Indice delle lezioni

(Prof. Storti-Gajani)

Lezione numero 1	• Richiami di Elettromagnetismo	3 Marzo 1999
Lezione numero 2	• Approssimazione a parametri concentrati • Leggi di Kirchhoff e di Ohm • Bipoli elettrici • Collegamenti in serie e in parallelo	4 Marzo 1999
Lezione numero 3	• Potenza e convenzioni di segno • Topologia delle reti: i grafi	10 Marzo 1999
Lezione numero 4	• Topologia delle reti: i grafi • Risoluzione dei circuiti: CN e CS di risolubilità • Metodo dell'analisi nodale	11 Marzo 1999
Lezione numero 5	• Metodo dell'analisi nodale • Metodo della tabella sparsa • Metodo dell'analisi nodale modificata	17 Marzo 1999
Lezione numero 6	• Metodo dell'analisi nodale modificata	18 Marzo 1999
Lezione numero 7	• Doppi bipoli: rappresentazioni matriciali • Generatori dipendenti	24 Marzo 1999
Lezione numero 8	• Doppi bipoli: passività	25 Marzo 1999
Lezione numero 9	• Doppi bipoli: metodo delle prove semplici	26 Marzo 1999
Lezione numero 10	• Doppi bipoli: metodo delle prove semplici • Ricostruzione di un doppio bipolo a partire dalla rappresentazione matriciale • Doppio bipolo terminato • Gestione dei generatori pilotati nella MNA	7 Aprile 1999
Lezione numero 11	• Elementi reattivi • Transitori del primo ordine	8 Aprile 1999
Lezione numero 12	• Esempi sulla MNA con i generatori pilotati	14 Aprile 1999
Lezione numero 13	• Transitori del primo ordine • Gli interruttori	21 Aprile 1999
Lezione numero 14	• Equilibrio e stabilità di un sistema • Visione energetica degli elementi dinamici	22 Aprile 1999
Lezione numero 15	• Transitori del primo ordine in presenza di generatori	23 Aprile 1999
Lezione numero 16	• Transitori degli ordini superiori	28 Aprile 1999
Lezione numero 17	• Tipi di equilibrio	29 Aprile 1999
Lezione numero 18	• Forzanti tempovarianti • I fasori	5 Maggio 1999
Lezione numero 19	• LKC ed LKV con i fasori • Ammettenza e impedenza	6 Maggio 1999
Lezione numero 20	• Rappresentazione ingresso-uscita • Esempi	7 Maggio 1999
Lezione numero 21	• Rappresentazione ingresso-uscita • Il risuonatore • Doppi bipoli in regime alternato	12 Maggio 1999

Lezione numero 22	• Potenza in regime sinusoidale • Potenza con i fasori	14 Maggio 1999
Lezione numero 23	• Potenza con i fasori • Trasmissione di energia elettrica • Rifasamento	19 Maggio 1999
Lezione numero 24	• Sistemi trifase	20 Maggio 1999
Lezione numero 25	• Trasformata di Laplace applicata alle reti	27 Maggio 1999
Lezione numero 26	• La funzione di trasferimento • Esempi di diagrammi di Bode	2 Giugno 1999
Lezione numero 27	• Esempio applicativo	3 Giugno 1999
Lezione numero 28	• Esempio applicativo • Sistemi che "prevedono il futuro" • Osservazione sui casi che presentano autovalori complessi • Analisi complessiva di un risuonatore	4 Giugno 1999
Lezione numero 29	• Auto induttanza e mutua induttanza. • Il trasformatore. • Il giratore. • Gli amplificatori operazionali.	10 Giugno 1999

Bibliografia:

Tutto quanto visto sul regime sinusoidale viene ottimamente riassunto nella voce "NETWORK ANALYSIS, SINUSOIDAL STEADY ST." della Webster, Wiley Enc. Of Electronic Eng., ed Wiley, volume 14 pagina 95 a cura di Amedeo Premoli e Giancarlo Storti-Gajani.

Richiami di Elettromagnetismo.

Ricordiamo innanzitutto la relazione fondamentale, di tipo sperimentale, che esprime l'interazione di due cariche fisse: l'equazione di Coulomb:

$$\vec{F} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\underline{u}$$

Data poi una distribuzione di cariche fisse possiamo ricordare la definizione di campo elettrostatico che, detta q una carica esplorativa, veniva definito come segue:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{[Newton]}{[Coulomb]} = \frac{[Volt]}{[Metro]}$$

La tensione, la prima grande protagonista del nostro corso, poteva dunque essere definita come un lavoro, in particolare come il lavoro di una carica che si muove lungo una linea nel campo (per questo motivo la tensione viene detta una grandezza di linea). Avremo dunque:

$$\int_l \vec{E} \cdot dl = v = [Volt]$$

Siccome siamo nel caso di un campo elettrostatico, però, vale la relazione seguente:

$$\oint_l \vec{E} \cdot dl = 0$$

Questa relazione ha validità globale; la sua corrispettiva di validità puntuale è, invece, la seguente:

$$\overrightarrow{Rot}\vec{E} = 0$$

Il significato fisico di queste due relazioni è che si troverà il medesimo valore del lavoro per qualunque linea si usi nel calcolo dell'integrale a patto che tali linee abbiano in comune i punti estremi. Inoltre, siccome il campo elettrostatico ha rotore nullo, tale campo ammette un potenziale ed è quindi possibile definire la tensione come la differenza di potenziale tra i due estremi citati.

La seconda grande protagonista del corso di elettrotecnica è, ovviamente, la corrente. Questa viene considerata una grandezza di superficie poiché misura la quantità di carica che attraversa una superficie nell'unità di tempo. La definizione classica della corrente in funzione della carica è la seguente:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{[Coulomb]}{[Secondo]} = [Ampere]$$

Dobbiamo sottolineare l'evidente contraddizione che appare da ora e nel seguito: pur avendo definito, infatti, la corrente, che implica un movimento di cariche, considereremo ancora valide le relazioni viste per il campo elettrostatico. Questa contraddizione si risolve, in parte, pensando che le cariche in movimento si muovano molto lentamente, in questo modo tutte le derivate temporali possono essere considerate nulle ed ha senso parlare di cariche in movimento e di campo elettrostatico. Molto spesso la corrente elettrica viene definita in modo diverso sfruttando una grandezza detta densità di corrente e indicata con il simbolo J; tale definizione è la seguente:

$$i = \int_S \vec{J} \cdot dS$$

Sfruttiamo ora entrambe le definizioni date per la corrente elettrica (modificando leggermente la prima in modo da inserire la densità di carica ρ) ed esprimiamo la corrente uscente da una superficie chiusa. Si avrà allora:

$$i_{Sn} = \oint_S \vec{J} \cdot dS_n = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV$$

L'uguaglianza tra il secondo e il terzo membro di questa relazione, qui in forma globale, può poi essere riscritta in forma puntuale come segue:

$$Div\vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$$

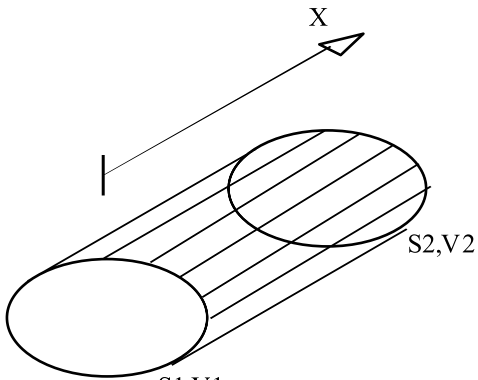
Siccome, però, possiamo ancora, come abbiamo accennato prima, considerarci in un campo elettrostatico, sarà valida anche la seguente relazione:

$$Div\vec{J} = 0$$

Possiamo dunque dire che il campo densità di corrente elettrica è un campo solenoidale e questo, dal punto di vista fisico, si traduce con il fatto che il bilancio delle cariche entranti ed uscenti da una superficie è sempre nullo. Queste considerazioni portano alla prima e alla seconda legge di Kirchhoff che vedremo più in dettaglio nel seguito.

Consideriamo ora la seguente relazione fisica, anch'essa di origine sperimentale, che risulta essere invece la base teorica della terza e, forse, più importante, legge che si utilizza in elettrotecnica:

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$
dove la grandezza γ prende il nome di conducibilità specifica. Questa relazione viene accompagnata dalla sua inversa secondo la quale:
$$\vec{E} = \rho \vec{J}$$
dove la grandezza ρ prende, invece, il nome di resistività specifica. A partire dalla prima di queste due relazioni possiamo arrivare, passando dal puntuale al globale, alla relazione seguente:
$$i = gv = g(v_2 - v_1)$$
Da questa relazione possiamo definire come segue la conduttanza G:
$$g = \frac{i}{v_2 - v_1} = \frac{[Ampere]}{[Volt]} = [Siemens]$$
Partendo invece dalla relazione inversa, possiamo, in maniera assolutamente identica, arrivare a definire come segue la resistenza R:
$$r = \frac{v_2 - v_1}{i} = \frac{[Volt]}{[Ampere]} = [Ohm]$$
Vediamo ora di riscrivere in maniera differente quest'ultima relazione. Per fare questo si consideri un tubo di flusso compreso tra due superfici equipotenziali a potenziali qualsiasi:



Siccome la corrente che scorre nel tubo di flusso è sempre la stessa, ha senso indicarla sia rispetto alla superficie 1 che rispetto alla superficie 2, ovvero ha senso la seguente relazione:
$$i = \int_{S1} \vec{J} \cdot dS_1 = \int_{S2} \vec{J} \cdot dS_2$$
Tenendo poi conto che la densità di corrente J è sempre normale alla superficie S, la relazione precedente può essere riscritta come segue:
$$i = \int_{S1} JdS_1 = \int_{S2} JdS_2$$
Da quest'ultima relazione possiamo dunque arrivare a dire che:
$$i = JS$$
e quindi che:
$$J = \frac{i}{S}$$
Questa relazione è di immediata comprensione pensando al nome stesso con il quale viene battezzata la grandezza J: densità di corrente elettrica. Siccome poi quest'ultima relaziona vale per qualunque sezione del tubo di flusso potremo scrivere che:
$$J(x) = \frac{i}{S(x)}$$
Ricordiamo ora la relazione con la quale abbiamo definito la tensione elettrica che, nel caso in questione, può riscriversi come segue:
$$v_2 - v_1 = \int_l \vec{E} \cdot dl$$

Riscrivendo inoltre la relazione di proporzionalità tra campo elettrico e densità di corrente elettrica come segue (tenendo conto che se J è funzione di x allora lo dovrà essere anche E):

$$\frac{\vec{J}(x)}{\gamma} = \vec{E}(x)$$

Combinando queste ultime due relazione e considerando l'integrale lungo una linea contenuta nel tubo di flusso si otterrà:

$$v_2 - v_1 = \int_1^2 E(x)dx = \int_1^2 \frac{i}{\gamma S(x)} dx$$

e dunque la resistenza può essere espressa come segue:

$$g^{-1} = r = \frac{v_2 - v_1}{i} = \int_1^2 \frac{dx}{\gamma S(x)}$$

oppure, pensando che la γ non sia una costante ma che venga considerata costante almeno rispetto ad ogni superficie, si avrebbe:

$$g^{-1} = r = \frac{v_2 - v_1}{i} = \int_1^2 \frac{dx}{\gamma(x) S(x)}$$

Approssimazione a parametri concentrati. Leggi di Kirchhoff e di Ohm. Bipoli elettrici. Collegamenti in serie e in parallelo.

Come prima cosa ricordiamo i tre risultati ai quali si è pervenuti durante la lezione numero 1 e che vengono riassunti dalle tre seguenti equazioni:

$$\overrightarrow{Rot}\vec{E} = 0$$
$$Div\vec{J} = 0$$
$$v = ri$$

Consideriamo ora un campo elettrostatico nel quale viene immerso un materiale conduttore perfetto (un materiale viene detto conduttore se possiamo supporre che al suo interno ci sia un'infinità di cariche che si possono muovere, viene poi considerato perfetto se tali cariche si muovono liberamente). Dalle leggi dell'elettromagnetismo sappiamo che all'interno del conduttore si ha campo elettrico nullo:

$$\vec{E}_{Cond} = 0$$

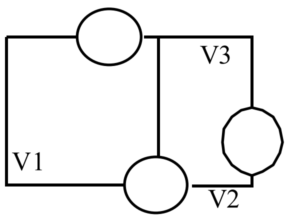
L'irrotazionalità del campo elettrostatico, indicata dalla prima delle relazioni trovate durante la lezione 1, implica che, come si è già visto, il campo elettrico ammetta gradiente, ovvero che valga la relazione:

$$\vec{E} = \overrightarrow{Grad}v$$

Combinando dunque le ultime due relazioni espresse, ricaviamo che il potenziale sul conduttore è costante, ovvero:

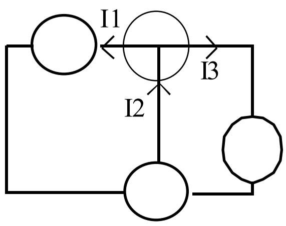
$$v_{Cond} = Const$$

Detto questo immergiamo l'oggetto rappresentato nella figura seguente in un campo elettrostatico:



Si avrà allora che i fili di questo protocircuito, che sono dei fili di conduttore, avranno al loro interno campo elettrico nullo e avranno un potenziale costante. Non è però detto che tutti i conduttori siano allo stesso potenziale (anche se tutti i punti di un singolo conduttore hanno potenziale costante) e quindi è possibile che tra i due estremi degli elementi che vediamo apparire in questo circuito (potrebbero per esempio essere resistori oppure generatori) ci siano delle differenze di potenziale. Cambiando il potenziale in un punto di un conduttore, istantaneamente il potenziale cambierà in tutti i punti di quel medesimo conduttore. Quest'ultima affermazione è ovviamente una approssimazione perché impone che la velocità con cui le cariche si riorganizzano per adattarsi alla variazione nel potenziale sia infinita e questo è ovviamente un assurdo; tale approssimazione è però molto comoda e quindi verrà considerata valida. E' necessario, però, sottolineare i limiti di applicabilità di questa approssimazione che prende il nome di approssimazione a parametri concentrati: tale approssimazione vale fino a che le dimensioni fisiche del circuito rendono praticamente irrilevanti i tempi di risposta ad una perturbazione del potenziale (in pratica il circuito deve essere piccolo e lavorare in bassa frequenza).

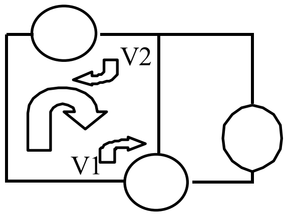
Dopo aver fatto questo breve discorso introduttivo vediamo come le tre relazioni ricordate all'inizio della lezione ci portano a tre leggi fondamentali per l'elettrotecnica. Consideriamo prima di tutto la relazione che esprime la solenoidalità del campo densità di corrente elettrica e applichiamola, nel protocircuito rappresentato nel seguito, alla superficie indicata in figura. Considerando positive le correnti entranti, si otterrà la seguente relazione:



$$-i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

Possiamo dunque esprimere in modo generico la legge di Kirchhoff alla correnti (LKC) dicendo che la somma algebrica delle correnti entranti in una qualunque superficie è nulla. Tale legge vale per qualunque superficie purchè non tagli uno dei componenti del circuito.

