$$

e supponiamo di utilizzare diodi del tipo 1N4153 caratterizzati dall'avere:

$$I_s = 10^{-13} A$$

in questo modo si otterrà:

$$\begin{cases} v_{D_1} = v_{Th} \ln \dfrac{i_{D_1}}{I_s} = 0{,}612V \\ v_{D_2} = v_{Th} \ln \dfrac{i_{D_2}}{I_s} = 0{,}544V \end{cases}$$

A questo punto si ripetono i passaggi visti nella prima iterazione e si ottengono i seguenti valori:

II iterazione

v_{D_1}	v_{D_2}	v_{Out}	i_{D_1}	i_{D_2}
0,612 V	*0,544 V*	*2,107 V*	*2,193 mA*	*0,156 mA*

Notiamo che l'errore relativo alla tensione di uscita tra la prima e la seconda iterazione è di circa il 2%; siccome vogliamo una maggior precisione continuiamo con una terza iterazione, caratterizzata dai seguenti valori numerici:

III iterazione

v_{D_1}	v_{D_2}	v_{Out}	i_{D_1}	i_{D_2}
0,612 V	*0,544 V*	*2,107 V*	*2,193 mA*	*0,156 mA*

Siccome abbiamo trovato lo stesso risultato dell'iterazione precedente possiamo dire di aver trovato il risultato cercato.
Vediamo ora un'altra importante applicazione del diodo: il diodo rettificatore. Consideriamo dunque il circuito di figura 11

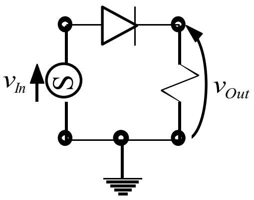


Figura 11

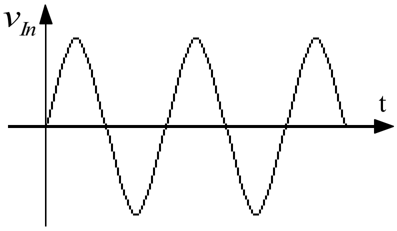


Figura 12

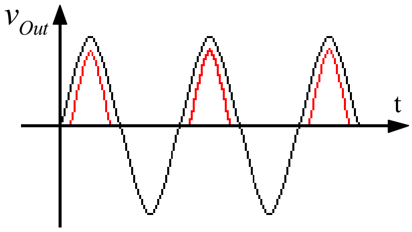


Figura 13

Appare evidente che, siccome il diodo si apre solo quando la tensione imposta dal generatore è coerente con il verso di conduzione, data una tensione in ingresso con un andamento come quello mostrato in figura 12, l'andamento della tensione in uscita sarà rappresentato in rosso in figura 13 (nella quale è evidenziato il confronto con il segnale di ingresso). Dalla figura 13 notiamo che il segnale di uscita, oltre ad essere ridotto in intensità, parte anche con un certo ritardo e torna a zero con un certo anticipo; il ritardo e l'anticipo sono dovuti alla tensione di soglia caratteristica del diodo (solitamente pari a 0,7 V). Per sfruttare anche la semionda di ingresso negativa si utilizza il circuito mostrato in figura 14.

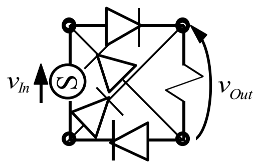


Figura 14

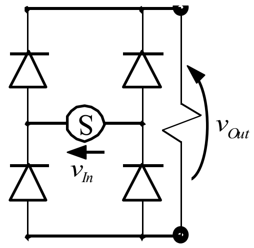


Figura 15

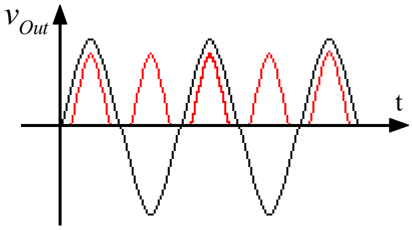


Figura 16

Per comprendere meglio il funzionamento del circuito di figura 14 lo ridisegnamo come mostrato in figura 15; in figura 16, invece, vediamo l'andamento dell'uscita di quest'ultimo circuito.
Vogliamo ora costruire un generatore di tensione stabile a 5 V, partendo da una sorgente a 220 V e 50 Hz. Partiamo dunque dalla sorgente assegnata che ha un andamento come quello mostrato in figura 17 e, come mostrato in figura 18, utilizziamo un trasformatore per abbassare la tensione a 9 V; in questo modo passiamo all'andamento mostrato in figura 19.

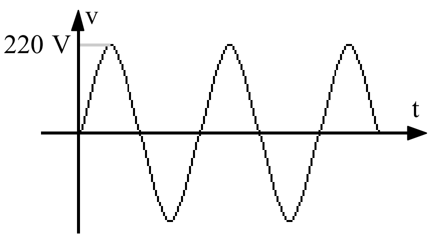


Figura 17

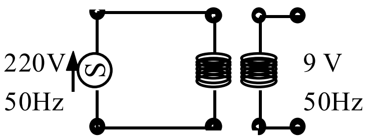


Figura 18

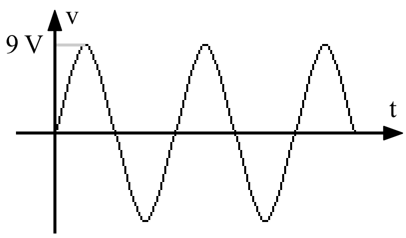


Figura 19

Utilizziamo ora, come mostrato in figura 20, il raddrizzatore che abbiamo precedentemente introdotto e otteniamo un andamento della tensione come quello mostrato in figura 21. Per evitare che la tensione continui ad andare a zero dopo ogni picco, potremmo mettere un condensatore, come mostrato in figura 22; in questo modo, se il condensatore fosse a vuoto, impedirebbe alla tensione di scaricarsi e si avrebbe un andamento come quello mostrato in figura 23. Nella realtà, ovviamente, il condensatore non è certo a vuoto ma è collegato con un carico; qualora il carico sia di tipo resistivo, come quello mostrato in figura 24, il condensatore tenderebbe a scaricarsi e quindi si avrebbe un fenomeno di ripple come quello mostrato in figura 25. Ovviamente il ripple si può limitare al massimo con un buon dimensionamento del condensatore. Mettiamoci in una situazione leggermente più semplificata nella quale il carico assorba una corrente costante pari a 15 mA, in questo modo, con un circuito come quello mostrato in figura 26, il condensatore si scaricherà in maniera lineare e quindi l'andamento sarà quello mostrato in figura 27.

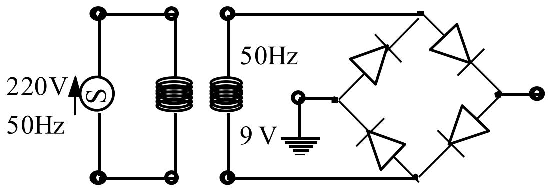


Figura 20

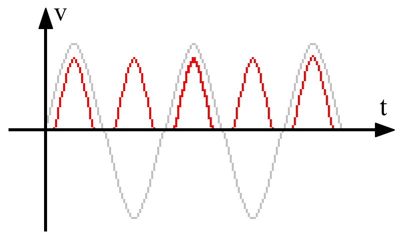


Figura 21

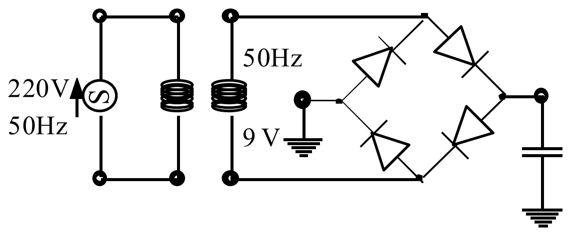


Figura 22

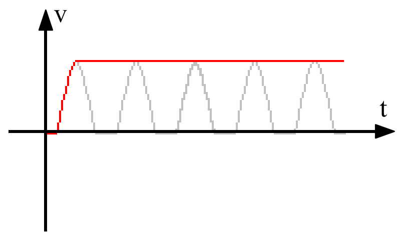


Figura 23

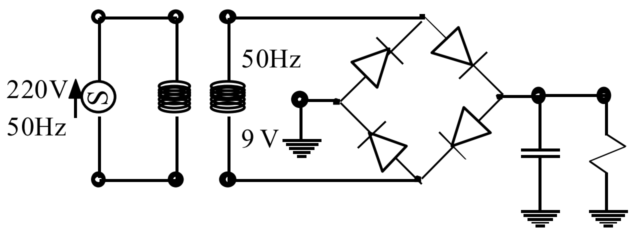


Figura 24

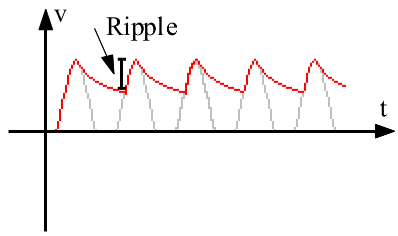


Figura 25

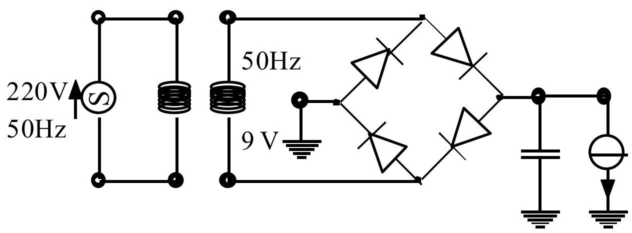


Figura 26

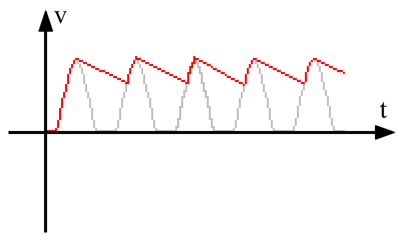


Figura 27

Supponiamo che il picco della curva rossa di figura 21 sia ancora pari a 9 V (e che quindi il ritardo dovuto al diodo sia trascurabile), siccome siamo partiti da una frequenza di 50 Hz abbiamo che ogni semiperdiodo è pari a circa 10 ms, possiamo allora calcolare la capacità del condensatore che mi permette di avere un ripple del 10% rispetto alla tensione di picco (ovvero che l'abbassamento di tensione non sia superiore a 0,9 V). Ricordando infatti che la corrente assorbita dal carico è di 15 mA possiamo sfruttare la seguente relazione:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{i}{C}$$