Consideriamo ora la relazione che esprime l'irrotazionalità del campo elettrico e applichiamola, nel protocircuito rappresentato nel seguito, alla maglia indicata in figura. Considerando positive le tensioni concordi con il senso della freccia, si otterrà la seguente relazione:



$$-v_1 - v_2 = 0$$

Possiamo dunque esprimere in modo generico la legge di Kirchhoff alle tensioni (LKV) dicendo che la somma algebrica delle tensioni incontrate lungo una maglia qualsiasi deve essere nulla. Questa legge è già di per sé contenuta nella relazione di irrotazionalità del campo elettrico perché già quella relazione implicava che il potenziale su un conduttore dovesse essere costante.
Veniamo ora, con lo scopo di analizzare gli elementi sul circuito (dopo averne analizzato i nodi e le maglie), alla terza relazione trovata nella lezione numero 1. Ovviamente tale relazione non è altro che una approssimazione, come tutte le relazioni che modellizzano fenomeni naturali e implicano una dipendenza lineare. In effetti la relazione in questione non è altro che un caso particolare di una classe di relazioni esprimibili come segue:

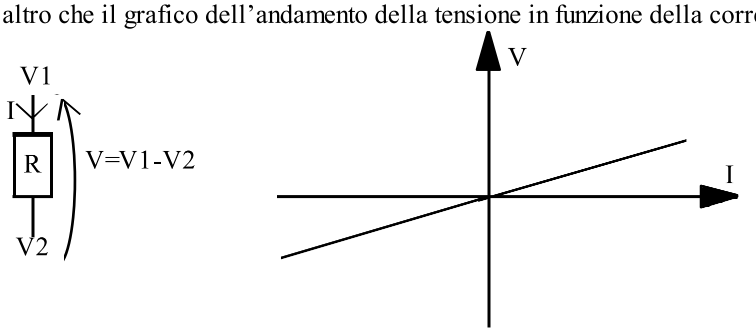
$$f(v,i) = 0$$

Una legge di questo tipo, però, è molto poco gestibile e, per questo motivo, si trasforma in una delle due forme seguenti:

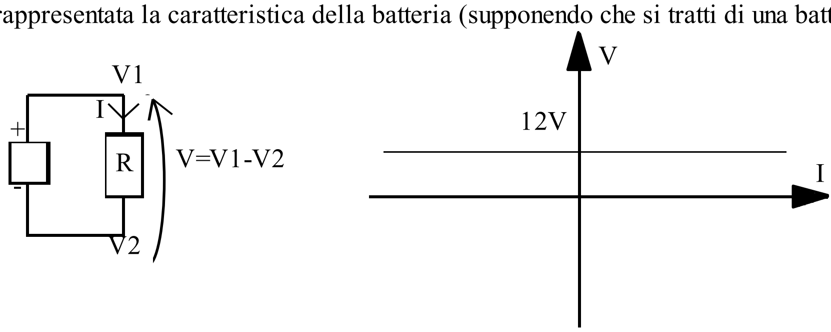
$$v = f_1(i)$$

$$i = f_2(v)$$

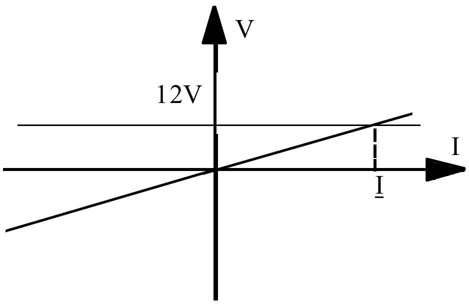
Nel primo caso, nel quale rientra la relazione approssimata che stiamo utilizzando, si parla di un componente controllato in corrente, nel secondo caso si parla di un componente controllato in tensione. Diamo dunque la rappresentazione di quello che da ora in poi verrà chiamato un bipolo, con i suoi versi di riferimento; di tale bipolo verrà data anche la caratteristica, che non è altro che il grafico dell'andamento della tensione in funzione della corrente o viceversa:



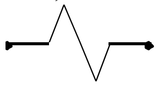
L'andamento della caratteristica permette di comprendere per quale motivo un bipolo di questo tipo si chiama lineare. Attacchiamo, ora, al bipolo, una batteria. Otterremo allora un circuito come quello rappresentato qui di seguito. Nella figura viene anche rappresentata la caratteristica della batteria (supponendo che si tratti di una batteria da 12V):



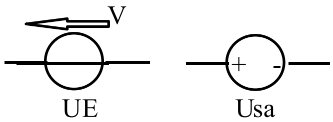
Intersecando la caratteristica del bipolo con la caratteristica della batteria, come viene mostrato nella pagina seguente, si può stabilire il punto di lavoro del semplice circuito che abbiamo disegnato; diciamo allora che il sistema funziona a 12V e a I ampere. E' molto semplice comprendere che, se non si fosse utilizzato un bipolo lineare, l'intersezione della sua caratteristica con la caratteristica della batteria potrebbe anche essere stata multipla, in questo caso non sarebbe stato possibile definire il punto di lavoro, questi circuiti non possono infatti essere analizzati con le metodologie che stiamo analizzando.



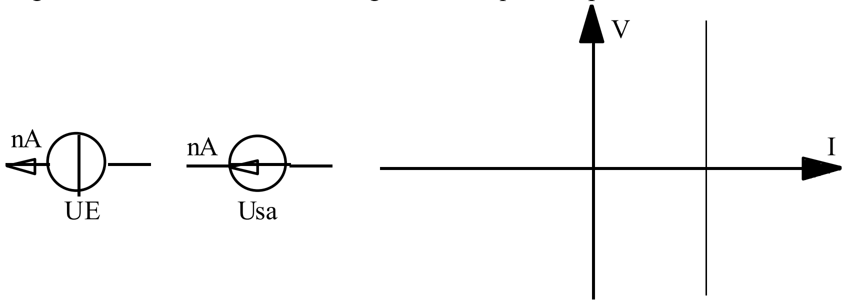
Vediamo ora in dettaglio, alcuni bipoli tempoinvarianti particolari. In primo luogo ci occupiamo dei bipoli resistivi, ovvero dei bipoli che modellizzano per le resistenze e che, nei circuiti, vengono indicati come segue:



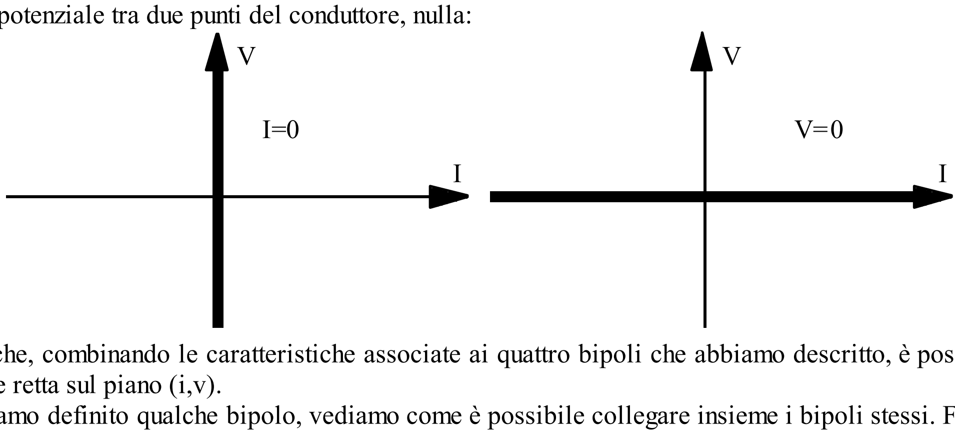
Un altro bipolo importante (che modellizza per la batteria) è il generatore ideale di tensione. Come si vede qui di seguito, esistono due modi di rappresentare questo tipo di bipolo: il modello europeo e il modello statunitense; i rispettivi simboli sono i seguenti:



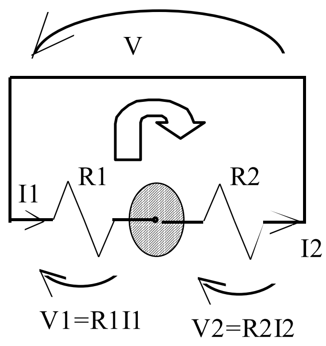
Un terzo tipo di bipolo (che, però, non è controllato in corrente ma è controllato in tensione) è il generatore ideale di corrente; anche in questo caso esistono due possibili rappresentazioni simboliche, quella europea e quella statunitense che vediamo qui di seguito insieme alla caratteristica generica di questo bipolo:



Concludiamo questa breve rassegna sui bipoli indicando un bipolo che non è esattamente tempoinvariante: l'interruttore. L'interruttore può essere considerato tempoinvariante soltanto se viene considerato durante degli intervalli di tempo in cui non cambia il proprio stato; quando l'interruttore è aperto implica che si abbia un circuito aperto mentre quando l'interruttore è chiuso si parla di circuito chiuso. Nell'immagine seguente vengono indicate le caratteristiche del circuito aperto (nel quale ho corrente nulla) e del circuito chiuso (nel quale ho tensione, intesa come differenza di potenziale tra due punti del conduttore, nulla:



Osserviamo che, combinando le caratteristiche associate ai quattro bipoli che abbiamo descritto, è possibile individuare una qualunque retta sul piano (i,v).
Ora che abbiamo definito qualche bipolo, vediamo come è possibile collegare insieme i bipoli stessi. Faremo il discorso analizzando i collegamenti fatti con i bipoli resistivi ma troveremo un metodo, quello delle caratteristiche, per collegare in serie qualunque tipo di bipolo. Il primo tipo di collegamento di due o più bipoli è il collegamento in serie. Un circuito che presenta due resistori collegati in serie è rappresentato nel seguito. Se applichiamo la legge di Kirchhoff delle correnti (LKC) alla superficie rappresentata in figura si ottiene:



$$-i_1 + i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = i_2$$

Applichiamo ora la LKV all'unica maglia presente nel circuito, prendendo come riferimento il verso indicato in figura; si avrà quindi:

$$-v + v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v = v_1 + v_2$$

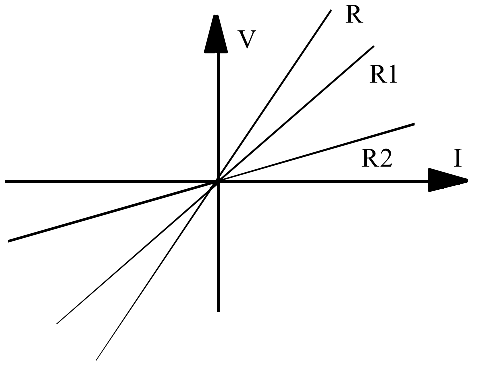
Combinando queste due ultime relazioni e le leggi di Ohm relative ai due resistori si ottiene:

$$v = r_1 i_1 + r_2 i_2 = (r_1 + r_2)i = r_{Eq} i$$

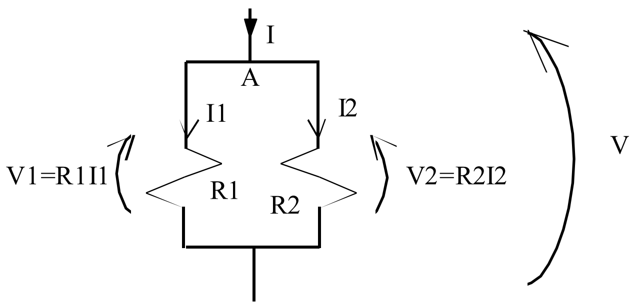
Questo significa che collegare in serie due resistori equivale a considerare un unico resistore di resistenza:

$$r_{Eq} = r_1 + r_2$$

Sfruttando le caratteristiche osserviamo come la caratteristica del bipolo ottenuto dal collegamento in serie dei due bipoli resistivi si ottienga sommando a parità di corrente le caratteristiche dei due bipoli di partenza:



Si osservi come la resistenza equivalente di due resistori collegati in serie è maggiore delle singole resistenze dei due resistori componenti. Il metodo di somma che sfrutta le caratteristiche può essere applicato a qualunque tipo di bipolo, non solo ai bipoli resistivi. Vediamo ora il secondo tipo di collegamento tra due bipoli: il collegamento in parallelo.



Applicando la LKV all'unica maglia presente nel circuito otteniamo:

$$-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = v$$

Applichiamo ora invece la LKC al nodo indicato in figura con la lettera A e otteniamo:

$$i - i_2 - i_1 = 0 \Rightarrow i = i_1 + i_2$$

Combinando queste due ultime relazioni e tenendo conto della leggi di Ohm che caratterizzano i due bipoli componenti il circuito (leggi espresse in funzione dell'induttanza) si ottiene:

$$i = i_1 + i_2 = g_1 v_1 + g_2 v_2 = (g_1 + g_2)v = g_{Eq} v$$

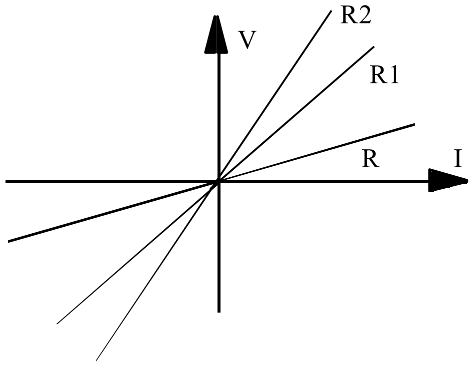
Questo significa che collegare in parallelo due resistori equivale a considerare un unico resistore di conduttanza:

$$g_{Eq} = g_1 + g_2$$

Abbiamo fatto dunque, per il collegamento in parallelo, un discorso perfettamente analogo a quello fatto per il collegamento in serie; con la notazione del Bottani si dice che il collegamento in parallelo è il procedimento duale rispetto al collegamento in serie. Dal punto di vista delle resistenze possiamo dire che la resistenza equivalente del resistore ottenuto da una coppia di resistori collegati in parallelo è:

$$r_{Eq} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^{-1}$$

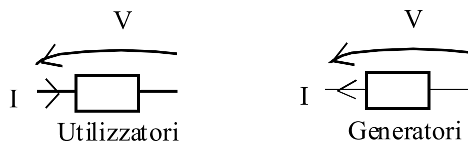
Il discorso rimane ovviamente valido anche se vengono usati più di due resistori.
Rimane valido anche il procedimento di somma delle caratteristiche; nel caso del collegamento in parallelo, però, la somma non viene più fatta a pari corrente ma a pari tensione e quindi, come si vede in figura, la resistenza complessiva è minore delle singole resistenze componenti il collegamento.



Lezione numero 3
10 Marzo 1999

Potenza e convenzioni di segno. Topologia delle reti: i grafi.

Prima di passare al secondo importante punto del corso, la topologia delle reti, rivediamo alcuni aspetti importanti relativi alle caratteristiche ed ai bipoli in generale. Innanzitutto è importante sottolineare che la caratteristica di un bipolo non ha un significato completo fino a quando non si stabilisce una convenzione di riferimento relativa alla corrente ed alla tensione del bipolo stesso. Fondamentalmente esistono due convenzioni di segno che vengono indicate graficamente anche qui di seguito: la convenzione degli utilizzatori (che prevede positiva la corrente entrante nel bipolo e la tensione controversa rispetto alla corrente) e la convenzione di segno dei generatori (che, invece, considera positiva la corrente uscente da un bipolo e la tensione concorde con la corrente).



La differenza tra queste due convenzioni è facilmente comprensibile se andiamo a considerare la potenza che sappiamo essere definita come:

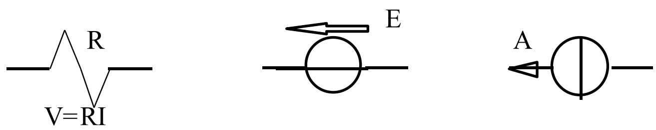
$$P = vi$$

Nel caso di un bipolo utilizzatore la potenza positiva è la potenza entrante nel bipolo stesso (si parla allora di un bipolo passivo) mentre nel caso dei generatori la potenza positiva è la potenza uscente dal bipolo (si parla di un bipolo attivo). Dal punto di vista delle caratteristiche, la zona in cui un bipolo (rappresentato con la convenzione di segno degli utilizzatori) è considerato passivo, è quella zona del grafico in cui tensione e corrente hanno prodotto positivo. Nel caso particolare di un bipolo resistivo, del quale abbiamo già espresso la relazione tra corrente e tensione, la potenza potrà essere espressa come segue:

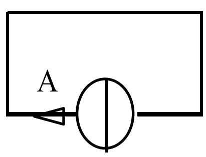
$$P = vi = ri^2 = gv^2$$

Viene data l'espressione della potenza espressa considerando il bipolo comandato in corrente ma anche l'espressione della potenza espressa considerando il bipolo comandato in tensione perché la scelta di una metodo o dell'altro diventerà cruciale quando si avranno bipoli non lineari. Concludiamo questo primo argomento osservando che esiste un approccio diverso da quello utilizzato in queste pagine; tale approccio, che si fa risalire alla scuola di Bottani e che non verrà qui usato, è tutto basato sul concetto di amperometro e di voltmetro.

Passiamo ora, dunque, al capitolo sulla topologia delle reti. Per prima cosa riassumiamo brevemente, nell'immagine seguente, i tre tipi di bipoli che conosciamo: il resistore, il generatore ideale di tensione e il generatore ideale di corrente.

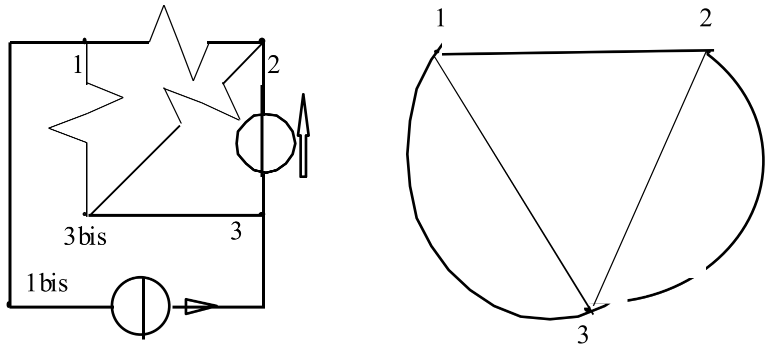


Possiamo osservare come un resistore isolato nello spazio possa già di per sé essere considerato un circuito (vengono infatti soddisfatte le leggi di Kirchhoff): si tratterà di un circuito con corrente nulla e, ovviamente, con tensione nulla. Anche un generatore di tensione ideale, isolato nello spazio, può essere considerato già di per sé un circuito: si tratterà di un circuito che presenta corrente nulla e tensione (nel caso del generatore indicato in figura) E. Un generatore di corrente isolato nello spazio non ha invece nessun senso fisico e quindi non può essere considerato come un circuito; infatti la corrente che viene imposta dal generatore non ha la possibilità di circolare e quindi la legge di Kirchhoff alle correnti non verrebbe soddisfatta. Il minimo circuito che utilizza soltanto un generatore ideale di corrente è quindi un generatore ideale di corrente cortocircuitato:

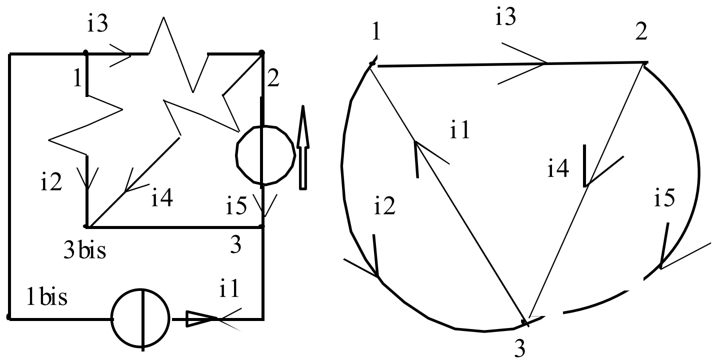


Si ricordi inoltre quanto detto anche a proposito dei circuiti aperti e dei circuiti chiusi e si osservi che un generatore di tensione spento equivale ad un circuito chiuso mentre un generatore di corrente spento equivale ad un circuito aperto.

Vediamo ora come gestire le reti con le equazioni di Kirchhoff. Innanzitutto dobbiamo osservare che le leggi di Kirchhoff prescindono completamente dal tipo di componenti utilizzati per comporre un circuito; prescinderemo anche noi dal tipo di componenti che costituiscono la rete andando a sfruttare il metodo descrittivo dei grafi. Per comprendere che cosa sia la tecnica rappresentativa dei grafi si consideri il seguente circuito del tutto generico e la sua rappresentazione con il metodo dei grafi. Per comprendere meglio la rappresentazione bisogna osservare che, nel disegno del circuito, sono stati messi in evidenza i nodi tenendo presente che tra il nodo 1 e il nodo 1bis c'è solo un tratto di circuito chiuso e che quindi possiamo considerare il nodo 1 e il nodo 1bis come un unico nodo (un discorso analogo viene fatto per i nodi 3 e 3bis); per questo motivo la rappresentazione con i grafi (che ad ogni bipolo associa un arco che collega i nodi) non presenta i nodi 1bis e 3bis.



Definiamo innanzitutto grafo connesso un grafo nel quale è possibile passare da un nodo ad un altro qualsiasi con un percorso chiuso. Scegliamo ora dei versi di riferimento per le correnti sui vari bipoli che costituiscono la rete:



Come prima cosa analizziamo la LKC. Consideriamo dunque positive le correnti uscenti e valutiamo la LKC rispettivamente per il nodo numero 1, il nodo numero 2 e il nodo numero 3. Si otterrano le tre seguenti equazioni:

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -i_3 + i_4 + i_5 = 0 \\ i_1 - i_2 - i_4 - i_5 = 0 \end{cases}$$

Si può facilmente osservare come la terza equazione sia una combinazione lineare delle prime due; abbiamo dunque due equazioni linearmente indipendenti (dette equazioni ai nodi indipendenti) in cinque incognite. Possiamo allora generalizzare il discorso e dire che se si ha un circuito con n nodi ed l lati si potranno scrivere n-1 LKC in l incognite. Le due equazioni ai nodi indipendenti che abbiamo trovato possono essere riscritte in forma matriciale come segue:

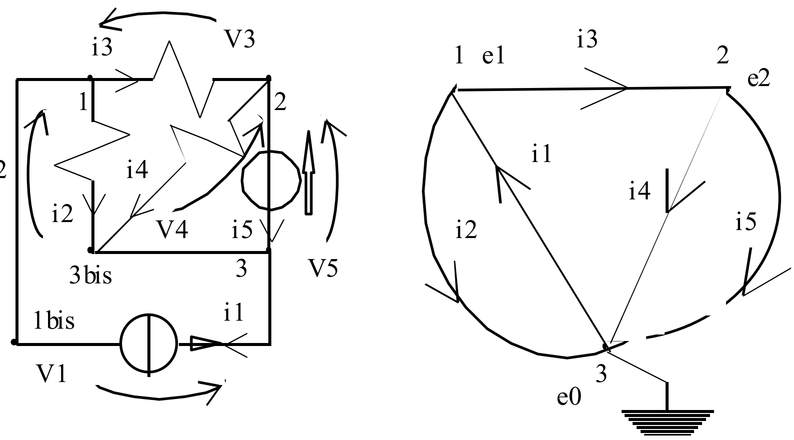
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = 0$$

Ovvero:

$$\underline{A}\underline{i} = 0$$

Dove $\underline{A}$ prende il nome di matrice di incidenza del grafo, mentre $\underline{i}$ è il vettore delle correnti. Passiamo ora ad esaminare le LKV. Utilizzeremo, per ogni bipolo, la convenzione degli utilizzatori. Decidiamo inoltre arbitrariamente che il nodo 3 del grafo sia il potenziale di riferimento e quindi supponiamo che tale nodo abbia tensione nulla (abbiamo scelto proprio questo nodo perché era quello del quale era stata scartata l'equazione relativa alle correnti). Introduciamo quindi i potenziali relativi ai nodi 1 e 2 del grafo. Analizzando i vari lati del grafo (dal lato numero 1 al lato numero 5) si ottengono le cinque seguenti equazioni:

$$\begin{cases} v_1 + e_1 = 0 \\ v_2 - e_1 = 0 \\ v_3 - e_1 + e_2 = 0 \\ v_4 - e_2 = 0 \\ v_5 - e_2 = 0 \end{cases}$$



Raccogliendo in forma matriciale le cinque equazioni che abbiamo trovato si ottiene la seguente equazione matriciale:

$$\underline{v} - \underline{A}^T \underline{e} = 0$$

dove $\underline{v}$ è il vettore delle tensioni, $\underline{A}$ è ancora la matrice vista prima mentre $\underline{e}$ è il vettore dei potenziali. Le due leggi di Kirchhoff, dunque, si riassumono nelle due seguenti relazioni matriciali:

$$\begin{cases} \underline{A}\underline{i} = 0 \\ \underline{v} - \underline{A}^T \underline{e} = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che, trasponendo la seconda di queste relazioni si ottiene:

$$\underline{v}^T = \underline{e}^T \underline{A}$$

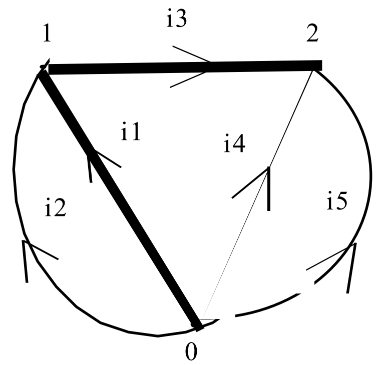
Moltiplicando ora a destra per il vettore delle correnti $\underline{i}$, si ottiene:

$$\underline{v}^T \underline{i} = \underline{e}^T \underline{A}\underline{i}$$

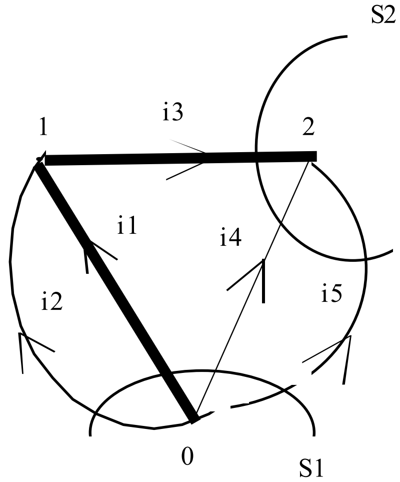
Uguagliando ora quest'ultima equazione con la relazione matriciale che esprime le LKC si ottiene l'espressione del teorema di Tellegen secondo il quale:

$$\underline{v}^T \underline{i} = 0$$

Quest'ultima relazione mi dice che il bilancio di potenza del circuito è nullo. Siccome non abbiamo usato la legge di Ohm, questa espressione vale per qualunque tipo di bipolo io utilizzi, purchè rimangano valide le leggi di Kirchhoff.
Definiamo ora un albero di un grafo come quella parte di un grafo per la quale posso collegare tutti i nodi del grafo senza fare degli anelli chiusi; per il grafo che stiamo utilizzando, un albero del grafo è rappresentato nella figura seguente:



Osserviamo che sono stati cambiati i versi di riferimento delle correnti; questo non comporta nessun problema in quanto stiamo facendo un discorso puramente generico. Si osservi altresì che se viene tolto uno dei lati dell'albero, il grafo composto dall'albero diventa sconnesso; possiamo dunque dire che un albero di grafo è composto dal minimo numero di lati che mi permettono di creare un grafo connesso che colleghi i nodi assegnati. I lati del grafo che compongono l'albero vengono detti lati di albero mentre i lati del grafo che non compongono l'albero vengono detti lati di coalbero. Vediamo ora una metodologia che sfrutta l'albero per avere il minimo numero di LKC ed LKV indipendenti che descrivono la rete rappresentata dal grafo. Consideriamo dunque l'ultimo grafo disegnato e occupiamoci delle LKC. Si prenda un lato di albero per volta e si consideri poi una superficie (detta superficie di taglio; i lati del grafo coinvolti nel taglio andranno a formare l'insieme di taglio) che tagli solo un lato di albero per volta (in figura vediamo come, nel nostro caso, questo corrisponda a considerare le due superfici S1 ed S2).



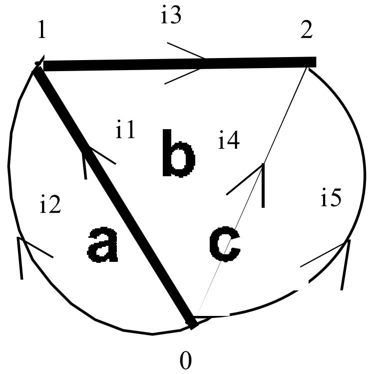
Applicando la LKC alla superficie S1, prendendo positive le correnti uscenti dalla superficie, si ottiene:

$$i_1 + i_2 + i_4 + i_5 = 0$$

Applicando poi la LKC alla superficie S2, prendendo questa volte positive le correnti entranti nella superficie, si ottiene:

$$i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

Occupiamoci ora delle LKV e, per fare questo, sfrutteremo il coalbero; prendiamo, infatti, un solo lato di coalbero per volta e costruiamo un percorso chiuso sfruttando solo lati di albero; le maglie che così si ottengono vengono poi orientate seguendo il verso che vede positiva la tensione del ramo di coalbero scelto. Nel caso del grafo che stiamo analizzando si otterranno le tre maglie a, b e c indicate in figura:



Applicando la LKV rispettivamente alle maglie a, b e c si ottiene:

$$\begin{cases} v_2 - v_1 = 0 \\ v_4 - v_3 - v_1 = 0 \\ v_5 - v_3 - v_1 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo dunque tre equazioni (in generale ne avremo l-n+1). Trasformiamo ora le due LKC in una espressione matriciale:

$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{i} = 0$$

Dove la matrice Q, che prende il nome di matrice di taglio fondamentale, avrà la seguente forma:

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformando, invece, la LKV in una relazione matriciale, si ottiene:

$$\underline{B}\underline{v} = 0$$

Dove la matrice B sarà la seguente:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo osservare che sia la matrice Q che la matricie B sono composte da sottomatrici identità alle quali vengono aggiunte delle parti (che derivano dal coalbero) che trasportano l'informazione. Si potrebbe, infine, dimostrare, la validità della seguente relazione:

$$\underline{Q}\underline{B}^T = 0$$

Topologia delle reti: i grafi. Risoluzione dei circuiti: CN e CS di risolubilità. Metodo dell'analisi nodale.