dalla quale, sostituendo i valori numerici, si ottiene:

$$C = 167 mF$$

Non abbiamo però ancora ottenuto quello che ci eravamo prefissi perché, invece di un generatore stabilizzato con tensione di 5 V, abbiamo un generatore con un picco pari a 9 V e con un'oscillazione pari al 10% (corrispondenti a 0,9 V che da ora in poi approssimeremo ad 1 V). Per ottenere il generatore stabilizzato a 5 V devo utilizzare un diodo Zener e ottenere quindi il circuito mostrato in figura 28. In particolare bisogna scegliere un diodo il cui punto di lavoro sia quello mostrato in figura 29 nella quale vediamo che il diodo è polarizzato in inversa in modo da avere su di esso una caduta di tensione pari a 5 V. Supponiamo ora che il resistore R_2 sia pari a 1 kΩ; osservando la rete appare evidente che sarà:

$$v_{R_2} = v_{Zener} = 5V$$

Possiamo dunque arrivare a calcolare la corrente che attraversa il resistore R_2, che sarà:

$$i_{R_2} = \frac{v_{R_2}}{R_2} = 5mA$$

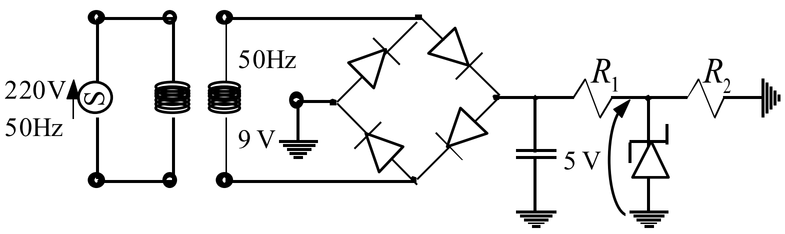


Figura 28

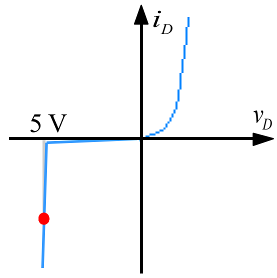


Figura 29

Siccome abbiamo in precedenza detto che il carico assorbe una corrente costante di 15 mA (ovvero la resistenza R_1 vede passare al suo interno 15 mA), ne deduciamo che attraverso il diodo Zener devono per forza passare 10 mA. Avendo supposto che la minima tensione in fondo al Ripple sia pari ad 8 V, possiamo calcolare le dimensioni della resistenza R_1 tramite la seguente relazione:

$$R_1 = \frac{v_{Load}^{Min} - v_{Zener}}{i_{Zener} + i_{R_2}} = 200\Omega$$

E' importante sottolineare che è stata usata la tensione di carico minima perché mi devo assicurare che i 15 mA vengano trasportati anche quando siamo in fondo alla depressione del Ripple. Una volta trovata tale resistenza possiamo calcolare il valore massimo della corrente in corrispondenza della massima tensione (quella cioè in cima al Ripple); si avrà:

$$i_{Max} = \frac{v_{Load}^{Max} - v_{R_2}}{R_1} = 20mA$$

Anche questa corrente si ripartirà ovviamente nella resistenza R_2 e nel diodo Zener, siccome, però, siamo in un punto di lavoro del diodo tale per cui variando anche sensibilmente la corrente la tensione rimane sempre pari a 5 V, sulla resistenza R_2 ci sarà sempre una caduta di tensione pari a 5 V e quindi tale resistenza assorbirà sempre 5 mA; i restanti 15 mA verranno assorbiti dunque dal diodo. Ovviamente se la resistenza R_2 fosse stata presa molto più alta, la corrente si sarebbe riversata praticamente tutta nel diodo.
Supponiamo infine di aver preso un diodo Zener con una resistenza differenziale pari a 10 Ω e valutiamo la stabilizzazione di linea della tensione e la stabilizzazione di carico per la corrente. Per quanto riguarda la stabilizzazione di linea della tensione possiamo fare riferimento al circuito di figura 30 che altro non è che l'ultimo pezzo di quello di figura 28 nel quale si è sostituito il condensatore con un generatore di tensione e il diodo Zener con la sua resistenza differenziale.

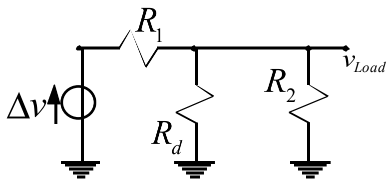


Figura 30

Supponiamo dunque che ci sia una variazione di ΔV nella tensione (ovvero che il condensatore possa appunto essere modellizzato come un generatore di tensione da ΔV) e vediamo come si ripercuote tale variazione sul carico. Dal circuito di figura 30 appare evidente che sarà:

$$v_{Load} = \Delta v \frac{R_d // R_2}{R_1 + R_d // R_2} = \Delta v \frac{R_d R_2}{R_1 R_d + R_2 R_1 + R_d R_2}$$

Imponendo dunque una variazione di 1 V si ottiene:

$$v_{Load} \cong 47mV$$

Possiamo dunque dire che in uscita si riporta circa il 5% di quello che è entrato come variazione. Per valutare la stabilizzazione di carico per la corrente dobbiamo rifarci alla figura 29 nella quale vediamo che, variando la corrente di 5 mA e quindi passando da 15 mA a 20 mA (siccome stiamo utilizzando un diodo con resistenza differenziale di 10Ω, che corrisponde sul disegno alla pendenza della caratteristica), si riscontrerà una variazione della tensione sul diodo data dalla seguente relazione:

$$\Delta v_D = \Delta i_D \cdot R_d = 50mV$$

Grafico della funzione di trasferimento di un circuito.

Si valuti, utilizzando il metodo grafico, la funzione di trasferimento del circuito di figura 1 nel quale appare un operazionale del tipo 741 che ha quindi le seguenti caratteristiche:

$$\begin{cases} A_0 = 106dB \\ \omega_T = 1MHz \end{cases}$$

Sia dato inoltre il seguente valore numerico aggiuntivo:

$$RC = 1ms$$

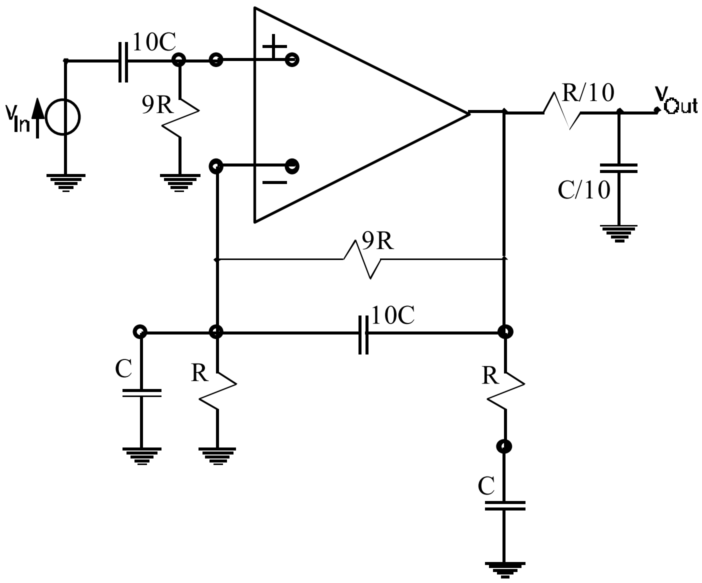


Figura 1

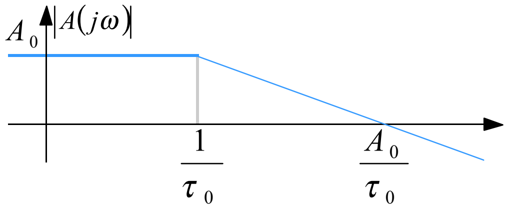


Figura 2

Soffermiamoci inizialmente sull'operazionale per il quale si può costruire un grafico come quello di figura 2; siccome stiamo usando l'operazionale 741 che ha un prodotto guadagno-banda pari ad 1 MHz, varrà la seguente relazione:

$$\omega_T = \frac{A_0}{\tau_0} = 10^6 Hz$$

Per passare dalla notazione in Hertz alla notazione in radianti al secondo dobbiamo moltiplicare tale espressione per 2π, si ottiene quindi:

$$\omega_T = \frac{A_0}{\tau_0} = 2\pi \cdot 10^6 \frac{rad}{s}$$

Osservando il grafico di figura 2 appare poi evidente come sia:

$$\omega_0 = \frac{\omega_T}{A_0} \approx 31{,}4 \frac{rad}{s}$$

essendo:

$$A_0 = 106dB \approx 2 \cdot 10^5$$

Passiamo ora all'effettivo calcolo della funzione di trasferimento del circuito assegnato; notiamo che tale funzione di trasferimento può essere calcolata tramite il prodotto di tre funzioni di trasferimento relative alle tre strutture nelle quali può essere suddiviso il circuito complessivo. La prima struttura, mostrata in figura 3, è composta dal blocco C-R che si trova prima dell'ingresso nell'operazionale.