Nell'ultima lezione avevamo visto come, dato un circuito, le LKC e le LKV si potessero riscrivere in forma matriciale come segue:

$$\begin{cases} \underline{A}\,\underline{i} = 0 \\ \underline{v} - \underline{A}^T\,\underline{e} = 0 \end{cases}$$

Sfruttando i grafi, invece, le LKC e le LKV venivano riassunte nelle due relazioni matriciali:

$$\begin{cases} \underline{Q}\,\underline{i} = 0 \\ \underline{B}\,\underline{v} = 0 \end{cases}$$

Dalle equazioni matriciali espresse nel primo sistema si era arrivati ad esprimere la forma matriciale del teorema di Tellegen secondo il quale il vettore delle tensioni e il vettore delle correnti sono sempre ortogonali tra di loro. Vediamo ora alcune relazioni matriciali significative: partendo dalla seconda equazione del primo sistema e moltiplicando a sinistra per la matrice $\underline{B}$ si ottiene:

$$\underline{B}\,\underline{v} - \underline{B}\,\underline{A}^T\,\underline{e} = 0$$

Combinando questa relazione con la seconda equazione del secondo sistema indicato si ottiene:

$$\underline{B}\,\underline{A}^T\,\underline{e} = 0$$

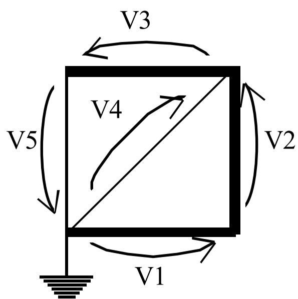
Siccome poi questa relazione deve rimanere valida per qualunque vettore dei potenziali, si avrà:

$$\underline{B}\,\underline{A}^T = 0$$

Si osservi anche che lo stesso legame che c'è tra le due equazioni del primo sistema esiste anche tra la prima equazione del secondo sistema e l'equazione seguente:

$$\underline{v} - \underline{Q}^T\,\underline{v}_A = 0$$

dove vediamo apparire il vettore delle tensioni di albero. Per capire meglio da dove si origina questa relazione si consideri il grafo seguente, del quale è stato evidenziato l'albero e il nodo scelto come nodo di riferimento:



Sfruttando il metodo visto nella lezione precedente per creare maglie a partire dai lati di coalbero e applicando a tali maglie le LKV, ricaviamo, da questo grafo, le due relazioni seguenti:

$$\begin{cases} v_4 = v_1 + v_2 \\ v_5 = -v_1 - v_2 - v_3 \end{cases}$$

Dunque, l'ultima espressione matriciale vista potrà essere, nel caso di questo grafo, esplicitata come segue:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Si osservi che, se nel vettore delle tensioni che c'è a primo membro mettiamo per prime le tensioni di albero, la prima parte della matrice $\underline{Q}$ è una matrice identità. Per quanto riguarda, infine, la seconda equazione del seconde sistema, esiste una relazione identica a quelle fino ad ora espresse tra le altre coppie di relazioni analizzate con la seguente:

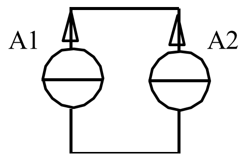
$$\underline{i} - \underline{B}^T\,\underline{i}_C = 0$$

dove è stato introdotto il vettore correnti di coalbero.

In conclusione, le LKC e le LKV possono essere rappresentate tramite uno dei seguenti sistemi (di cui gli ultimi due sono tra di loro duali):

$$\begin{cases} \underline{A}\underline{i} = 0 \\ \underline{v} - \underline{A}^T \underline{e} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{Q}\underline{i} = 0 \\ \underline{v} - \underline{Q}^T \underline{v}_A = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{i} - \underline{B}^T \underline{i}_C = 0 \\ \underline{B}\underline{v} = 0 \end{cases}$$

Veniamo ora al problema principale dell'elettrotecnica: il problema legato alla risoluzione dei circuiti. Come prima cosa dobbiamo osservare come un circuito possa ammettere una soluzione, non ammettere soluzioni oppure ammettere infinite soluzioni. Chiariamo meglio quanto detto ricordando che si era visto come il minimo circuito realizzabile utilizzando soltanto generatori di corrente era un generatore di corrente cortocircuitato. Non aveva infatti senso pensare ad un circuito composto da un solo generatore di corrente sospeso nel vuoto. Questa configurazione, infatti, corrispondeva alla connessione in serie del generatore di corrente con un circuito aperto ma, per quanto precedentemente detto sui circuiti aperti e sui circuiti chiusi, questo non è altro che un caso particolare della seguente configurazione:



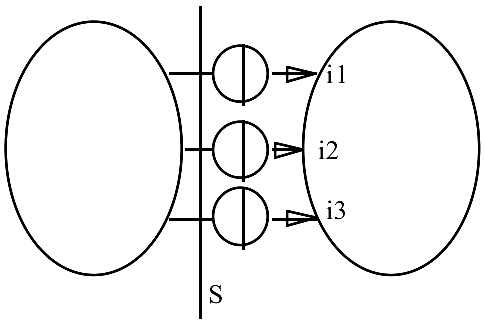
dove le correnti generate dai due generatori sono diverse. Se applichiamo la LKC ad un nodo qualunque di questo circuito otterremo la seguente relazione:

$$A_1 + A_2 = 0$$

Ovviamente questa relazione ha senso soltanto se le due correnti sono l'una l'opposto dell'altra in caso contrario, appunto, non ci sono soluzioni. Anche quando, però, le due correnti sono effettivamente l'una l'opposto dell'altra, il circuito ammette infinite soluzioni perché tra due punti del circuito io posso mettere una tensione qualunque e ciò è accettabile.

Vediamo dunque quali sono le CN e le CS che mi permettono di trovare la soluzione di un circuito (trovare la soluzione di un circuito significa trovare tensioni e correnti su tutti i lati del circuito).

- CN affinchè un circuito ammetta soluzioni è che non esistano insiemi di taglio di generatori di corrente. Per comprendere meglio tale CN facciamo riferimento allo schema seguente nel quale è rappresentato un insieme di taglio composto da generatori di corrente:

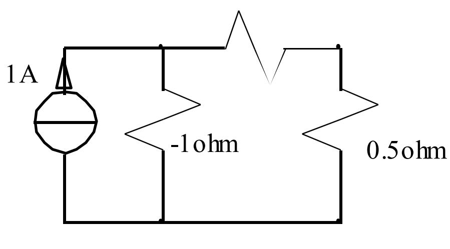


  Se si avesse una situazione del genere e si applicasse la LKC alla superficie S si otterrebbe la seguente relazione:

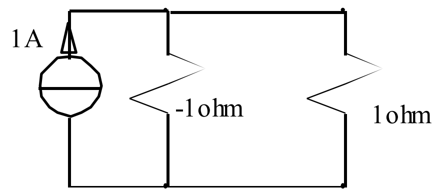
$$\sum_k i_k = 0$$

  Se questa relazione non viene soddisfatta, non ci sono soluzioni, se invece questa relazione viene per caso soddisfatta ci sono infinite soluzioni.
- CN affinchè un circuito ammetta soluzioni è che non esistano maglie di generatori di tensione. Questa CN è la duale di quella precedente; se infatti viene applicata la LKV ad una maglia composta esclusivamente da generatori di tensione, otteniamo una sommatoria di tensioni uguagliata a zero; se ciò non è effettivamente vero, il circuito non ammette soluzioni, mentre se la relazione viene per caso verificata, il circuito ammette infinite soluzioni (l'indecisione è, in questo caso, legata al fatto che in questa maglia potrebbe circolare una corrente qualsiasi).

Ovviamente non è detto che un circuito che soddisfi le CN sia effettivamente risolubile. Se consideriamo infatti il seguente circuito:



osserviamo che i due resistori da 0,5Ω sono connessi in serie, questo significa che un circuito del tutto analogo a quello disegnato è il seguente:



Ora, vediamo che i due resistori superstiti sono collegati in parallelo, quindi il circuito disegnato equivale ad un circuito nel quale c'è un unico resistore di resistenza infinita, questo equivale ad avere, però, un generatore di corrente collegato con un circuito aperto e, come abbiamo già detto, questo è impossibile. In base a quanto visto in questo esempio possiamo dire che CS affinchè un circuito abbia soluzioni è che tutti i resistori abbiano resistenza positiva o comunque, che tutti i resistori presenti abbiano resistenza dello stesso segno.

Vediamo ora alcuni metodi di analisi delle reti (ovvero alcuni algoritmi che ci permettono di trovare la soluzione di una rete). Il primo metodo che vediamo è il metodo dell'analisi nodale (NA). Questo metodo viene applicato quando abbiamo un circuito composto solo da resistori positivi (o comunque concordi) e da generatori di corrente e che sia tale per cui il sottografo che riguarda i soli resistori presenti nel circuito sia connesso. Il primo passo nella risoluzione è quello di togliere tutti i generatori di corrente e di valutare la relazione:

$$\underline{A}\underline{i} = 0$$

dove la matrice $\underline{i}$ utilizzata contiene solo le correnti legate ai resistori. Riattaccando i generatori avrò dunque la seguente relazione:

$$\underline{A}\underline{i} = \underline{i}_S$$

dove il nuovo vettore colonna che è stato inserito tiene conto solo delle correnti legate ai generatori. Consideriamo ora la legge di Ohm che, per ogni elemento resistivo presente nella rete, ci da una relazione del tipo:

$$i_k = g_k v_k$$

(si osservi che si è preferito utilizzare le conduttanze invece che le resistenze nell'esplicitare la legge di Ohm). Tutte le relazioni di questo tipo mi permettono di costruire, complessivamente, la seguente relazione matriciale:

$$\underline{i} = \underline{G}\underline{v}$$

Combinando dunque insieme le ultime due relazioni matriciali scritte si ottiene:

$$\underline{A}\underline{G}\underline{v} = \underline{i}_S$$

Ricordiamo ora invece la LKV espressa in forma matriciale, secondo la quale:

$$\underline{v} = \underline{A}^T \underline{e}$$

Combinando ancora le ultime due relazioni matriciali scritte si ottiene:

$$\underline{A}\underline{G}\underline{A}^T \underline{e} = \underline{Y}_n \underline{e} = \underline{i}_S$$

Affinchè questo sistema di equazioni abbia soluzioni, la matrice Y deve essere invertibile, quando lo è (lo è ad esempio se sono verificate le CN e la CS che abbiamo premesso), infatti, si ottiene:

$$\underline{e} = \underline{Y}_n^{-1} \underline{i}_S$$

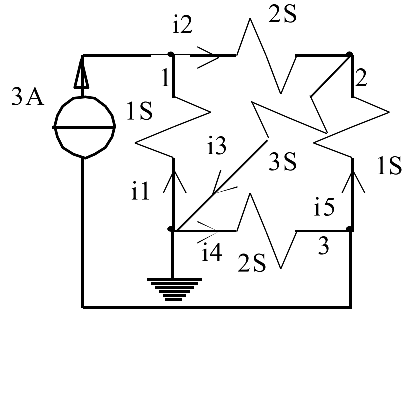
Una volta trovato il vettore colonna dei potenziali, posso utilizzarlo per ricavare le tensioni, sfrutto infatti la relazione:

$$\underline{v} = \underline{A}^T \underline{e}$$

Infine, una volta trovate le tensioni, posso ricavare le correnti usando la relazione:

$$\underline{i} = \underline{G}\underline{v}$$

A questo punto il circuito è risolto. Vediamo un esempio pratico di utilizzo di questo metodo sfruttando il seguente circuito:



E’ importante specificare che le tensioni relative ai vari bipoli, che in figura non sono state rappresentate per una questione di spazio, sono intese prese con la convenzione degli utilizzatori e quindi sempre controverse rispetto alle correnti che, invece, sono rappresentate nello schema. Applichiamo dunque la LKC ai nodi 1, 2 e 3 del circuito ottenendo le tre seguenti relazioni:

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 = 3 \\ -i_2 + i_3 - i_5 = 0 \\ -i_4 + i_5 = -3 \end{cases}$$

Abbiamo in questo modo esplicitato, per questo circuito, la relazione matriciale:

$$\underline{A}\underline{i} = \underline{i}_S$$

Esplicitiamo ora le leggi di Ohm relative ai cinque resistori del circuito:

$$\begin{cases} i_1 = g_1 v_1 = g_1(-e_1) = -e_1 \\ i_2 = g_2 v_2 = g_2(e_1 - e_2) = 2e_1 - 2e_2 \\ i_3 = g_3 v_3 = g_3 e_2 = 3e_2 \\ i_4 = g_4 v_4 = g_4 e_3 = 2e_3 \\ i_5 = g_5 v_5 = g_5(e_3 - e_2) = e_3 - e_2 \end{cases}$$

Abbiamo in questo modo esplicitato per questo circuito la relazione matriciale:

$$\underline{i} = \underline{G}\underline{v}$$

Sostituiamo ora il secondo insieme di relazioni nel primo insieme, ottenendo:

$$\begin{cases} e_1 + 2e_2 - 2e_2 = 3 \\ 2e_2 - 2e_1 + 3e_2 - e_3 + e_2 = 0 \\ 2e_3 + e_3 - e_2 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3e_1 - 2e_2 = 3 \\ -2e_1 + 6e_2 - e_3 = 0 \\ -e_2 + 3e_3 = -3 \end{cases}$$

Abbiamo in questo modo esplicitato per questo circuito la relazione matriciale:

$$\underline{Y}_n \underline{e} = \underline{i}_S$$

Esplicitando quest’ultima relazione in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Si osservi come la matrice Y che risulta in questo caso sia simmetrica e quindi invertibile. Osserviamo che c’è un modo molto rapido per compilare la matrice Y: gli elementi sulla diagonale principale sono infatti ottenuti semplicemente sommando i valori numerici della conduttanza dei bipoli che afferiscono al nodo titolare della riga (la riga 1 riguarda il nodo 1, la 2 il 2 etc…), per compilare la matrice negli elementi fuori dalla diagonale principale si prende l’elemento di matrice caratterizzato dagli indici i e j, si guarda il ramo che collega i nodi i e j, si prende il valore di conduttanza presente su quel ramo e lo si cambia di segno.

Metodo dell'analisi nodale. Metodo della tabella sparsa. Metodo dell'analisi nodale modificata.

Nell'ultima lezione abbiamo descritto un metodo risolutivo detto metodo dell'analisi nodale; tale metodo di risoluzione si basava sulla seguente terna di relazioni matriciali:

$$\underline{A}\underline{i} = \underline{i}_S \qquad \underline{v} = \underline{A}^T \underline{e} \qquad \underline{i} = \underline{G}\underline{v}$$

Come abbiamo già visto, la combinazione di queste tre relazioni (che esprimono, rispettivamente, le LKC, le LKV e le leggi di Ohm) ci porta alla seguente equazione matriciale:

$$\underline{A}\underline{G}\underline{A}^T \underline{e} = \underline{i}_S$$

Da questa relazione, infine, posto che il determinante della matrice Y non sia nullo, si ottiene:

$$\underline{e} = \left(\underline{A}\underline{G}\underline{A}^T\right)^{-1} \underline{i}_S$$

Si è così risolto il problema. Per come, però, è stato presentato, il metodo dell'analisi nodale è molto macchinoso (cosa comprensibile pensando che è stato pensato per il calcolatore) e, soprattutto, è molto riduttivo perché ci permette di gestire solo circuiti che contengono resistori e generatori di corrente. Vediamo allora un modo diverso di esprimere il metodo dell'analisi nodale. Invece di partire dalle tre relazioni matriciali prima viste, si parta dalle seguenti tre:

$$\underline{Q}\underline{i} = \underline{i}_S \qquad \underline{v} = \underline{Q}^T \underline{v}_A \qquad \underline{i} = \underline{G}\underline{v}$$

Si osservi, in primo luogo, come la relazione che esprime le leggi di Ohm non sia cambiata non essendo una relazione topologica. Da queste tre relazioni, tramite una combinazione molto simile a quella precedente, si arriva alla seguente relazione matriciale:

$$\underline{Q}\underline{G}\underline{Q}^T \underline{v}_A = \underline{i}_S$$

Anche in questo caso possiamo, sotto certe condizioni, esplicitare la relazione rispetto alla matrice colonna delle tensioni di albero e ottenere la seguente relazione risolutiva del circuito:

$$\underline{v}_A = \left(\underline{Q}\underline{G}\underline{Q}^T\right)^{-1} \underline{i}_S$$

Giunti a questo punto consideriamo le tre relazioni duali rispetto alle tre relazioni che abbiamo preso per esprimere in modo diverso l'analisi nodale; si avrà dunque:

$$\underline{i} = \underline{B}^T \underline{i}_C \qquad \underline{B}\underline{v} = \underline{v}_0 \qquad \underline{v} = \underline{R}\underline{i}$$

Osserviamo che, esplicitando la legge di Ohm rispetto alla resistenza R e utilizzando questa terna di equazioni invece di quelle precedenti, stiamo considerando un metodo duale rispetto al metodo dell'analisi nodale che mi permette di gestire delle reti che contengono solo resistori e generatori di tensione (con il metodo dell'analisi nodale si potevano gestire circuiti composti solo da resistori e generatori di corrente). Sfruttando queste tre relazioni si arriva alla seguente espressione matriciale:

$$\underline{B}\underline{v} = \underline{B}\underline{R}\underline{i} = \underline{v}_0$$

dalla quale si potrà ricavare l'espressione:

$$\underline{B}\underline{R}\underline{B}^T \underline{i}_C = \underline{v}_0$$

Da quest'ultima relazione possiamo ricavare il vettore delle correnti di coalbero:

$$\underline{i}_C = \left(\underline{B}\underline{R}\underline{B}^T\right)^{-1} \underline{v}_0$$

Ora che abbiamo trovato un sistema che mi permette di gestire anche i circuiti che contengono generatori di tensione (purché non ci siano però dei generatori di corrente), andiamo a generalizzare ulteriormente il discorso. Torniamo dunque ad esprimere le leggi di Kirchhoff tramite le due seguenti espressioni matriciali:

$$\underline{A}\underline{i} = 0 \qquad \underline{v} = \underline{A}^T \underline{e}$$

Per quanto riguarda, invece, le leggi di Ohm relative ai bipoli, invece di esprimerle nella solita forma vediamo come queste si possano generalizzare; se consideriamo, infatti, un singolo bipolo e supponiamo che questo sia caratterizzato dalla relazione:

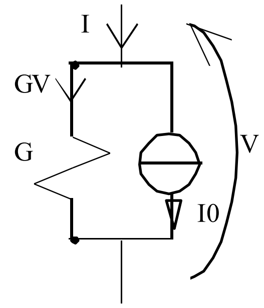
$$i = gv + i_0$$

vediamo come questa relazione costitutiva vada bene sia se il bipolo in questione è un resistore, sia se il bipolo è un generatore di corrente (nel qual caso G sarà nulla), sia se il bipolo è un collegamento in parallelo tra un generatore di corrente e un resistore. Abbiamo dunque trovato una forma più generica per esprimere la relazione costitutiva di un bipolo, infatti questa relazione si riferisce ad un bipolo che è genericamente mostrato nella prima figura della pagina seguente. Per l'intero circuito, la singola relazione prima vista viene generalizzata nella seguente espressione matriciale:

$$\underline{i} = \underline{G}\underline{v} + \underline{i}_0$$

Combinando dunque quest'ultima espressione matriciale con l'espressione matriciale che mi esprimeva la legge di Kirchhoff ai nodi, si ottiene la seguente equazione:

$$\left(\underline{A}\underline{G}\underline{A}^T\right)\underline{e}+\underline{A}\underline{i}_0=0$$



Dall'ultima relazione scritta si può ricavare come segue il vettore delle tensioni :

$$\underline{e}=-\left(\underline{A}\underline{G}\underline{A}^T\right)^{-1}\underline{A}\underline{i}_0$$

In questo modo abbiamo evitato il passaggio concettuale, che si era incontrato descrivendo il metodo dell'analisi nodale, che consisteva nello staccare i generatori per poi ricollegarli subito dopo introducendo il vettore delle correnti imposte dai generatori. Se combiniamo, ora, l'ultima relazione scritta con l'equazione matriciale che esprimeva la legge di Kirchhoff alle correnti otteniamo la relazione:

$$\underline{V}=\underline{A}^T\underline{e}=-\underline{A}^T\left(\underline{A}\underline{G}\underline{A}^T\right)^{-1}\underline{A}\underline{i}_0$$

Possiamo dunque trovare una relazione che esprime le correnti del circuito in funzioni delle correnti imposte dai generatori, infatti, sostituendo l'ultima relazione trovata nella relazione matriciale che esprimeva le leggi di Ohm, si ottiene:

$$\underline{i}=-\underline{G}\underline{A}^T\left(\underline{A}\underline{G}\underline{A}^T\right)^{-1}\underline{A}\underline{i}_0+\underline{i}_0=\left[\underline{I}-\underline{G}\underline{A}^T\left(\underline{A}\underline{G}\underline{A}^T\right)^{-1}\underline{A}\right]\underline{i}_0$$

dove $\underline{I}$ è la matrice identità. Siamo ora dunque in grado di gestire reti che presentino resistori ed un solo tipo di generatori; un circuito di questo tipo ha come caratteristica una retta del piano e quindi la sua relazione costitutiva potrà essere espressa tramite la relazione:

$$v=Ri+v_0$$

oppure tramite la relazione:

$$i=Gv+i_0$$

Queste due formulazioni prendono rispettivamente il nome di teorema di Thevenin e di teorema di Norton. Le due ultime relazioni scritte possono essere condensate nell'unica relazione seguente:

$$mv+ni+k_0=0$$

Un qualsiasi generatore che, in un circuito, fa parte di un lato descritto da una delle ultime tre relazioni scritte, si chiama generatore accompagnato; se ogni generatore presente nel circuito è un generatore accompagnato e tutti i resistori del circuito hanno resistenza di segno concorde, allora il circuito ammette sicuramente soluzione.

Torniamo ora alle relazioni matriciali scritte in precedenza e osserviamo come la matrice $\underline{A}$ sia una matrice di rango massimo; ciò fa si che l'invertibilità della matrice $\underline{Y}$ dipenda solo dalla matrice $\underline{G}$. Vediamo dunque come è fatta questa matrice $\underline{G}$. Gli elementi di tale matrice sono le g che appaiono nelle singole relazioni del tipo:

$$i_k=g_k v_k$$

Possiamo dunque affermare che la matrice $\underline{G}$ è una matrice diagonale, infatti le singole equazioni del tipo dell'ultima scritta possono essere messe assieme in un sistema che, esplicitato in forma matriciale, sarà del tipo:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_1 v_1 \\ g_2 v_2 \\ \dots \\ g_3 v_3 \end{bmatrix}$$

Affinché la matrice $\underline{G}$ sia sicuramente invertibile, dovrà avere tutti gli elementi sulla diagonale principale diversi da zero; questo significherà che ci deve essere un resistore per ogni lato e che quindi tutti i generatori presenti nel circuito siano accompagnati; inoltre, la matrice $\underline{G}$ deve essere definita positiva, ovvero tutte le g devono avere lo stesso segno.

Cerchiamo ora di trovare un metodo che mi permetta di gestire anche delle reti che contengano, oltre ai resistori, entrambi i tipi di generatori. Questa ricerca ci porterà ad analizzare due metodi risolutivi: il metodo della tabella sparsa (STA) e il metodo dell'analisi nodale modificata (MNA).

Soffermiamoci dunque, per prima cosa, sul metodo della tabella sparsa (Sparse Tableau method). Questo è un metodo che si basa sulla forza bruta in quanto prevede di utilizzare tutte le equazioni che si possono estrarre dal circuito e di risolvere il sistema complessivo. Ci si basa dunque sulle leggi di Kirchhoff alle correnti, espresse in forma matriciale come segue:

$$\underline{A}\,\underline{i} = 0$$

Si considerano poi le LKV, espresse in forma matriciale tramite la relazione:

$$\underline{v} - \underline{A}^T \underline{e} = 0$$

e, infine, si considerano le leggi di Ohm relativa ai vari bipoli facenti parte del circuito espresse nella loro forma implicita che originano la seguente relazione matriciale:

$$\underline{M}\,\underline{v} + \underline{N}\,\underline{i} = \underline{U}_0$$

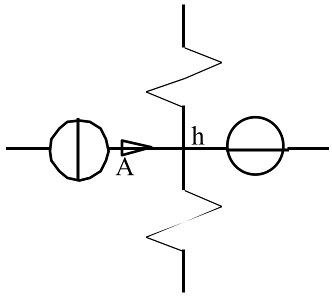
Mettendo insieme queste tre relazioni matriciali si ottiene il seguente sistema risolutivo:

$$\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{A} & \underline{0} \\ \underline{I} & \underline{0} & -\underline{A}^T \\ \underline{M} & \underline{N} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{i} \\ \underline{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{U}_0 \end{bmatrix}$$

Ogni elemento di questa relazione matriciale è, a sua volta, una matrice; questo può far intuire quale sia il problema associato a questo metodo di risoluzione: l'eccessivo numero di equazioni e di incognite da gestire.
Il secondo metodo sul quale ci soffermiamo è il metodo dell'analisi nodale modificata (Modified Nodal Analisys). Consideriamo dunque una rete che contenga solo resistori, generatori di corrente e un generatore di tensione. La presenza di questo unico generatore di tensione rende inutilizzabile il metodo della normale analisi nodale poiché per il generatore di tensione non è possibile considerare una relazione costitutiva che leghi la corrente passante nel generatore alla sua tensione. Per risolvere questo problema, come vedremo nella prossima lezione, aggiungeremo alle incognite che avrei utilizzando l'analisi nodale, la corrente che passa per tale generatore di tensione. Aver aggiunto un'incognita mi impone, però, di trovare anche una ulteriore equazione, altrimenti il numero delle incognite supererebbe il numero delle equazioni e il problema non sarebbe univocamente risolubile.

Metodo dell'analisi nodale modificata.

Nell'ultima lezione abbiamo solamente accennato al metodo dell'analisi nodale modificata che permette di gestire reti che presentino resistori e generatori di entrambi i tipi, vediamo ora più in dettaglio in che cosa consiste tale metodo. Riferiamoci dunque al nodo h indicato nella figura seguente al quale afferiscono due resistori, un generatore ideale di corrente e un generatore ideale di tensione:



Applicando a tale nodo la LKC, si otterrà (detto k il numero di bipoli che afferiscono al nodo) una relazione del tipo:

$$\sum_k i_k = 0$$

Se al nodo h afferissero solo dei bipoli resistivi sarebbe possibile combinare l'ultima relazione scritta con le equazioni di Ohm relative ad ogni resistore k-esimo; questo ci permetterà di riscrivere la precedente sommatoria nel modo seguente:

$$\sum_k g_k \left(e_i - e_j\right) = 0$$

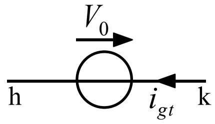
Se, invece, al nodo h, oltre ai resistori, afferissero anche dei generatori di corrente, la relazione precedentemente scritta dovrebbe essere completata con la sommatoria delle correnti imposte dai generatori di corrente, si dovrebbe quindi avere (supposto che al nodo afferissero k resistori ed n generatori di corrente):

$$\sum_k g_k \left(e_i - e_j\right) + \sum_n A_n = 0$$

Siccome, però, al nodo h afferisce anche un generatore di tensione, la LKC applicata a tale nodo deve contenere anche la corrente che proviene da tale bipolo; da quanto visto nelle lezioni e nelle esercitazioni precedenti, però, sappiamo che la corrente che circola su un generatore di tensione è sempre incognita; sarà dunque necessario introdurre nella sommatoria un'incognita in più, la corrente che attraversa il generatore di tensione; si avrà dunque:

$$\sum_k g_k \left(e_i - e_j\right) + \sum_n A_n + i_{gt} = 0$$

dove, con il pedice "gt", si indica il generatore di tensione. Ci rendiamo dunque conto che, se prima avevamo come incognite solo i potenziali *e* che stavano ai nodi, ora dobbiamo introdurre come incognita anche la corrente sul generatore di tensione. Siccome, però, abbiamo introdotto un'incognita in più, dobbiamo introdurre anche una ulteriore equazione: se dunque il generatore di tensione inserito nella rete fosse il seguente:



L'equazione in più che dovremmo utilizzare sarebbe la seguente:

$$e_h - e_k = v_0$$

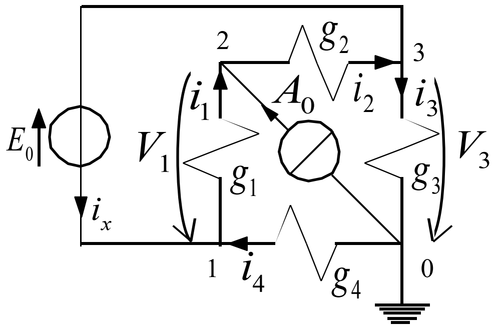
Vediamo un esempio pratico nel quale si utilizza il metodo risolutivo dell'analisi nodale modificata per risolvere il circuito rappresentato nella prima figura della pagina seguente.