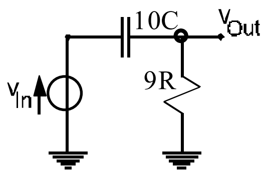


Figura 3

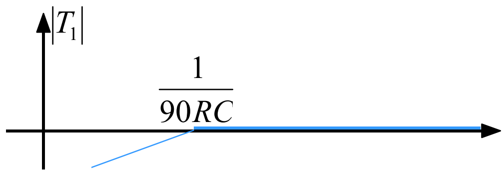


Figura 4

Per calcolare la funzione di trasferimento di questo tratto andiamo prima di tutto a valutare il polo che sarà:

$$s = -\frac{1}{(9R)(10C)} = -\frac{1}{90RC}$$

Notiamo poi che, in continua, il condensatore diventa un circuito aperto e quindi non c'è trasferimento; di conseguenza la funzione di trasferimento di questo primo tratto (che da ora in poi indicheremo come T_1) dovrà avere uno zero per s nulla; abbiamo quindi finora ottenuto la seguente funzione di trasferimento:

$$T_1 = \frac{s}{1+90sRC}$$

Quando invece si vada ad altissima frequenza il condensatore diventa un corto circuito e quindi il trasferimento risulta unitario; questo significa che il numeratore della funzione di trasferimento T_1 deve essere moltiplicato per un qualche coefficiente. Se ci mettiamo ad alta frequenza la funzione di trasferimento può in buona approssimazione essere riscritta nel modo seguente:

$$T_1 \approx \frac{s}{90sRC}$$

e appare allora evidente che, perché si abbia trasferimento unitario, il numeratore deve essere moltiplicato per il termine 90RC. Complessivamente, dunque, la funzione di trasferimento relativa al primo tratto sarà:

$$T_1 = \frac{90sRC}{1+90sRC}$$

L'andamento di questa funzione di trasferimento sarà dunque quello mostrato in figura 4.
Concentriamoci ora sul secondo blocco che forma il circuito originario che è composto dall'operazionale con il suo anello di reazione; ci occupiamo dunque del tratto di circuito mostrato in figura 5.

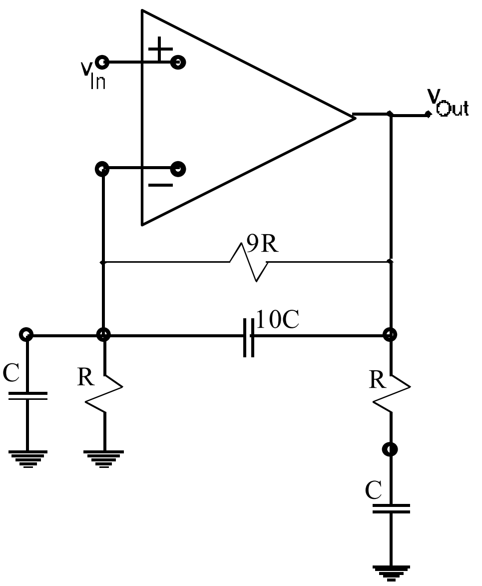


Figura 5

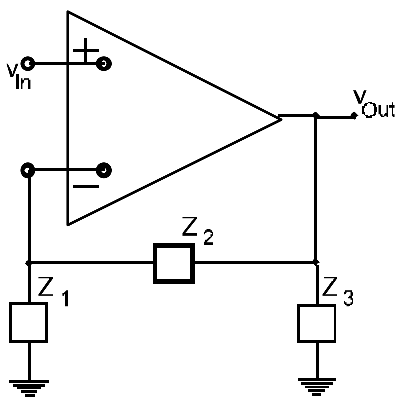


Figura 6

Per comodità ci conviene accorpare i vari gruppi R-C presenti nel circuito in impedenze Z in modo da semplificare la struttura ottenendo il circuito simbolico di figura 6 nel quale le impedenze indicate hanno le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} Z_1 = (R)//(C) = \dfrac{R}{1+sRC} \\ Z_2 = (9R)//(10C) = \dfrac{9R}{1+90sRC} \\ Z_3 = (R)+(C) = \dfrac{1+sRC}{sC} \end{cases}$$

Osserviamo poi che l'impedenza Z_3 si trova in parallelo con l'uscita e quindi è assolutamente ininfluente per quanto riguarda il trasferimento; possiamo dunque eliminare tale impedenza (lasciando al suo posto un circuito aperto) e quindi ci troviamo a dover gestire il circuito di figura 7.

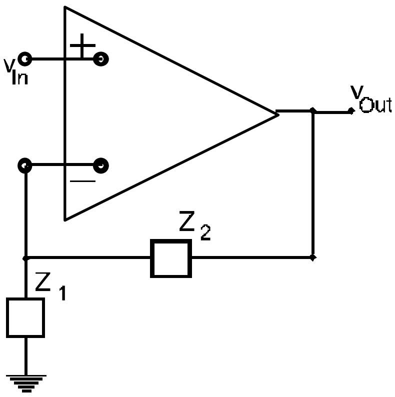


Figura 7

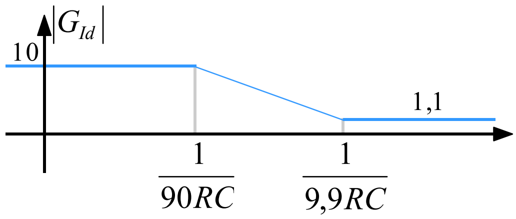


Figura 8

Quella mostrata in figura 7 non altro che una configurazione non invertente come ne abbiamo viste tante fino ad ora e quindi il guadagno ideale e il guadagno d'anello sono immediatamente calcolabili:

$$\begin{cases} G_{Id} = 1 + \dfrac{Z_2}{Z_1} = \dfrac{10(1+9{,}9sRC)}{1+90sRC} \\ G_{Loop} = -A(s)\dfrac{Z_1}{Z_1+Z_2} = -A(s)\dfrac{1+90sRC}{10(1+9{,}9sRC)} \end{cases}$$

L'andamento del guadagno ideale sarà allora quello mostrato in figura 8. Per valutare dunque il grafico relativo alla funzione di trasferimento T_2 devo mettere insieme il grafico relativo all'operazionale (che vediamo in figura 2) e quello relativo al guadagno d'anello (rappresentato in figura 8) in modo da ottenere il grafico di figura 9.

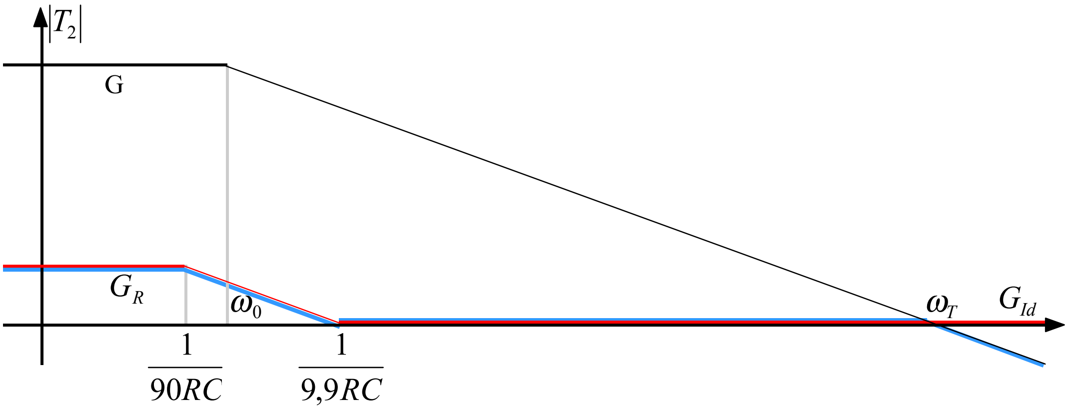


Figura 9

Vediamo infine il terzo componente del circuito: il gruppo R-C in uscita dall'operazionale mostrato in figura 10; per calcolare la funzione di trasferimento di questo tratto andiamo prima di tutto a valutare il polo che sarà:

$$s = -\frac{1}{\left(\frac{R}{10}\right)\left(\frac{C}{10}\right)} = -\frac{100}{RC}$$

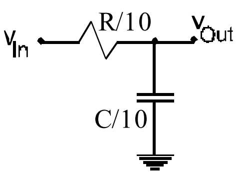


Figura 10

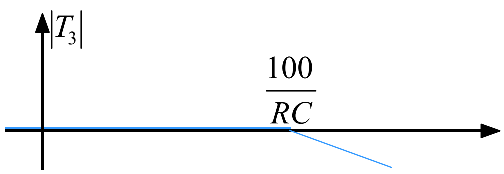


Figura 11

Notiamo poi che, in continua, il condensatore diventa un circuito aperto e quindi c'è trasferimento unitario e questo significa che il numeratore della funzione di trasferimento varrà semplicemente 1. La funzione di trasferimento di quest'ultimo tratto (che indicheremo come T_3) sarà dunque:

$$T_3 = \frac{1}{1 + s\frac{RC}{100}}$$

Il grafico relativo a questa terza funzione di trasferimento sarà allora quello mostrato in figura 11.
Come abbiamo detto in precedenza, la funzione di trasferimento complessiva sarà:

$$T(s) = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3$$

e quindi, combinando i grafici delle figure 4, 9 e 11, si ricava il grafico mostrato in figura 12.