Come prima cosa applichiamo la LKC ai nodi 1, 2 e 3, ottenendo, rispettivamente, le seguenti tre relazioni:

$$\begin{cases} i_1 - i_4 - i_x = 0 \\ -i_1 + i_2 = A_0 \\ -i_2 - i_3 + i_x = 0 \end{cases}$$

Esprimiamo ora le correnti presenti nel circuito in funzione delle tensioni; per far questo dovremo esplicitare la legge di Ohm relativa ad ogni singolo resistore e combinare queste relazioni con le espressioni delle tensioni in funzione dei potenziali, ricavate dalle LKV; complessivamente si otterrà il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} i_1 = g_1 v_1 = g_1(e_1 - e_2) \\ i_2 = g_2 v_2 = g_2(e_2 - e_3) \\ i_3 = -g_3 e_3 \\ i_4 = -g_4 e_1 \end{cases}$$



Si aggiunge ora l'equazione che esprime la presenza del generatore di tensione:

$$e_3 - e_1 = E_0$$

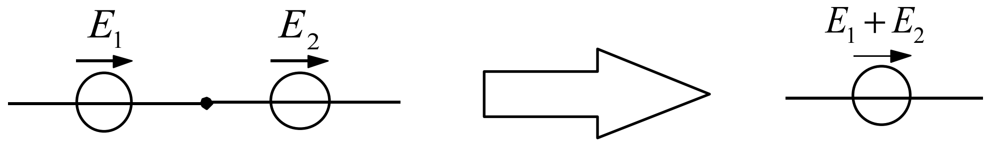
Complessivamente, dunque, si dovrà risolvere il seguente sistema espresso in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} g_1 + g_4 & -g_1 & 0 & -1 \\ -g_1 & g_1 + g_2 & -g_2 & 0 \\ 0 & -g_2 & g_2 + g_3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ i_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_0 \\ 0 \\ E_0 \end{bmatrix}$$

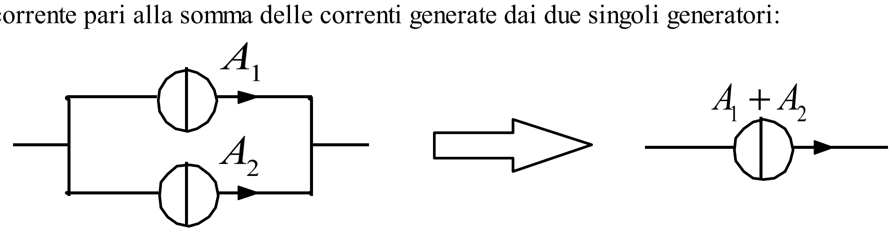
Si osservi come la prima parte della matrice quadrata (in particolare le prime tre righe e le prime tre colonne) possa essere costruita con il medesimo trucchetto di cui avevamo già parlato per costruire la matrice nel metodo dell'analisi nodale. Complessivamente la matrice è risultata una matrice simmetrica ma questa è una particolarità di questo esempio.

Concludiamo questa lezione occupandoci di particolari collegamenti in serie ed in parallelo dei bipoli che conosciamo. Già durante l'esercitazione numero 2 avevamo visto che la serie di un generatore di corrente e di un resistore è perfetta mente equivalente al solo generatore di corrente poiché la tensione sul generatore è ignota e non ha importanza quale sia la tensione sul resistore; un discorso analogo era stato fatto per la configurazione duale, ovvero per il collegamento in parallelo tra un generatore di tensione ed un resistore. E' dunque possibile non considerare i resistori in queste configurazioni a meno che, ovviamente, non siano richieste correnti e tensioni proprio su quei resistori oppure non sia richiesto un bilancio di potenze. Altre configurazioni significative sono le seguenti:

- collegamento in serie di due generatori di tensione: un tale bipolo è equivalente ad un unico generatore di tensione che generi una tensione pari alla somma delle tensioni generate dai due singoli generatori:

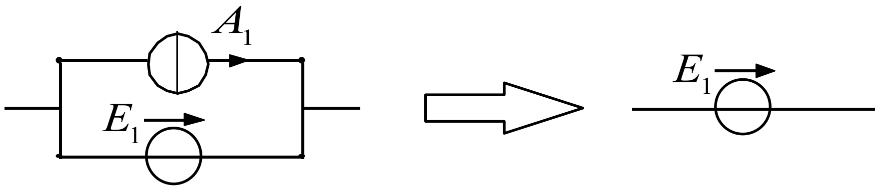


- collegamento in parallelo di due generatori di corrente: un tale bipolo è equivalente ad un unico generatore di corrente che generi una corrente pari alla somma delle correnti generate dai due singoli generatori:



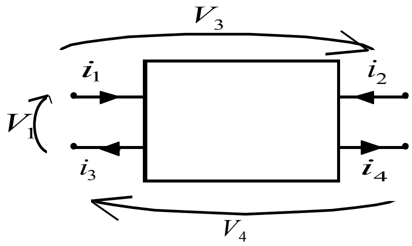
- collegamento in serie di un generatore di corrente e di un generatore di tensione: un tale bipolo è equivalente ad un unico generatore di corrente essendo il generatore di tensione ininfluente nel determinare la corrente che fuoriesce dal bipolo (si veda la figura nella pagina seguente);
- collegamento in parallelo di un generatore di tensione e di un generatore di corrente: un tale bipolo è equivalente ad un unico generatore di tensione essendo il generatore di corrente ininfluente nello stabilire la tensione che si ha ai morsetti di tale bipolo:


E1
A1
A1

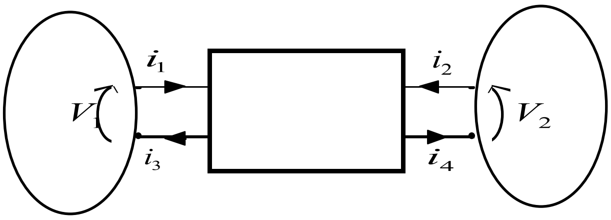

A1
E1
E1

Doppi bipoli: rappresentazioni matriciali. Generatori dipendenti.

Fino ad oggi abbiamo sempre parlato di reti composte esclusivamente da bipoli. In realtà i bipoli sono casi particolari di multiporta con un'unica porta (ogni porta elettrica è formata da due morsetti). Generalizziamo ora il discorso ai multiporta soffermandoci, in particolare, sui multiporta con due sole porte: i doppi bipoli. Graficamente un doppio bipolo viene indicato con il seguente simbolo:



A priori, applicando le leggi di Kirchhoff al doppio bipolo, potremmo pensare che questo oggetto presenti tre tensioni indipendenti (ci sono infatti quattro tensioni delle quali una risulterà combinazione delle altre) e tre correnti indipendenti. Già però collegando il doppio bipolo in questione ad una rete qualsiasi, come mostrato nell'immagine seguente:



ci si accorge, sempre utilizzando le leggi di Kirchhoff, come valgano le due seguenti relazioni tra le correnti:

$$\begin{cases} i_1 = i_3 \\ i_2 = i_4 \end{cases}$$

E' importante precisare che i versi che appaiono nelle due precedenti figure sono quelli concordi con la convenzione presa solitamente. Oltre al legame già visto tra le correnti, però, esistono dei legami anche tra le correnti e le tensioni, esattamente come per i bipoli per i quali valeva la legge di Ohm. Nel caso dei doppi bipoli, ovviamente, le variabili in gioco sono 4 (due tensioni e due correnti) e quindi non basterà un'unica equazione, ne serviranno due. Molto genericamente tali due equazioni saranno del tipo:

$$\begin{cases} f_1(i_1, v_1, i_2, v_2) = 0 \\ f_2(i_1, v_1, i_2, v_2) = 0 \end{cases}$$

Le funzioni implicite come quelle che appaiono in tale sistema sono solitamente abbastanza complicate da gestire; dobbiamo dunque trovare della altre funzioni più facilmente utilizzabili; si considererà dunque il sistema seguente:

$$\begin{cases} i_1 = f_1(v_1, v_2) \\ i_2 = f_2(v_1, v_2) \end{cases}$$

Si noti che si sta facendo un discorso perfettamente analogo a quello in precedenza fatto per i bipoli. Parlando dei bipoli, infatti, si era detto come una funzione implicita del tipo:

$$f(i, v) = 0$$

fosse praticamente ingestibile e la si era sostituita con le due formulazioni alternative che esprimevano il bipolo come controllato in corrente piuttosto che in tensione:

$$v = Ri$$
$$i = Gv$$

Nell'analisi di reti composte da molti resistori, utilizzando la notazione che caratterizza il controllo in tensione, si arrivava a rappresentazioni matriciali del tipo:

$$\underline{i} = \underline{\underline{G}}\,\underline{v}$$

dove la matrice $\underline{G}$ era del tipo:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & g_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & g_n \end{bmatrix}$$

E' importante sottolineare come tale matrice sia diagonale. Proviamo ora a pensare ad una matrice $\underline{G}$ completa (per facilità la penseremo di ordine 2); la relazione matriciale precedentemente scritta assumerà dunque la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

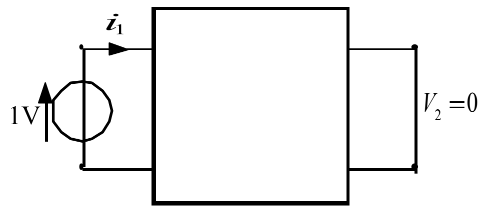
Esplicitando questa relazione matriciale in forma di sistema di equazioni si otterrà:

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2 \\ i_2 = g_{21}v_1 + g_{22}v_2 \end{cases}$$

Questo sistema è del medesimo tipo di quello scritto in precedenza per esprimere la relazione tra correnti e tensioni per il doppio bipolo. A questo punto diventa naturale pensare al bipolo come ad un caso particolare di multiporta con un'unica porta e per il quale la matrice $\underline{G}$ risulti diagonale. Dobbiamo ora trovare un modo per ricavare i termini g che appaiono come elementi della matrice $\underline{G}$. Un primo metodo che possiamo usare è quello detto "metodo delle prove semplici". Questo metodo parte dal fatto che, per esempio, il primo elemento della matrice $\underline{G}$ si può ricavare, posta nulla la tensione alla porta numero 2, tramite la relazione:

$$g_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0}$$

A livello pratico, fare questo significa cortocircuitare la porta numero 2 del doppio bipolo (in modo da ottenere che la tensione a quella porta sia nulla), collegare la porta numero 1 con un generatore di tensione in modo da fissare la tensione alla porta 1 (solitamente si usa un generatore di tensione da 1V in modo da avere numeri semplici), misurare la corrente che scorre nella porta numero 1, operare il precedente rapporto e ricavare il valore di g (si veda la seguente figura).



Per ricavare il secondo termine della diagonale principale si userà la relazione:

$$g_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{v_1=0}$$

Questo significa dover fare un lavoro identico a quello fato precedentemente, cortocircuitando, però, questa volta la porta numero 1 e mettendo il generatore di tensione alla porta numero 2. Per ricavare i termini fuori dalla diagonale il procedimento sarà un procedimento analogo nel quale sarà però necessario considerare dei circuiti aperti (perché si dovrà imporre nulla la corrente e non la tensione, e lavorare con dei generatori di corrente. Il metodo delle prove semplici è dunque un metodo macchinoso e, nel caso di multiporta con tante porte, molto lungo. Prima di vedere il secondo metodo che permette lo studio dei doppi bipoli dobbiamo parlare delle altre rappresentazioni matriciali possibili per i doppi bipoli. Parlando dei bipoli si era visto come la rappresentazione matriciale che sfrutta la matrice $\underline{G}$ mi permetta facilmente di arrivare alla rappresentazione matriciale che sfrutta la matrice $\underline{R}$; si aveva infatti:

$$\underline{v} = \underline{G}^{-1}\underline{i} = \underline{R}\underline{i}$$

Un discorso analogo si potrà fare anche per il caso dei doppi bipoli anche se sarà necessario introdurre alcune specifiche ulteriori. Nel caso dei bipoli semplici, infatti, la matrice $\underline{G}$ è, come si è detto, una matrice diagonale e quindi, in quanto tale, è sempre invertibile; questo significa che nel caso dei bipoli l'esistenza della rappresentazione $\underline{G}$ implica sempre l'esistenza della rappresentazione $\underline{R}$. Nel caso dei doppi bipoli, invece, essendo $\underline{G}$, una matrice completa, è anche possibile che tale matrice sia singolare, questo la renderebbe non invertibile e questo, a sua volta, renderebbe impossibile la rappresentazione $\underline{R}$. Affinchè tale rappresentazione esista, dunque, la matrice $\underline{G}$ non deve essere singolare. Oltre alle rappresentazioni $\underline{G}$ ed $\underline{R}$, che sono le rappresentazioni in funzione, rispettivamente, della tensione e della corrente, esistono delle rappresentazioni ibride (caratterizzate dalle matrici ibride $\underline{H}$ e $\underline{H}'$) e delle rappresentazioni dette rappresentazioni di trasferimento (caratterizzate dalle matrici di trasferimento $\underline{T}$ e $\underline{T}'$). Riportiamo, dunque, nel seguito, le 6 possibili rappresentazioni matriciali che caratterizzano un doppio bipolo:

$$\text{a)}\ \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underline{G}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underline{R}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)}\ \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underline{H}\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \text{d)}\ \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underline{H}^{1}\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{e)}\ \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underline{T}\begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \qquad \text{f)}\ \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \underline{T}^{1}\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

Da notare il segno meno che appare nelle rappresentazioni e) ed f) e che è dovuto semplicemente alla tradizione. Le 6 rappresentazioni matriciali che abbiamo elencato (alle quali sono stati tolti i vettori di costanti che in teoria le accompagnano) sono le rappresentazioni possibili per un doppio bipolo, non è però detto che un particolare doppio bipolo le ammetta tutte e 6 (abbiamo visto in precedenza come sia possibile, per esempio, che un doppio bipolo non ammetta la rappresentazione $\underline{R}$). Una rappresentazione matriciale che invece esiste sempre per un doppio bipolo è la rappresentazione implicita che avrà il seguente aspetto:

$$\underline{M}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \underline{N}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Da tale rappresentazione è possibile ricavare la rappresentazione $\underline{G}$ (detta anche rappresentazione parallelo) e la rappresentazione $\underline{R}$ (detta anche rappresentazione serie), si avrà, infatti:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -\underline{M}^{-1}\underline{N}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underline{R}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \text{ e quindi è: } \underline{R} = -\underline{M}^{-1}\underline{N}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = -\underline{N}^{-1}\underline{M}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underline{G}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \text{ e quindi è: } \underline{G} = -\underline{N}^{-1}\underline{M}$$

Dunque appare evidente come l'esistenza delle rappresentazioni $\underline{R}$ e $\underline{G}$ dipenda dall'invertibilità delle matrici $\underline{M}$ ed $\underline{N}$. Per ottenere le due rappresentazioni ibride si deve modificare la rappresentazione implicita in modo da ottenere:

$$\underline{M}_1\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \underline{N}_1\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Le matrici ibride si otterranno allora nel modo seguente:

$$\underline{H} = -\underline{M}_1^{-1}\underline{N}_1$$
$$\underline{H}^{1} = -\underline{N}_1^{-1}\underline{M}_1$$

Con riferimento alle matrici $\underline{M}$ ed $\underline{N}$ originali, le nuove matrici dei coefficienti saranno:

$$\underline{M}_1 = \begin{bmatrix} m_{11} & n_{12} \\ m_{21} & n_{22} \end{bmatrix}, \ \underline{N}_1 = \begin{bmatrix} n_{11} & m_{12} \\ n_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

Per ottenere le due rappresentazioni di trasmissione si deve invece modificare la rappresentazione implicita in modo da ottenere:

$$\underline{M}_2\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} + \underline{N}_2\begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Le matrici di trasmissione si otterranno allora nel modo seguente:

$$\underline{T} = -\underline{M}_2^{-1}\underline{N}_2$$
$$\underline{T}^{1} = -\underline{N}_2^{-1}\underline{M}_2$$

Con riferimento alle matrici $\underline{M}$ ed $\underline{N}$ originali, le nuove matrici dei coefficienti saranno:

$$\underline{M}_2 = \begin{bmatrix} m_{11} & n_{11} \\ m_{21} & n_{21} \end{bmatrix}, \ \underline{N}_2 = \begin{bmatrix} m_{12} & -n_{12} \\ m_{22} & -n_{22} \end{bmatrix}$$

Dunque il secondo metodo per risolvere un doppio bipolo consiste nel trovare le due matrici $\underline{M}$ ed $\underline{N}$; una volta trovate tali matrici si possono trovare tutte le rappresentazioni possibili per il doppio bipolo in questione. Si osservi che, per ricavare le varie matrici dei coefficienti che mi permettono di ricavare tutte le varie rappresentazioni, non si deve far altro che rimescolare in modo opportuno le colonne delle due matrici $\underline{M}$ ed $\underline{N}$:

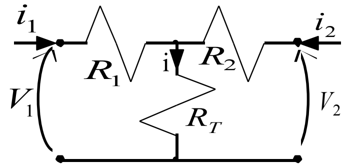
$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \downarrow C1 & \downarrow C2 \end{bmatrix}, \ \underline{N} = \begin{bmatrix} \downarrow C3 & \downarrow C4 \end{bmatrix}$$

Con riferimento alle matrici M ed N originali, le altre matrici dei coefficienti saranno:

$$\underline{M}_1 = [\downarrow C1 \quad \downarrow C4],\ \underline{N}_1 = [\downarrow C3 \quad \downarrow C2]$$

$$\underline{M}_2 = [\downarrow C1 \quad \downarrow C3],\ \underline{N}_2 = [\downarrow C2 \quad \downarrow -C4]$$

Vediamo ora un esempio pratico nel quale si risolve un doppio bipolo cercando la rappresentazione matriciale implicita. Consideriamo dunque il seguente doppio bipolo:



Osserviamo, innanzitutto, che i resistori presenti in questo doppio bipolo sono collegati secondo una configurazione non ancora vista fino ad ora, la configurazione a T, detta anche configurazione a stella. Ovviamente per risolvere questo doppio bipolo si considera che le correnti e le tensioni alle porte siano un dato del problema (in effetti dobbiamo pensare a questo doppio bipolo come ad un oggetto attaccato ad una rete e quindi tali tensioni e tali correnti vengono stabilite da tale rete). Ovviamente risulta elementare valutare la caduta di tensione sui resistori 1 e 2; si avrà infatti:

$$\begin{cases} v_{R1} = R_1 i_1 \\ v_{R2} = R_2 i_2 \end{cases}$$

Ora applichiamo una LKC al nodo al quale conferiscono i tre resistori, ottenendo:

$$i = i_1 + i_2$$

Una volta trovata tale corrente si può facilmente ricavare la caduta di tensione sul resistore centrale:

$$v_{RT} = R_T i = R_T (i_1 + i_2)$$

Ora applichiamo la LKV alle due maglie del doppio bipolo, ottenendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} v_1 - R_1 i_1 - R_T (i_1 + i_2) = 0 \\ v_2 - R_2 i_2 - R_T (i_1 + i_2) = 0 \end{cases}$$

Riscriviamo, adesso, questo sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(R_1 + R_T) & -R_T \\ -R_T & -(R_2 + R_T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Abbiamo dunque trovato la rappresentazione matriciale implicita di questo particolare doppio bipolo. Data questa rappresentazione possiamo ora trovare la matrice R, si avrà infatti:

$$\underline{R} = -\underline{M}^{-1}\underline{N} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -(R_1 + R_T) & -R_T \\ -R_T & -(R_2 + R_T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_T & R_T \\ R_T & R_2 + R_T \end{bmatrix}$$

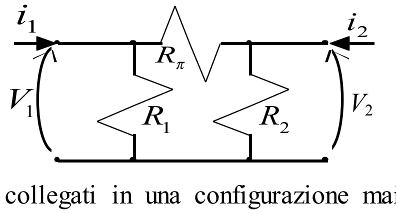
Una volta trovata la R ricaviamo anche la G come sua inversa, si avrà dunque:

$$\underline{G} = \underline{R}^{-1} = \frac{1}{(R_1 + R_T)(R_2 + R_T) - R_T^2} \begin{bmatrix} R_2 + R_T & -R_T \\ -R_T & R_1 + R_T \end{bmatrix}$$

Siccome da ora in poi potrà spesso capitare di dover invertire matrici di ordine 2, è forse utile ricordare l'apposita regola, secondo la quale:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

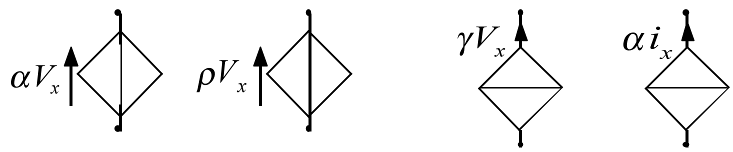
Un esempio di bipolo duale rispetto a quello precedentemente visto è il seguente:



Anche in questo caso i resistori sono collegati in una configurazione mai vista, detta configurazione π (o anche configurazione a triangolo).

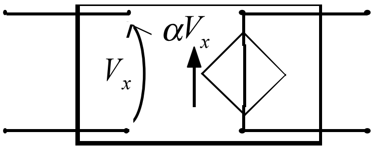
Vediamo ora ulteriori elementi che si possono trovare nelle reti oltre ai generatori di tensione, di corrente, i resistori e i diodi: i generatori dipendenti. I generatori che abbiamo visto fino ad ora si chiamano generatori indipendenti poiché la corrente o la tensione che generano non dipende da nient'altro all'infuori del generatore stesso. Un generatore di tensione dipendente è invece un generatore che genera una tensione che dipende dalla corrente (caso a) oppure dalla tensione (caso b) su un altro ramo del circuito. Analogamente un generatore di corrente dipendente è un generatore che genera una corrente che dipende dalla tensione (caso c) oppure dalla corrente (caso d) che c'è su un altro ramo del circuito. Le rappresentazioni grafiche di tali elementi sono le seguenti:

Caso (a) Caso (b) Caso (c) Caso (d)



I generatori dipendenti sono stati introdotti solo ora perché questi elementi non sono dei bipoli, i genratori dipendenti sono, in realtà, dei doppi bipoli. Una rappresentazione più precisa dei generatori dipendenti (che comunque non si trova sui disegni delle reti, è infatti la seguente:

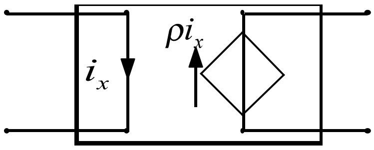
Caso (a)



VCVS

Generatore di tensione
Controllato in tensione

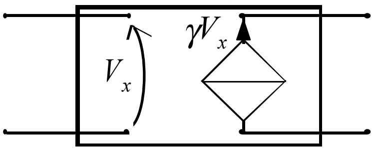
Caso (b)



CCVS

Generatore di tensione
Controllato in corrente

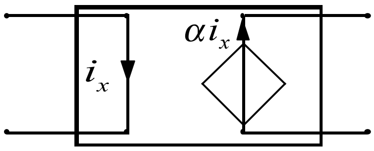
Caso (c)



VCCS

Generatore di corrente
Controllato in tensione

Caso (d)



CCCS

Generatore di corrente
Controllato in corrente

Le grandezze ρ e γ prendono rispettivamente il nome di transresistenza e di transconduttanza. Cerchiamo ora una rappresentazione matriciale per il generatore pilotato del caso (a); un'analisi della struttura ci porta innanzitutto al seguente sistema:

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_2 = \alpha v_1 \end{cases}$$

Riportando tale sistema in forma matriciale ci si accorge di aver trovato immediatamente la seconda forma ibrida; si ha infatti la matrice:

$$\underline{H}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Per tale doppio bipolo si potrebbe ricavare, ma noi non lo faremo, anche la matrice $\underline{T}$, queste due matrici sono, però, le uniche matrici esistenti per questo doppio bipolo. Siccome la matrice $\underline{G}$ non esiste, questo doppio bipolo, inserito in un circuito, rende inutilizzabile l'analisi nodale per la risoluzione del circuito stesso (sarà dunque necessaria l'MNA). L'unico generatore pilotato che ammette la rappresentazione $\underline{G}$ è il generatore rappresentato nel caso (c).

Doppi bipoli: passività.

Ricordiamo come, in un resistore lineare rappresentato con la convenzione degli utilizzatori, la potenza è espressa dalla relazione:

$$P = vi = Ri^2$$

Dunque la potenza sarà positiva se e soltanto se la resistenza R è positiva. Definiamo ora un elemento come strettamente passivo quando siano valide le seguenti relazioni:

$$P \geq 0 \quad \forall v, i \ \text{ con } P = 0 \Leftrightarrow v = 0 \wedge i = 0$$

Estendiamo dunque questo discorso anche al caso dei multiporta. Quando parliamo, per esempio, di un doppio bipolo, le grandezze scalari v ed i, vengono sostituite dai vettori colonna $\underline{v}$ e $\underline{i}$. E' però ovvio che il prodotto tra i due vettori colonna $\underline{v}$ ed $\underline{i}$ non può esistere, bisognerà infatti trasporre uno dei vettori, ottenendo:

$$\underline{v}^T \underline{i} = v_1 i_1 + v_2 i_2$$

In generale una relazione del genere vale per un multiporta qualsiasi, per il quale si avrà una sommatoria di prodotti "vi". Supponiamo ora che il doppio bipolo in questione ammetta la rappresentazione $\underline{R}$, varrà dunque una relazione del tipo:

$$\underline{v} = \underline{R}\underline{i}$$

Combinando le ultime due relazioni matriciali scritte si ottiene:

$$\underline{v}^T \underline{i} = \underline{i}^T \underline{R}^T \underline{i}$$

Dunque possiamo dire che un doppio bipolo è strettamente passivo quando vale la relazione:

$$\underline{i}^T \underline{R}^T \underline{i} \geq 0$$

Il primo membro dell'ultima relazione scritta deve essere uno scalare, questo mi giustificare nel dire che tale relazione equivale alla seguente (ottenuta trasponendo tale disuguaglianza):

$$\underline{i}^T \underline{R}\underline{i} \geq 0$$

Si sfrutterà ora un noto teorema dell'algebra lineare secondo il quale il segno del prodotto matriciale appena scritto dipende esclusivamente dalla matrice $\underline{R}$; in particolare l'ultima relazione scritta viene verificata quando la matrice $\underline{R}$ risulta essere definita positiva, ovvero quando tutti i suoi autovalori sono positivi. Dobbiamo dunque trovare un modo per stabilire se la matrice $\underline{R}$ ha tutti gli autovalori positivi o meno. Esistono sostanzialmente due modi per stabilirlo:

- Il primo metodo consiste nel calcolare effettivamente tutti gli autovalori e vedere se sono positivi o meno, questo significa risolvere la relazione:

  $$\det\left(\lambda \underline{I} - \underline{R}\right) = 0$$

  Vediamo un esempio di applicazione di questo metodo (comodo da utilizzare con le matrici piccole) in relazione alla matrice:

  $$\underline{R} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

  In questo caso l'equazione da risolvere sarà la seguente:

  $$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1) + 3 = \lambda^2 - 3\lambda + 5 = 0$$

  Gli autovalori della matrice in questione, dunque, saranno:

  $$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

  Per dire che la matrice è definita positiva dobbiamo accertarci che tutti gli autovalori siano positivi; quando gli autovalori, come in questo caso, sono dei complessi coniugati, ci soffermiamo solo sulla parte reale: in questo caso la parte reale (3) è positiva e dunque possiamo dire che la matrice è definita positiva. Se tale matrice fosse la matrice rappresentativa di un doppio bipolo potremmo dire che tale doppio bipolo è passivo.
- Un secondo metodo, da utilizzare prevalentemente nei casi di matrici grosse, si basa sul fatto che una matrice è definita positiva se è positivo l'elemento (1,1) della matrice e se sono positivi i determinanti di tutte le sottomatrici ottenute orlando ripetutamente tale elemento. Questo metodo, però, può essere utilizzato soltanto se la matrice in analisi è una matrice simmetrica; in caso contrario, prima di applicare tale metodo dobbiamo applicare il metodo di decomposizione cartesiana della matrice che trasforma la matrice $\underline{R}$ nella somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica. Tale metodo di scomposizione è definito tramite la relazione seguente:

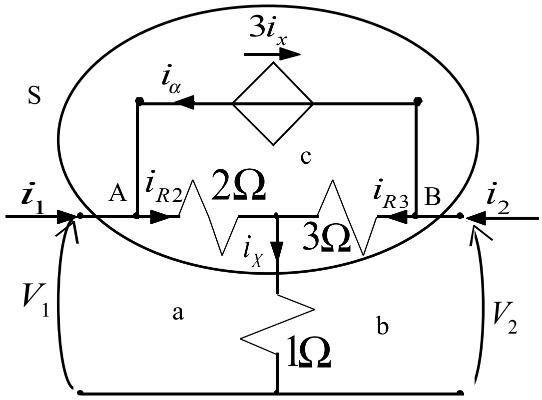
$$\underline{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \underline{R}_S + \underline{R}_A = \frac{\underline{R} + \underline{R}^T}{2} + \frac{\underline{R} - \underline{R}^T}{2} = \begin{bmatrix} r_{11} & \frac{r_{12} + r_{21}}{2} \\ \frac{r_{21} + r_{12}}{2} & r_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{r_{12} - r_{21}}{2} \\ \frac{r_{21} - r_{12}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Dopo aver fatto tale scomposizione osserviamo che a noi interessa solo il contributo della matrice simmetrica, vale infatti una relazione del tipo:

$$\underline{X}^T \underline{R}\underline{X} = \underline{X}^T (\underline{R}_S + \underline{R}_A)\underline{X} = \underline{X}^T \underline{R}_S \underline{X} + \underline{X}^T \underline{R}_A \underline{X} = \underline{X}^T \underline{R}_S \underline{X}$$

Dunque ora mi basterà studiare la sola matrice simmetrica per sapere se il doppio bipolo è passivo o meno.