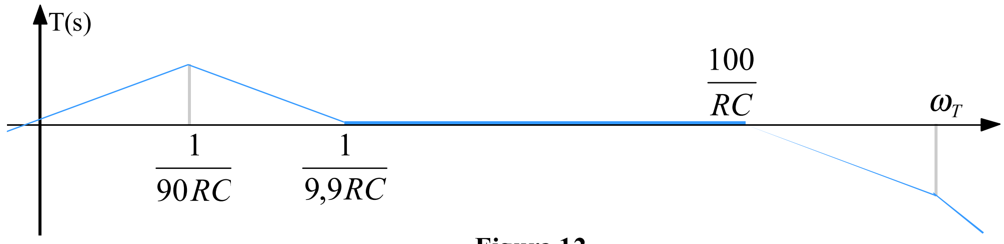


Figura 12

<u>*Si valuti il grafico della funzione di trasferimento del filtro universale mostrato in figura 13*</u>

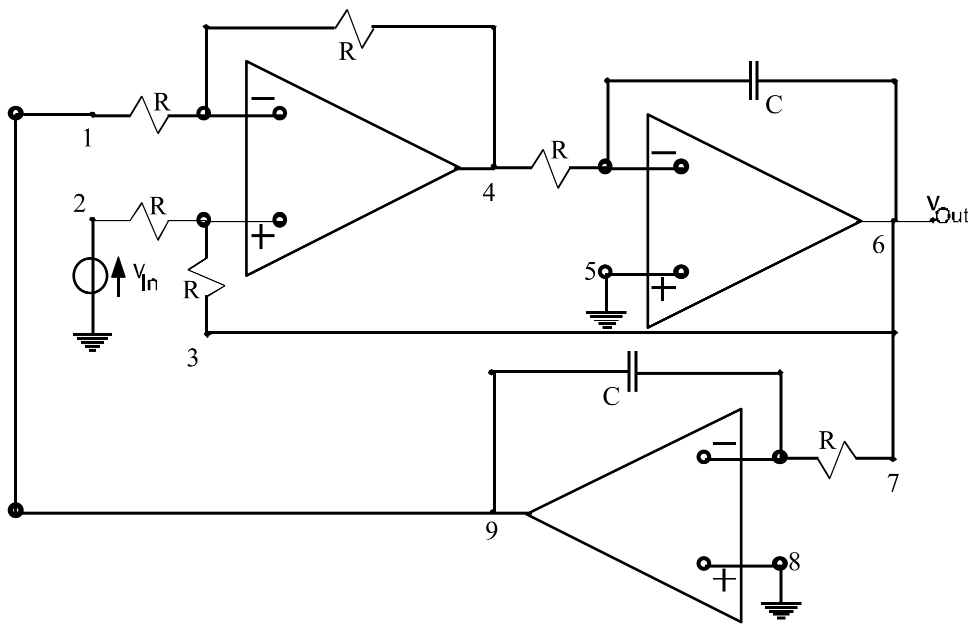


Figura 13

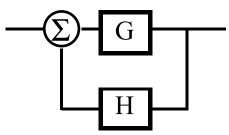


Figura 14

Come prima cosa osserviamo che il tratto di circuito compreso tra i morsetti 1, 2, 3 e 4 è un amplificatore delle differenze, il tratto compreso tra i morsetti 4, 5 e 6 è un integratore così come è un integratore il tratto di circuito compreso tra i morsetti 7, 8 e 9. Notiamo inoltre che l'amplificatore delle differenze fa la parte del nodo sommatore di un circuito reazionato come quello simbolico mostrato in figura 14. Ricordando allora la teoria sulla reazione vista nelle lezioni 6 e 7 possiamo calcolare il guadagno ideale di questo circuito imponendo che sia nullo il segnale di errore, ovvero il segnale che esce dal nodo sommatore; nel caso in questione il segnale di errore non sarà altro che la tensione che misuriamo al morsetto 4. Siccome tutte le resistenze presenti nel circuito sono uguali, il calcolo della tensione sul morsetto 4 non è particolarmente difficile. Notiamo innanzitutto che la tensione di ingresso imposta dal generatore al nodo 2 si trasferisce identica al nodo 4; anche la tensione che entra nell'amplificatore delle differenze dal nodo 3 (che altra non è che la tensione di uscita v_{Out}) si trasferisce inalterata al morsetto 4. La tensione che entra nell'amplificatore delle differenze dal morsetto 1 è la tensione di uscita v_{Out} che è prima passata attraverso l'integratore; tale tensione si riporta sul morsetto 4 cambiata di segno. Complessivamente dunque si avrà:

$$v_4 = v_{In} + v_{Out} + \frac{v_{Out}}{sRC}$$

Imponendo allora che tale segnale sia nullo si avrà:

$$v_{In} + v_{Out} + \frac{v_{Out}}{sRC} = 0$$

dalla quale si ricava:

$$v_{Out} = -\frac{sRC}{1+sRC} v_{In}$$

e quindi:

$$G_{Id} = -\frac{sRC}{1+sRC}$$

Valutiamo ora il guadagno d'anello facendo riferimento alla figura 15.

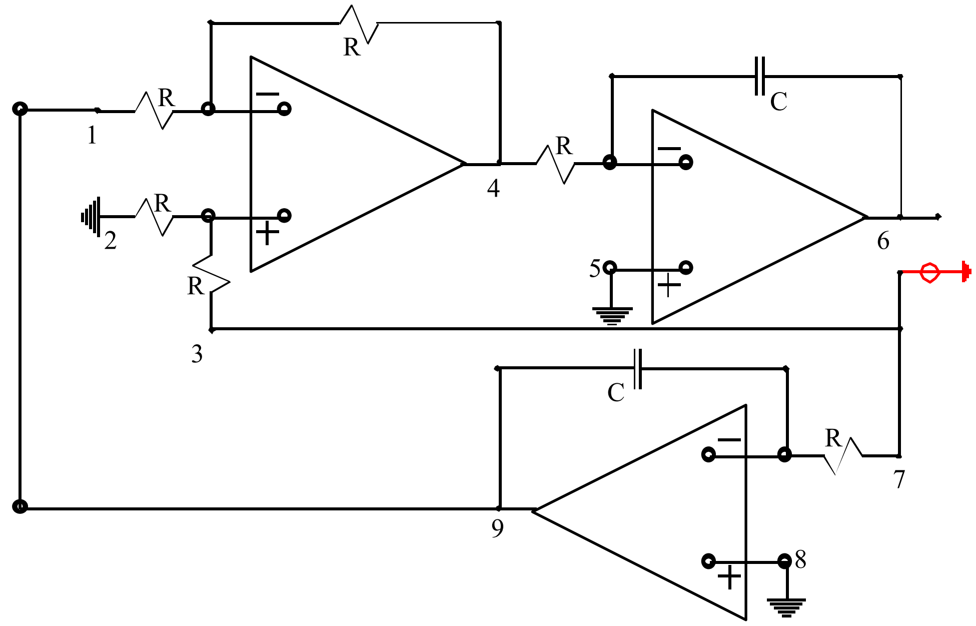


Figura 15

In questa situazione la tensione che ci interessa valutare, in seguito all'imposizione della tensione di test, è la tensione che troviamo al morsetto 6; per ottenere tale tensione osserviamo che parte della tensione di test inserita entra direttamente nell'amplificatore delle differenze dal nodo 3 e viene riportata immutata al nodo 4, una seconda parte entra nell'amplificatore delle differenze attraverso il nodo 1, dopo aver attraversato l'integratore individuato dai nodi 7, 8 e 9, e viene riportata nel nodo 4 con il segno opposto. La tensione che troviamo al nodo 4, infine, arriva sul nodo 6 dopo essere passata attraverso l'integratore individuato dai nodi 4, 5 e 6. Complessivamente, dunque, se inseriamo nel circuito una tensione di test v_{Test} *ritroviamo nel nodo 6 la tensione seguente:*

$$v_6 = -\frac{1}{sRC}\left(1+\frac{1}{sRC}\right)v_{Test}$$

da cui si ricava che il guadagno d'anello è il seguente:

$$G_{Loop} = -\frac{1}{sRC}\left(1+\frac{1}{sRC}\right) = -\frac{1+sRC}{(sRC)^2}$$

Sfruttiamo ora la relazione secondo la quale:

$$G = -G_{Id}G_{Loop} = -\frac{1}{sRC}$$

Abbiamo ora tutto quello che ci serve per valutare graficamente l'andamento della funzione di trasferimento che vediamo rappresentata in figura 16.

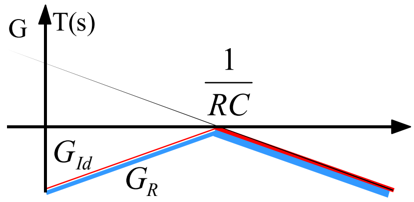


Figura 16

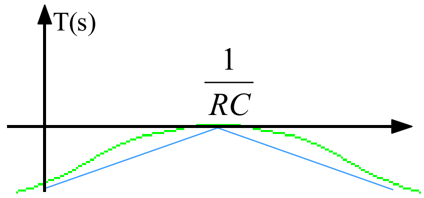


Figura 17

Dall'andamento della funzione di trasferimento comprendiamo anche per quale motivo questo circuito prende il nome di filtro universale; regolando in maniera opportuna il valore di capacità e resistenze è infatti possibile selezionare una particolare frequenza e amplificare (con coefficiente di amplificazione unitario) solo tale frequenza. Quello mostrato in *figura 16 è ovviamente solo l'andamento approssimato; se vogliamo sapere che guadagno si ha per la frequenza 1/RC dobbiamo sfruttare la seguente relazione:*

$$G_R = G_{Id}\frac{G_{Loop}}{1-G_{Loop}} = \frac{sRC}{(sRC)^2 - sRC - 1}$$

Vediamo allora che è:

$$\left|G_R\left(\frac{1}{RC}\right)\right| = 1$$

e quindi l'andamento non approssimato della funzione di trasferimento sarà presumibilmente quello mostrato in figura 17.

Valutare l'andamento grafico della funzione di trasferimento relativa all'integratore approssimato mostrato in figura 18.

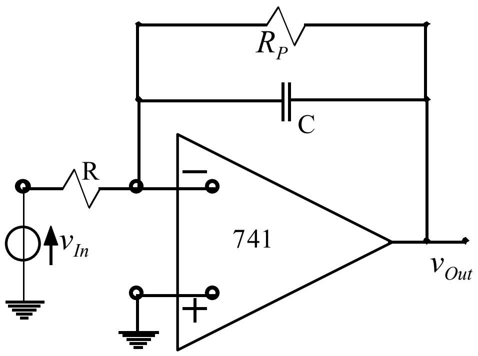


Figura 18

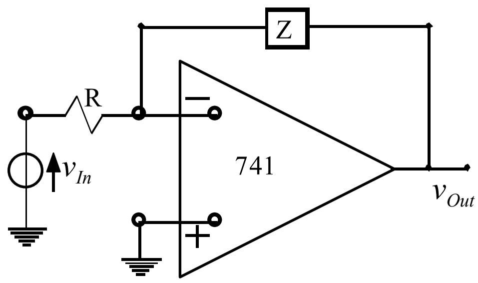


Figura 19

Siano dati, inoltre, i seguenti valori numerici:

$$\begin{cases} C = 1\mu F \\ R = 1k\Omega \\ R_P = 100R \end{cases}$$

Anche in questo caso possiamo vedere la struttura come una classica struttura invertente, come appare evidente nella figura 19 dove si indica il parallelo tra la resistenza R_P e la capacità C come una generica impedenza Z indicata nel modo seguente:

$$Z = \frac{R_P}{1 + sR_PC}$$

Il guadagno ideale si può allora esprimere nel modo seguente:

$$G_{Id} = -\frac{Z}{R} = -\frac{R_P}{R}\cdot\frac{1}{1+sR_PC}$$

mentre il guadagno d'anello sarà:

$$G_{Loop} = -A(s)\frac{R}{R+Z} = -A(s)\cdot\frac{R}{R+R_P}\frac{1+sR_PC}{1+\frac{sCRR_P}{R+R_P}} \qquad (1)$$

Noto il guadagno ideale e il guadagno d'anello si può ricavare il guadagno del blocco di andata:

$$G = -G_{Id}\cdot G_{Loop} = -A(s)\frac{R_P}{R+R_P}\frac{1}{1+\frac{sCRR_P}{R+R_P}}$$

Ricordando che stiamo usando l'operazionale 741, caratterizzato dai valori numerici indicati in precedenza e utilizzando i valori numerici assegnati si ottiene:

$$G = -0{,}99\frac{A_0}{\left(1+ {s}/{\omega_0}\right)\left(1+s0{,}99RC\right)}$$

Complessivamente possiamo dunque realizzare il grafico del diagramma di Bode che esprime la risposta in frequenza del trasferimento di questo circuito e che vediamo in figura 20

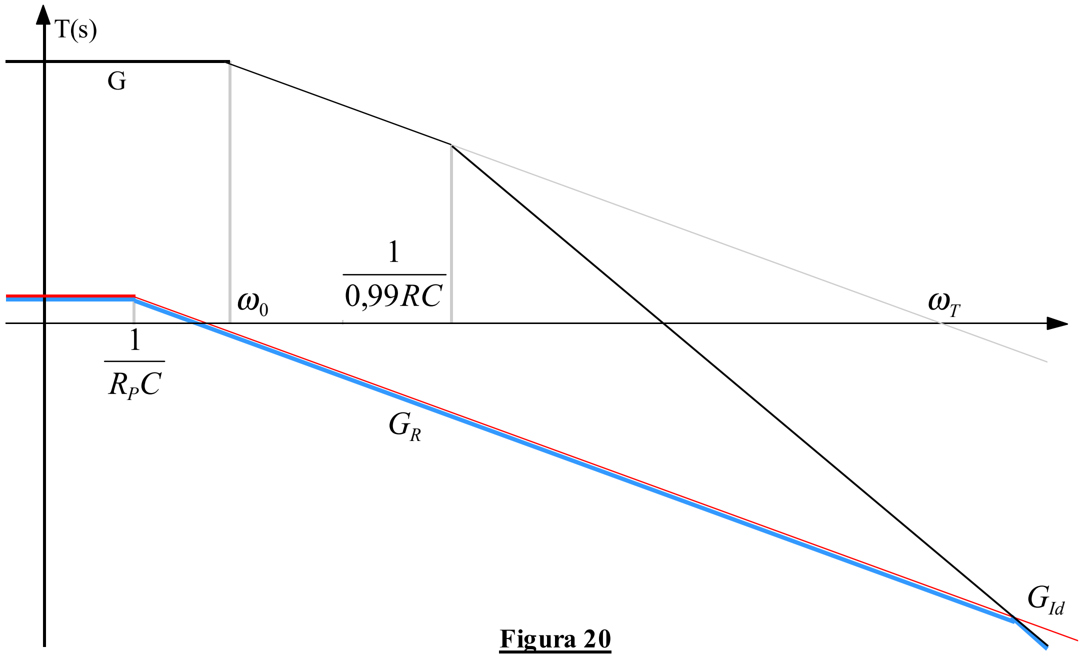


Figura 20

Utilizzando il metodo del luogo delle radici sarebbe stato necessario calcolare le singolarità del guadagno d'anello, dalla relazione (1) si ricava allora, ricordando che l'operazionale ha un polo caratteristico):

$$\begin{cases} z = \dfrac{1}{R_P C} \\ p_1 = \omega_0 \\ p_2 = \dfrac{R + R_P}{R R_P C} \end{cases}$$

Il guadagno d'anello in continua è negativo e quindi possiamo ricostruire il luogo rappresentato in figura 21.

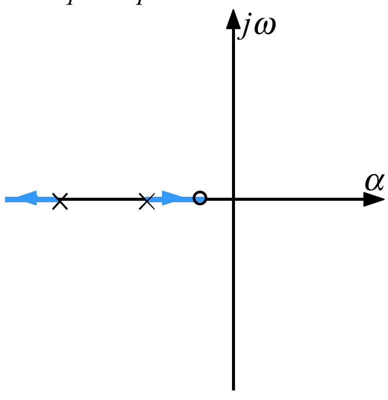


Figura 21

Stabilità dei circuiti.

Si valuti il diagramma di Bode della risposta in frequenza del derivatore puro mostrato in figura 1 per il quale sia fornito il seguente valore numerico:

$$RC = 1ms$$

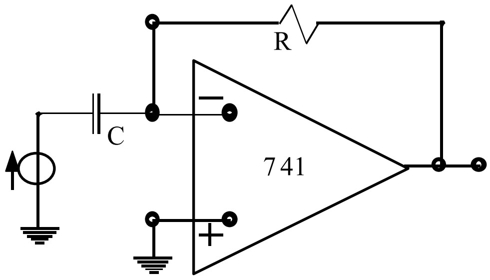


Figura 1

Vediamo innanzitutto che il derivatore puro ha la medesima struttura della configurazione invertente (dove si sostituisca una resistenza con una capacità) e quindi possiamo esprimere il guadagno ideale nel modo seguente:

$$G_{Id} = -\frac{R}{1/sC} = -sRC$$

Il guadagno d'anello sarà invece il seguente:

$$G_{Loop} = -A(s)\frac{1/sC}{R + 1/sC} = -A(s)\frac{1}{1+sRC} \qquad (1)$$

Noto il guadagno ideale e il guadagno d'anello possiamo ricavare il guadagno del blocco di andata nel modo seguente:

$$G = -G_{Id} \cdot G_{Loop} = -A(s)\frac{sRC}{1+sRC}$$

A questo punto, ricordando che l'operazionale 741 è caratterizzato da un A_0 pari a 106 dB e un prodotto guadagno banda di 1 MHz, abbiamo tutto quello che ci serve per realizzare il diagramma di Bode richiestoche vediamo in figura 2.