Vediamo ora un esempio di analisi di doppio bipolo allo scopo di valutarne la passività o meno. Si consideri dunque il seguente doppio bipolo:



Come prima cosa tentiamo di scrivere due relazioni indipendenti. Per fare questo, come prima cosa applichiamo una LKC alla superficie indicata in figura con S, ottenendo:

$$i_x = i_1 + i_2$$

Ora applichiamo ancora la LKC ai nodi indicati in figura come A e B, ottenendo:

$$\begin{cases} i_{R2} = i_1 + i_\alpha \\ i_{R3} = i_2 - i_\alpha \end{cases}$$

Ora, tenendo conto delle tre espressioni scritte, applichiamo la LKV alle maglie indicate in figura come a,b e c, ottenendo:

$$\begin{cases} v_1 - 2(i_1 + i_\alpha) - (i_1 + i_2) = 0 \\ v_2 - 3(i_2 - i_\alpha) - (i_1 + i_2) = 0 \\ 3(i_1 + i_2) - 3(i_2 - i_\alpha) + 2(i_1 + i_\alpha) = 0 \end{cases}$$

Ricavando ora, dall'ultima relazione scritta, la corrente che circola nel generatore pilotato e sostituendo tale valore nelle due relazioni precedenti, si ottiene il seguente sistema composto dalle due relazioni indipendenti che stavamo cercando:

$$\begin{cases} v_1 - i_1 - i_2 = 0 \\ v_2 - 4i_1 - 4i_2 = 0 \end{cases}$$

Riscrivendo tale sistema in forma matriciale si ottiene la rappresentazione implicita del doppio bipolo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Ora che abbiamo trovato le matrici $\underline{M}$ ed $\underline{N}$, possiamo ricavare come segue la matrice $\underline{R}$:

$$\underline{R} = -\underline{M}^{-1} \underline{N} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Osserviamo dunque subito che la matrice $\underline{G}$ non esiste, infatti la matrice $\underline{R}$ contiene due righe proporzionali, dunque è singolare e quindi non invertibile. Avendo trovato la matrice $\underline{R}$ possiamo vedere se il doppio bipolo è passivo. Studiamo dunque la matrice $\underline{R}$ per vedere se è definita positiva; scegliamo di usare il secondo metodo, siccome però la matrice $\underline{R}$ non è simmetrica, dobbiamo prima scomporla nella somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica; nel caso in questione si otterrà:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \underline{R} = \underline{R}_S + \underline{R}_A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Studiamo ora quindi la matrice simmetrica: osserviamo innanzitutto che l'elemento (1,1) di tale matrice (1) è positivo, andiamo dunque a valutare il determinante della sottomatrice ottenuta orlando una prima volta tale elemento. Nel caso in questione tale sottomatrice coincide con la matrice complessiva; si avrà dunque:

$$\det(\underline{R}_S) = (1)(4) - \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

Siccome questo determinante risulta negativo, la matrice simmetrica non è definita positiva e quindi il bipolo in questione non è strettamente passivo. Continuiamo nell'analisi del doppio bipolo cercando le altre rappresentazioni esistenti per esso. Rimodelliamo dunque la rappresentazione implicita in modo da poter trovare le due rappresentazioni ibride; si otterrà:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Osserviamo immediatamente che le due matrici dei coefficienti sono invertibili, infatti sono delle matrici triangolari e matrici di tale tipo hanno la caratteristica di avere i propri autovalori sulla diagonale principale; vedo quindi immediatamente che tali autovalori non sono nulli e questo mi garantisce che le matrici non siano singolari e quindi siano invertibili. Possiamo dunque ricavare, tramite le seguenti relazioni, entrambe le rappresentazioni ibride:

$$\underline{H} = -\underline{M}_1^{-1}\underline{N}_1 = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\underline{H}^1 = -\underline{N}_1^{-1}\underline{M}_1 = -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Prima di vedere se esistono le rappresentazioni di trasmissione osserviamo che, in generale, per trovare questa rappresentazione, possiamo prima, non curandoci della particolare convenzione di segno che caratterizza questa rappresentazione, arrivare alla relazione:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underline{T}^*\begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Dove si è introdotta una nuova matrice definita generalmente come segue:

$$\underline{T}^* = \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* \end{bmatrix}$$

Teniamo ora conto della convenzione di segno e si avrà:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} t_{11}^* & -t_{12}^* \\ -t_{21}^* & -t_{22}^* \end{bmatrix}$$

Nel caso in analisi, dunque, possiamo rimanipolare la rappresentazione implicita fino ad ottenere la seguente relazione:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Usiamo ora le due matrici $\underline{X}$ ed $\underline{Y}$ dei coefficienti ottenendo:

$$\underline{T}^* = -\underline{X}^{-1}\underline{Y} = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}$$

Teniamo ora conto della giusta convezione di segno e ricaviamo:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Anche ad occhio si vede che la matrice T trovata non è singolare, questo significa che esiste anche la sua inversa, ovvero la seconda matrice di trasferimento:

$$\underline{T}^{1} = \frac{1}{1/4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Doppi bipoli: metodo delle prove semplici.

Prima di vedere un esempio di applicazione del metodo delle prove semplici per determinare i parametri di un doppio bipolo, occore fare una importante precisazione a proposito delle rappresentazioni matriciali di un doppio bipolo. Si è in precedenza detto che un doppio bipolo ammette sempre e sicuramente la rappresentazione implicita, in realtà le rappresentazioni implicite possibili per un doppio bipolo sono infinite; cioò si comprende pensando di moltiplicare a sinistra la rappresentazione implicita trovata per una matrice di costanti $\underline{A}$:

$$\underline{A}\left(\underline{M}\,\underline{v}+\underline{N}\underline{i}\right)=\underline{A}\underline{M}\,\underline{v}+\underline{A}\underline{N}\underline{i}=\underline{0}$$

Il sistema di equazioni che si ricava da tale espressione matriciale è ancora rappresentativo, a patto che il determinante della matrice $\underline{A}$ non sia nullo, del medesimo bipolo; siccome poi la matrice $\underline{A}$ è assolutamente arbitraria, possiamo dire che esistono infinite rappresentazioni implicite del medesimo doppio bipolo. Anche se esistono infinite rappresentazioni implicite, però, le altre rappresentazioni, se esistono, sono uniche; lo possiamo facilmente dimostrare ricavando, dalla precedente rappresentazione implicita, la corrispettiva rappresentazione serie (si osserverà che la matrice $\underline{A}$ non la influenza assolutamente):

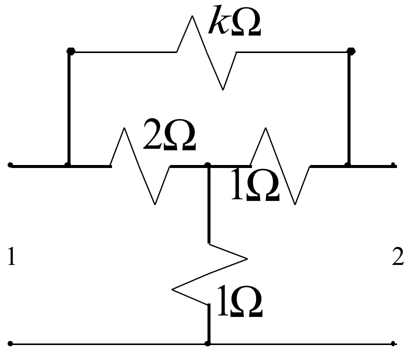
$$\underline{M}^{-1}\underline{A}^{-1}\underline{A}\underline{M}\,\underline{v}=-\underline{M}^{-1}\underline{A}^{-1}\underline{A}\underline{N}\underline{i}$$

Semplificando si ottiene nuovamente:

$$\underline{v}=-\underline{M}^{-1}\underline{N}\underline{i}$$

Un discorso assolutamente analogo può essere fatto per la rappresentazione parallelo, per le rappresentazioni ibride e per le rappresentazioni di trasmissione.

Veniamo dunque ad un esempio di utilizzo delle prove semplici. Il metodo delle prove semplici può essere pensato come un'analisi del doppio bipolo visto come una scatola nera dalla quale spuntano quattro fili, tale analisi avviene imponendo tensioni e correnti particolari e misurando sperimentalmente la risposta del doppio bipolo; il metodo delle prove semplici perde notevolmente di utilità pratica quando è già nota la struttura interna del doppio bipolo. Consideriamo comunque il seguente doppio bipolo:



Ipotizziamo che per questo doppio bipolo esiste la rappresentazione serie; questo significa che esiste un sistema tipo quello seguente:

$$\begin{cases} v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{cases}$$

Cerchiamo, per prima cosa, il parametro (1,1); questo significa usare la relazione:

$$r_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0}$$

A livello pratico questo significa lasciare aperta la porta numero 2 del doppio bipolo in modo da avere corrente nulla, applicare alla porta numero 1 un generatore di corrente prestabilita (per comodità si usa 1A), misurare in questa situazione la tensione alla porta 1 e poi fare il rapporto per trovare l'elemento (1,1). Lasciando aperta la porta 2 e ponendo il generatore di tensione alla porta 1 il circuito diventa quello rappresentato nella seguente figura (a). Si osservi dunque che la resistenza da kΩ si trova ora in serie con la resistenza orizzontale da 1Ω; sostituisco dunque tali due resistenza con una sola resistenza ad esse equivalente ottenendo la configurazione rappresentata in figura (b). La resistenza equivalente che appare avrà ovviamente il seguente valore:

$$R_{Eq1} = (k\Omega) + (1\Omega) = (k+1)\Omega$$

Questa prima resistenza equivalente appare ora collegata in parallelo con la resistenza da 2Ω, sostituisco dunque anche queste due resistenze con la loro resistenza equivalente che varrà:

$$R_{Eq2} = \left[\frac{1}{(2\Omega)} + \frac{1}{(k+1)\Omega} \right]^{-1} = \frac{2k+2}{k+3}\Omega$$

Siamo così arrivati alla configurazione di figura (c). a questo punto, nuovamente, ci troviamo con due resistenze in serie che vengono sostituite dalla rispettiva resistenza equivalente che varrà:

$$R_{Eq3} = \left(\frac{2k+2}{k+3}\Omega \right) + (1\Omega) = \frac{3k+5}{k+3}\Omega$$

Siamo così infine giunti alla configurazione di figura (d). Proprio sfruttando questa configurazione ricaviamo la caduta di tensione sulla terza resistenza equivalente, che sarà:

$$v_{R_{Eq3}} = R_{Eq3}(1A) = \left(\frac{3k+5}{k+3}\Omega \right)(1A) = \frac{3k+5}{k+3}V$$

Applicando ora una LKV alla maglia del circuito di figura (d) si osserva che la tensione appena calcolata coincide con la tensione alla porta 1, la stessa tensione apparirà anche nella figura (a); si avrà dunque:

$$v_{R_{Eq3}} = v_1 = \frac{3k+5}{k+3}V$$

Ora conosco sia la corrente (da me imposta) che la tensione alla porta 1, posso dunque calcolare il parametro (1,1) come segue:

$$r_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{3k+5}{k+3}$$

Si osservi dunque che, affinchè tale parametro esista, k deve essere diverso da –3. Cerchiamo ora il parametro (2,1), dovremo dunque utilizzare la relazione:

$$r_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

A livello pratico questo significa lasciare ancora aperta la porta numero 2 del doppio bipolo in modo da avere corrente nulla, applicare ancora alla porta numero 1 un generatore di corrente prestabilita (per comodità si usa 1A), misurare in questa situazione la tensione alla porta 2 e poi fare il rapporto per trovare l'elemento (2,1). Come possiamo capire facilmente dalla figura (b), la corrente che passa nel resistore verticale sarà di 1A; ciò significa che la caduta di tensione su tale resistore sarà:

$$v_{R1} = R_1(1A) = (1\Omega)(1A) = 1V$$

Ora che conosciamo la tensione alla porta 1 e la tensione sul resistore 1, possiamo applicare una LKV alla maglia esterna del circuito di figura (b) e ricavare la caduta di tensione sul primo resistore equivalente:

$$v_{R_{eq1}} = v_1 - v_{R1} = \left(\frac{5+3k}{k+3}V \right) - (1V) = \frac{2+2k}{k+3}V$$

Ora che conosco tale tensione si può facilmente ricavare la corrente che circola nel primo resistore equivalente:

$$i_{R_{eq1}} = \frac{v_{R_{Eq1}}}{R_{eq1}} = \frac{2+2k}{(k+3)(k+1)}A$$

Tornando alla figura (a) ci accorgiamo che tale corrente è la stessa che attraversa il resistore orizzontale da 1Ω. Possiamo dunque ora valutare la caduta di tensione su tale resistore:

$$v_{R2} = (1\Omega) i_{R_{Eq1}} = \frac{2+2k}{(k+3)(k+1)}V$$

Giunti a questo punto, sempre facendo riferimento alla figura (a), possiamo applicare una LKV alla maglia a ottenendo la tensione sulla porta numero 2:

$$v_2 = v_{R1} + v_{R2} = \frac{5+k}{3+k}V$$

Ora abbiamo tutto quello che ci serve per valutare il termine (2,1) della matrice R: si avrà dunque:

$$r_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{5+k}{3+k}$$

Sfruttiamo ora il principio di reciprocità secondo il quale, se il doppio bipolo è composto solo da bipoli resistivi, come nel nostro caso, allora l'elemento (1,2) della matrice R equivale al termine (2,1) (un discorso analogo vale anche per la matrice G). Dobbiamo quindi ora solo calcolare il termine (2,2) per il quale sarà necessario Fare un discorso analogo a quello fatto per ricavare il termine (1,1).

Figura (a)

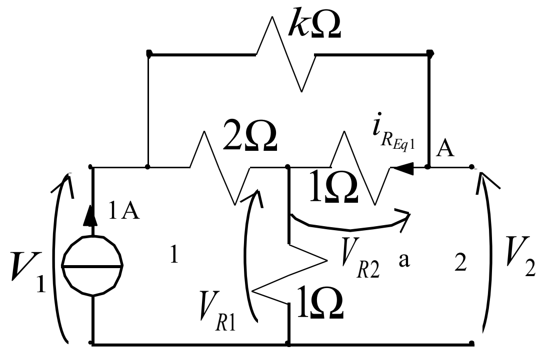


Figura (b)

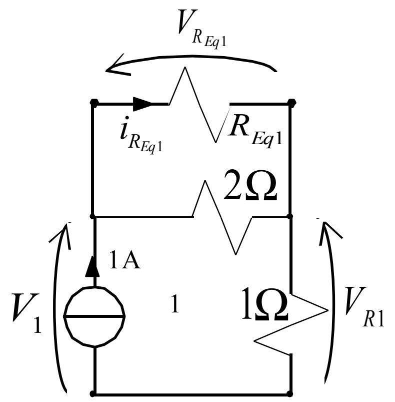


Figura (c)

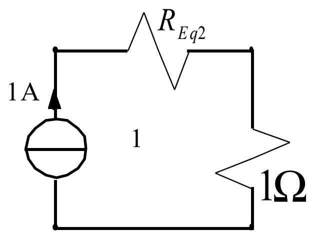
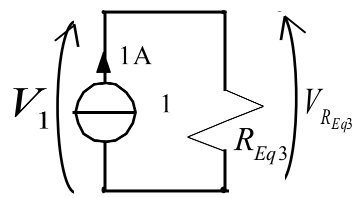


Figura (d)



Senza stare ad esplicitare i conti si può osservare come si ottenga:

$$r_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0} = \frac{2k+5}{3+k}$$

Dunque la matrice $\underline{R}$ relativa a questo doppio bipolo sarà:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \dfrac{3k+5}{k+3} & \dfrac{k+5}{k+3} \\ \dfrac{k+5}{k+3} & \dfrac{2k+5}{k+3} \end{bmatrix}$$

Vediamo ora se e quando il doppio bipolo è passivo (ricordando che, come ben si comprende, la rappresentazione matriciale $\underline{R}$ non esiste qualora k sia proprio uguale a –3); siccome la matrice è simmetrica possiamo usare il secondo metodo. Poniamo dunque positivo l'elemento (1,1) della matrice ottenendo:

$$\frac{3k+5}{k+3} > 0 \Rightarrow k < -3 \wedge k > -\frac{5}{3}$$

Orliamo ora una prima volta l'elemento (1,1) e otteniamo l'intera matrice $\underline{R}$; imponiamo dunque che il determinante di tale matrice sia positivo, ottenendo:

$$\det(\underline{R}) = \frac{5k}{3+k} > 0 \Rightarrow k < -3 \wedge k > 0$$

Confrontando ora queste due condizioni si ricava che il doppio bipolo è passivo quando entrambe sono verificate ovvero quando sia:

$$k < -3 \wedge k > 0$$

Concludiamo riassumendo le proprietà di un doppio bipolo: un doppio bipolo si dice:

- strettamente passivo; quando è verificata la seguente relazione:

$$\underline{v}^T \underline{i} = 0$$

- reciproco; quando si ha:

$$r_{12} = r_{21}$$

$$g_{12} = g_{21}$$

• simmetrica; quando si ha:

$$r_{11} = r_{22}$$

$$g_{11} = g_{22}$$

A parte un'unica particolarissima situazione, la simmetria implica sempre la reciprocità. E' importante non fare confusione tra la definizione di simmetria per una matrice (che coincide con la definizione di reciprocità di un doppio bipolo) e la definizione di simmetria per un doppio bipolo.