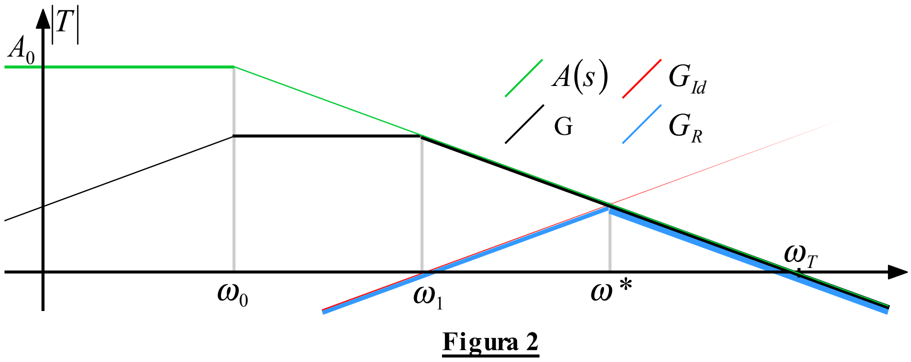


Figura 2

Facendo riferimento all'operazionale 741 avevamo nella scorsa esercitazione ottenuto:

$$\begin{cases} \omega_T = 2\pi \cdot 10^6 \dfrac{rad}{s} \\ \omega_0 = \pi \cdot 10 \dfrac{rad}{s} \end{cases}$$

Il polo ω_1 si calcola molto semplicemente essendo:

$$\omega_1 = \frac{1}{RC} = 10^3 \frac{rad}{s}$$

Per calcolare la posizione del polo ω^* si tiene conto del fatto che tale polo è sostanzialmente a metà strada tra ω_1 e quindi si avrà:

$$\omega^* = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_T} \approx 8 \cdot 10^4 \frac{rad}{s}$$

Soffermiamoci ora sul guadagno d'anello e vediamo che, data la relazione (1) e tenendo conto del polo caratteristico dell'operazionale, si ottiene l'andamento mostrato in figura 3

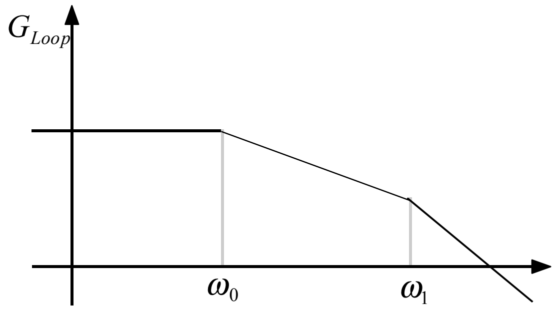


Figura 3

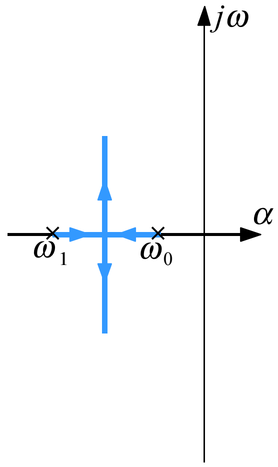


Figura 4

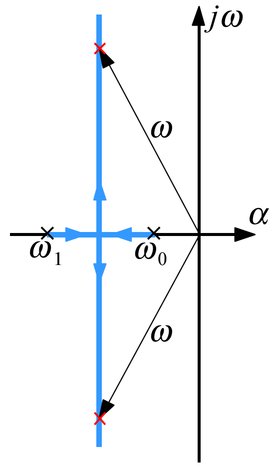


Figura 5

Costruendo allora il luogo delle radici si otterrebbe quanto si vede in figura 4. Per calcolare l'effettiva posizione dei poli nella configurazione che stiamo studiando dobbiamo risolvere l'equazione seguente:

$$1 - G_{Loop}(s) = 0$$

che, nel caso in analisi diventa:

$$1 + A(s)\frac{1}{1 + sRC} = 0$$

ovvero , esplicitando il polo caratteristico dell'operazionale 741:

$$1 + \frac{A_0}{\left(1 + s/\omega_0\right)(1 + sRC)} = 0$$

Le soluzioni di questa equazione saranno le seguenti:

$$s_{1/2} = -\frac{1}{2}\left(\omega_0 + \frac{1}{RC}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\omega_0 + \frac{1}{RC}\right)^2 - 4\frac{\omega_0}{RC}(1 + A_0)}$$

Inserendo i valori numerici si ottengono due poli complessi coniugati caratterizzati dall'avere

$$\omega \cong 8 \cdot 10^4 \frac{rad}{s}$$

e quindi i poli effettivi sono quelli mostrati in rosso in figura 5. Conoscendo i valori numerici possiamo ricavare il fattore di fase Q tramite la seguente relazione:

$$Q = \frac{\omega}{2\,\mathrm{Re}\{s_{1/2}\}} \approx 75$$

e questo significa che l'andamento non approssimato della funzione di trasferimento sarà quello mostrato in figura 6.

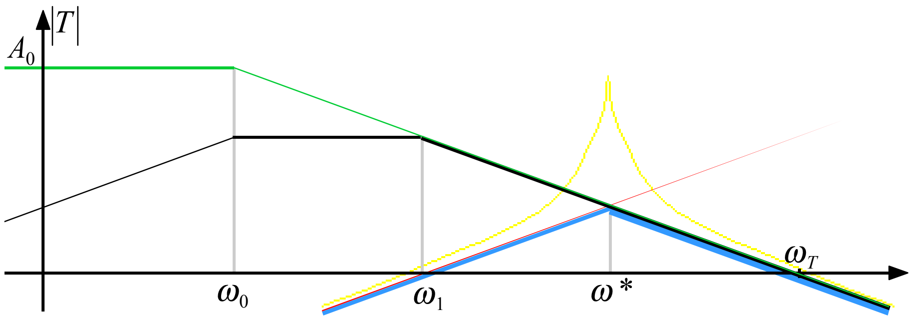


Figura 6

In tale figura il rapporto tra il picco dell'andamento non approssimato (in giallo) e il picco dell'andamento approssimato (in azzurro) deve appunto essere pari a 75.
Nella realtà l'operazionale 741 ha un secondo polo a frequenza ω_2 pari ad 1MHz e quindi la funzione A(s) avrà la seguente forma:

$$A(s) = \frac{A_0}{\left(1 + {}^{s}\!/_{\omega_0}\right)\left(1 + {}^{s}\!/_{\omega_2}\right)}$$

Come conseguenza il grafico di figura 2 si modifica fino a diventare quello mostrato in figura 7.

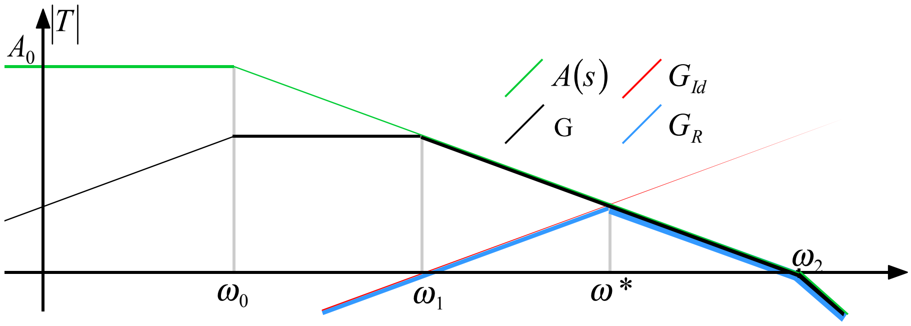


Figura 7

In questa nuova situazione il guadagno d'anello sarà il seguente:

$$G_{Loop} = -\frac{A_0}{\left(1 + {}^{s}\!/_{\omega_0}\right)(1 + sRC)\left(1 + {}^{s}\!/_{\omega_2}\right)}$$

Il luogo delle radici sarà allora quello mostrato in figura 8 che ora dobbiamo tarare (ovvero dobbiamo trovarne i valori caratteristici).

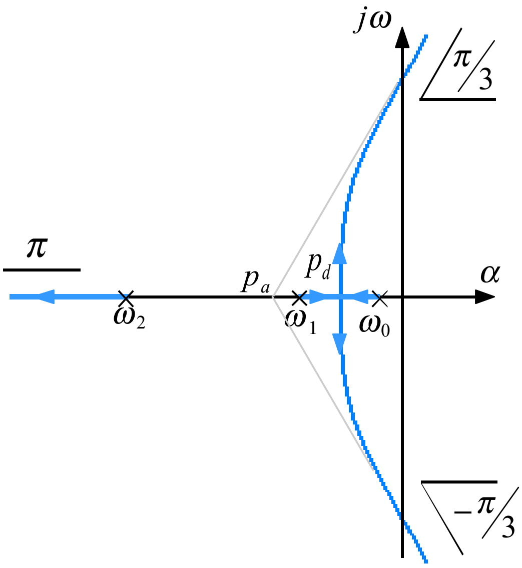


Figura 8

Innanzitutto osserviamo che i rami del luogo che divergono all'infinito, lo fanno asintoticamente formando, con l'asse reale, un angolo φ che soddisfa la seguente equazione:

$$\arg\gamma + (N_z - N_p)\varphi = 2k\pi$$

ovvero, nel caso che stiamo analizzando, tenendo conto che è

$$\gamma = -A_0$$

e quindi abbiamo un γ negativo che presenta uno sfasamento pari a π, l'equazione in questione assume la seguente forma:

$$\pi + (0-3)\varphi = 2k\pi$$

dalla quale si ricava:

$$\varphi = \frac{\pi + 2k\pi}{3}$$

Ponendo dunque k nullo si ottiene:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$$

Ponendo k pari ad 1 si ricava:

$$\varphi_1 = \frac{\pi + 2\pi}{3} = \pi$$

Ponendo invece k pari a –1 si ottiene:

$$\varphi_{-1} = \frac{\pi - 2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

Qualunque altro valore di k si scelga ora, si tornerà sempre ad ottenere uno dei tre valori che abbiamo trovato. Per completare la taratura del luogo cerchiamo il punto di diramazione p_d osservando che, siccome il polo ω_2 è molto lontano e non ci sono zeri, il punto di diramazione si può in buona approssimazione considerare come il punto di mezzo tra i due poli che si biforcano e quindi si avrà:

$$p_d \approx 500 \frac{rad}{s}$$

Per trovare il punto di intersezione degli asintoti sfrutto invece la relativa formula che, nel caso in questione, si ridurrà nel modo seguente:

$$p_a = \frac{\sum_{p=1}^{N_p} p_p}{n} \approx 2\pi \cdot 10^6 \frac{rad}{s}$$

Osservando l'andamento del luogo delle radici vediamo che è possibile avere dei poli con parte reale positiva, ovvero è possibile andare incontro a delle instabilità; dobbiamo dunque stabilire quale sia il limite oltre il quale si ha instabilità, ovvero dobbiamo stabilire il valore critico di A_0 tale per cui si arriva ad avere i due poli sull'asse immaginario. Risolviamo dunque la seguente equazione:

$$1 - G_{Loop}(s_{Cr}) = 0$$

ovvero

$$1 + \frac{A_{Cr}}{\left(1 + j\frac{\omega_{Cr}}{\omega_0}\right)(1 + j\omega_{Cr}RC)\left(1 + j\frac{\omega_{Cr}}{\omega_2}\right)} = 0$$

dalla quale si ricava:

$$\left(1 + j\frac{\omega_{Cr}}{\omega_0}\right)(1 + j\omega_{Cr}RC)\left(1 + j\frac{\omega_{Cr}}{\omega_2}\right) + A_{Cr} = 0 \qquad (2)$$

Osservando il grafico di figura 7 possiamo dedurre come sia valida la seguente relazione:

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = A_0$$

Nella relazione (2) possiamo dunque, per comodità, sostituire la seguente espressione:

$$\omega_2 = \omega_0 A_{Cr}$$

ottenendo così:

$$\left(1 + j\frac{\omega_{Cr}}{\omega_0}\right)(1 + j\omega_{Cr}RC)\left(1 + j\frac{\omega_{Cr}}{\omega_0 A_{Cr}}\right) + A_{Cr} = 0$$

e quindi:

$$1 - \omega_{Cr}^2 RC\left(\frac{1}{\omega_0 A_{Cr}} + \frac{1}{\omega_0}\right) - \frac{\omega_{Cr}^2}{\omega_0^2 A_{Cr}} + A_{Cr} + j\omega_{Cr}\left[RC + \left(\frac{1}{\omega_0 A_{Cr}} + \frac{1}{\omega_0}\right) - \frac{\omega_{Cr}^2 RC}{\omega_0^2 A_{Cr}}\right] = 0$$

Siccome siamo in presenza di un'equazione nel campo complesso possiamo suddividerla in due equazioni: una relativa alla parte reale e una relativa alla parte immaginaria. Si ottiene così il seguente sistema:

$$\begin{cases} 1-\omega_{Cr}^2 RC\left(\dfrac{1}{\omega_0 A_{Cr}}+\dfrac{1}{\omega_0}\right)-\dfrac{\omega_{Cr}^2}{\omega_0^2 A_{Cr}}+A_{Cr}=0 \\ j\omega_{Cr}\left[RC+\left(\dfrac{1}{\omega_0 A_{Cr}}+\dfrac{1}{\omega_0}\right)-\dfrac{\omega_{Cr}^2 RC}{\omega_0^2 A_{Cr}}\right]=0 \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} 1-\omega_{Cr}^2 RC\left(\dfrac{1}{\omega_0 A_{Cr}}+\dfrac{1}{\omega_0}\right)-\dfrac{\omega_{Cr}^2}{\omega_0^2 A_{Cr}}+A_{Cr}=0 \\ RC+\left(\dfrac{1}{\omega_0 A_{Cr}}+\dfrac{1}{\omega_0}\right)-\dfrac{\omega_{Cr}^2 RC}{\omega_0^2 A_{Cr}}=0 \end{cases}$$

Supponiamo ora che sia:

$$\frac{1}{\omega_0 A_{Cr}} << RC$$

così da poter semplificare il sistema precedentemente scritto che diventa:

$$\begin{cases} 1+A_{Cr}=\dfrac{\omega_{Cr}^2}{\omega_0}\left(RC+\dfrac{1}{\omega_0 A_{Cr}}\right) \\ \dfrac{1}{\omega_0}+RC\left(1-\dfrac{\omega_{Cr}^2}{\omega_0^2 A_{Cr}}\right)=0 \end{cases}$$

Risolvendo allora questo sistema si ricavano i valori di A_{Cr} e di ω_{Cr} che individuano il limite oltre il quale si ha instabilità.

<u>*Ci occupiamo ora del derivatore approssimato mostrato in figura 9 per il quale siano validi i seguenti valori numerici:*</u>

$$\begin{cases} RC = 1ms \\ R_S=\dfrac{R}{10} \end{cases}$$

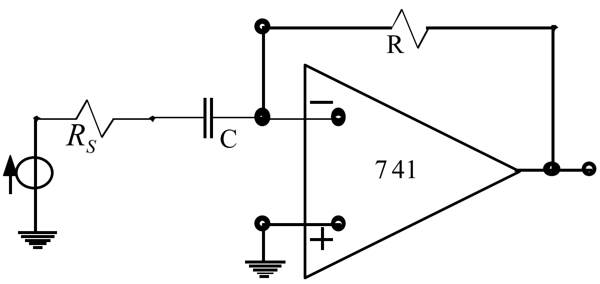


Figura 9

Vedendo la serie della resistenza R_S e della capacità come una generica impedenza Z e osservando che la struttura del derivatore approssimato è la medesima di un amplificatore invertente, si può esprimere il guadagno ideale di questa struttura nel modo seguente:

$$G_{Id}=-\frac{R}{Z}=-\frac{sRC}{1+sR_SC}$$

Il guadagno d'anello sarà invece:

$$G_{Loop}=-A(s)\frac{Z}{Z+R}=-A(s)\frac{1+sR_SC}{1+s(R_S+R)C}$$

Conoscendo il guadagno ideale e il guadagno d'anello si può ricavare il guadagno G del blocco di andata nel modo seguente:

$$G=-G_{Id}\cdot G_{Loop}=-A(s)\frac{sRC}{1+s(R_S+R)C}$$

Se utilizziamo l'operazionale 741 con due poli caratteristici si otterrà il diagramma di Bode relativo alla funzione di trasferimento che vediamo in figura 10.

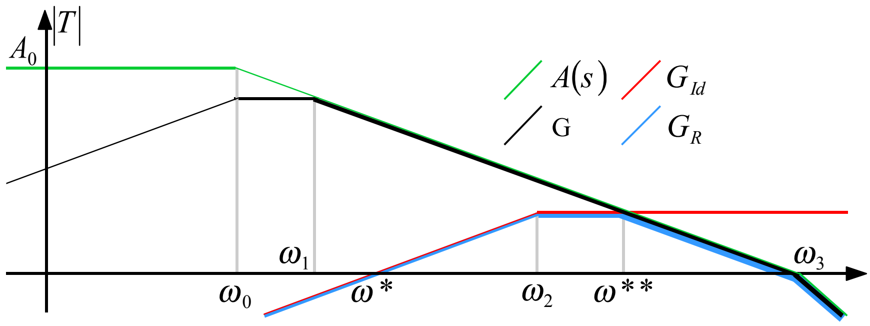


Figura 10

Con i dati di cui siamo in possesso possiamo ricavare i seguenti valori numerici:

$$\begin{cases} \omega_0 = 10\pi \dfrac{rad}{s} \\ \omega_1 = \dfrac{1}{(R+R_S)C} \cong 9\cdot 10^2 \dfrac{rad}{s} \\ \omega^* = \dfrac{1}{RC} = 10^3 \dfrac{rad}{s} \\ \omega_2 = \dfrac{1}{R_S C} = 10^4 \dfrac{rad}{s} \\ \omega_3 = 1MHz \end{cases}$$

Osservando il grafico osserviamo inoltre che è valida la seguente relazione:

$$\frac{\omega_3}{\omega^{**}} = \frac{R}{R_S}$$

in quanto il guadagno ideale ad alta frequenza è proprio uguale al rapporto tra le due resistenze; ricaviamo dunque:

$$\omega^{**} = \omega_3 \frac{R_S}{R} = 100kHz$$

Volendo usare il luogo delle radici si sarebbe ottenuto un grafico come quello mostrato in figura 11.

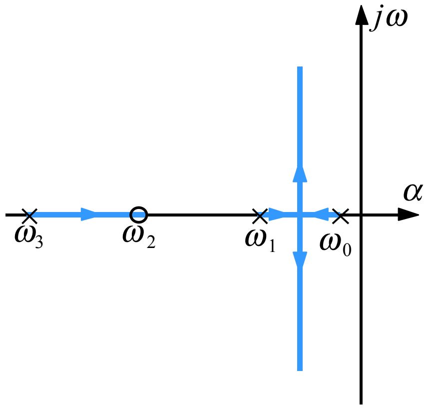


Figura 11

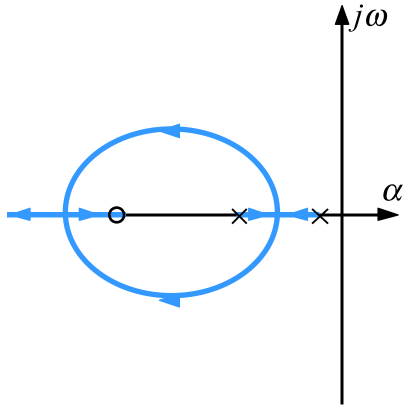


Figura 12

Notiamo che, se si fosse utilizzato un solo polo caratteristico dell'operazionale, il luogo delle radici avrebbe assunto la forma mostrata in figura 12. In entrambi i casi il circuito è sempre stabile perché il luogo delle radici è tutto e sempre contenuto nel piano delle α negative.

Vediamo ora il filtro universale che avevamo introdotto nella esercitazione 8 e che riproponiamo in figura 13.

Nella precedente esercitazione eravamo arrivati ad esprimere il guadagno d'anello di questo circuito nel modo seguente:

$$G_{Loop} = -\frac{1+sRC}{(sRC)^2}$$

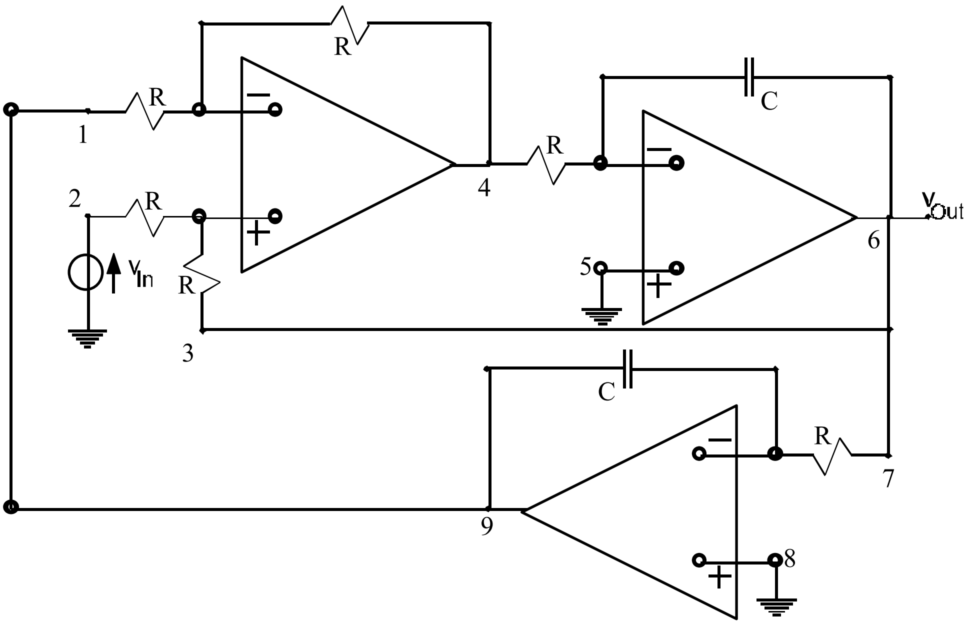


Figura 13

Il grafico di Bode relativo all'andamento del guadagno d'anello sarà dunque quello mostrato in figura 14.

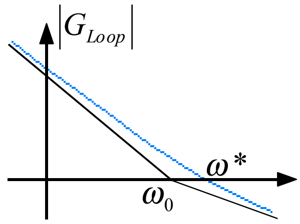


Figura 14

Ovviamente sarà:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Notiamo allora che, siccome l'andamento non approssimato del guadagno d'anello taglia l'asse 0 dB in un punto ω nel quale la pendenza sarà sicuramente inferiore ai –40 dB/dec, possiamo affermare che il circuito è stabile.*
Consideriamo ora l'amplificatore invertente mostrato in figura 15

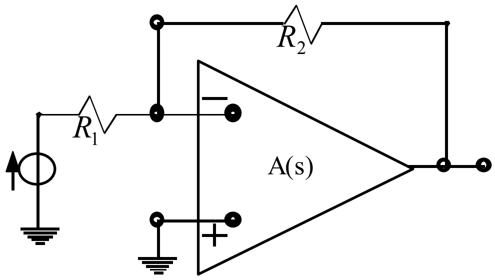


Figura 15

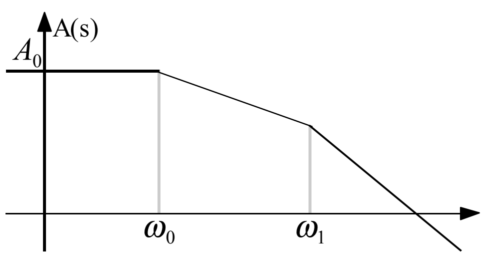


Figura 16

Sono anche forniti i seguenti valori numerici:

$$\begin{cases} R_1 = 1k\Omega \\ R_2 = 99k\Omega \\ A_0 = 10^4 \\ \omega_0 = 10^5 \dfrac{rad}{s} \\ \omega_1 = 10^6 \dfrac{rad}{s} \end{cases}$$

dove ω_0 e ω_1 sono i due poli caratteristici dell'operazionale.
Come prima cosa vediamo il diagramma di Bode relativo alla funzione A(s) in figura 16; Siccome siamo in una semplice configurazione invertente, il guadagno d'anello sarà il seguente:

$$G_{Loop} = -A(s)\frac{R_1}{R_1 + R_2} = -\frac{A(s)}{100}$$

e quindi il grafico relativo al suo andamento sarà quello mostrato in figura 17.

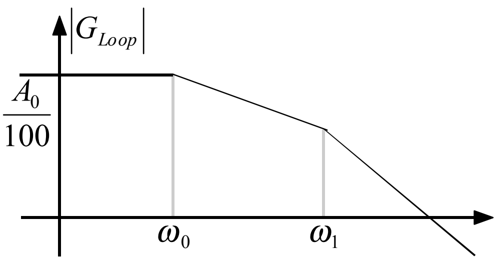


Figura 17

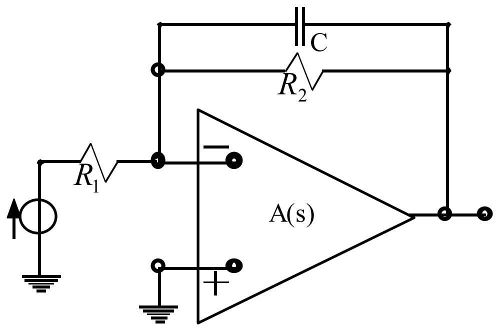


Figura 18

Siccome il diagramma del guadagno d'anello interseca l'asse a 0 dB con pendenza di 40 db/dec siamo in presenza di un circuito instabile. Per compensare il circuito dovremmo trovare il modo di modificare il guadagno d'anello in modo da farne attraversare l'asse a 0 dB con una pendenza di 20 dB/dec; sfruttiamo dunque il metodo dell'anticipo sull'ingresso. Introduciamo dunque nel circuito una capacità in modo da ottenere la struttura che vediamo in figura 18. Considerando il parallelo della resistenza R_2 e della capacità come un'unica impedenza così espressa:

$$Z = \frac{R_2}{1 + sR_2C}$$

Il nuovo guadagno d'anello sarà dunque il seguente:

$$G_{Loop} = -A(s)\frac{R_1}{R_1 + Z} = -\frac{A(s)}{100}\frac{1 + sR_2C}{1 + sC\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}$$

Notiamo dunque come, in aggiunta ai due poli ω_0 e ω_1 caratteristici dell'operazionale, questo nuovo guadagno d'anello presenta due nuove singolarità: uno zero e un polo che saranno:

$$\begin{cases} \omega_Z = \dfrac{1}{R_2C} \\ \omega_P = \dfrac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} \end{cases}$$

Dobbiamo ora dimensionare in maniera corretta la capacità imponendo che sia:

$$\omega_Z = \omega_1$$

ovvero:

$$\frac{1}{R_2C} = \omega_1$$

e quindi:

$$C = \frac{1}{R_2 \omega_1} = 10\, pF$$

Utilizzando dunque i valori numerici si ottiene, per il guadagno d'anello, la seguente serie di singolarità:

$$\begin{cases} \omega_0 = 10^5 \dfrac{rad}{s} \\ \omega_1 = \omega_Z = 10^6 \dfrac{rad}{s} \\ \omega_P \approx 10^7 \dfrac{rad}{s} \end{cases}$$

e quindi il nuovo diagramma del guadagno d'anello sarà quello mostrato in figura 19.

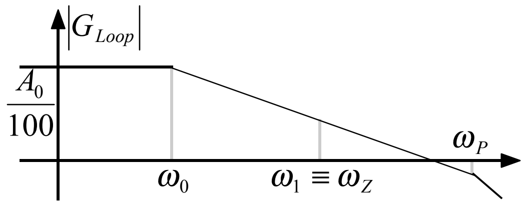


Figura 19

Vediamo dunque che siamo riusciti a modificare il diagramma del guadagno d'anello che ora interseca l'asse a 0 dB con pendenza di soli 20 dB/dec e quindi siamo riusciti a stabilizzare il sistema.