

**Conseguenze della agitazione termica sulla misura di  $s$ : effetto Doppler. Condizione di criticità in un reattore omogeneo finito. Dimensioni critiche. Buckling geometrico e buckling materiali. Geometria sferica. Geometria cilindrica. Caso tridimensionale.**

Nella lezione precedente eravamo arrivati ad esprimere come segue la condizione di criticità:

$$k_{\infty} = 1$$

dove era:

$$k_{\infty} = hf$$

con:

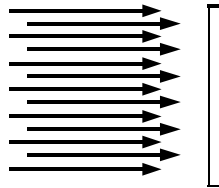
$$\left\{ \begin{array}{l} h = \frac{u \Sigma_f^{FUEL}}{\Sigma_a^{FUEL}} \\ f = \frac{\Sigma_a^{FUEL}}{\Sigma_a^{FUEL} + \Sigma_a^{MOD}} \end{array} \right.$$

Ricordiamo che il prodotto  $hf$  rappresenta il rapporto tra i neutroni resi e i neutroni catturati dal reattore.

Per valutare la condizione di criticità è dunque necessario conoscere le  $\sigma$  in funzione dell'energia oppure anche in funzione della velocità dei neutroni. Possiamo infatti considerare una situazione semplificata come quella riportata nel grafico seguente dove si ha un flusso dato da neutroni monocinetici:

$$f = nv$$

che incide normalmente su un target.



Abbiamo visto che in una situazione come questa si potrebbe calcolare il tasso di reazione nel modo seguente:

$$R = snvN$$

dal quale si ricaverebbe la sezione d'urto microscopica come segue:

$$s = \frac{R}{nvN}$$

Vogliamo però ora tener conto anche della temperatura del bersaglio. Se un nucleo bersaglio è fermo rispetto al sistema di riferimento del laboratorio, infatti, le velocità del neutrone rispetto al laboratorio e al nucleo sono le stesse; ovviamente questo può succedere solo allo zero assoluto. In realtà tutti bersagli si trovano, quantomeno, alla temperatura ambiente e quindi i nuclei che li compongono si muovono per agitazione termica (presentano una distribuzione maxwelliana di velocità). Gli andamenti delle sezioni d'urto che si possono ricavare da valutazioni teoriche o semiempiriche riferiscono le velocità (o energie) delle particelle incidenti relativamente al nucleo; le sezioni d'urto misurate sperimentalmente, invece, riferiscono le velocità delle particelle incidenti al laboratorio. Ovviamente bisogna conciliare i due valori per poterli confrontare correttamente. Consideriamo dunque il tasso di reazione, e per semplicità ignoriamo le densità dei neutroni incidenti e dei nuclei bersaglio, che assumono il ruolo di costanti di proporzionalità. Nel caso di neutroni monocinetici si ha:

$$r = Sv$$

ovvero:

$$s = \frac{r}{v}$$

Il tasso di reazione  $r$  è una grandezza che viene misurata, teniamo dunque conto di cosa effettivamente vedono i nuclei e riscriviamo la prima relazione nella forma seguente:

$$r = \int s(v_r) v_r P(v_r) dv_r$$

dove  $v_r$  è la velocità con la quale effettivamente un nucleo vede un neutrone mentre  $P(v)dv$  è la probabilità che una velocità  $v$  si realizzi. Combinando allora le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$S = \frac{\int S(v_r) v_r P(v_r) dv_r}{v} \quad (1)$$

Se si considerassero dei neutroni veloci la velocità dei nuclei apparirebbe al confronto trascurabile. Utilizzando dei neutroni termici, considerare i nuclei fermi risulta essere un'approssimazione assolutamente inapplicabile; dobbiamo infatti considerare la relazione seguente:

$$\frac{1}{2} M V_T^2 = K T = \frac{1}{2} m v_T^2$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{V_T}{v_T} = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

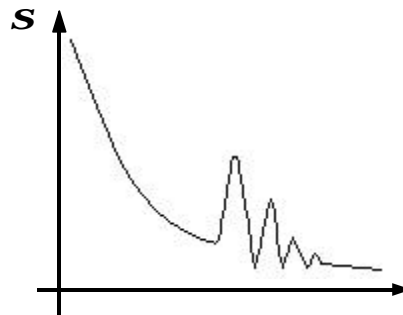
dove si è posto:

$$\frac{M}{m} \cong A$$

Nella seguente tabella sono espressi alcuni valori numerici relativi ai tre tipi di moderatore più diffusi:

	A	$V_T/v_T$
$H_2O$	18	24%
$D_2O$	20	22%
Grafite	16	29%

Ricordiamo ora il seguente grafico "tipico" dell'andamento delle sezioni d'urto di assorbimento:



Nella zona termica, come abbiamo più volte ricordato, vale la dipendenza  $1/v$  e quindi, se siamo in presenza di neutroni termici, si dovrà avere una relazione del tipo:

$$S_a(v_r) = \frac{S_0 v_0}{v_r}$$

inserendo questa espressione nella (1) si ottiene:

$$S_a(v) = \frac{S_0 v_0}{v}$$

e quindi la dipendenza  $1/v$  continua a valere anche tenendo conto dell'agitazione termica dei nuclei bersaglio e non sono necessarie ulteriori correzioni. In effetti esiste un lieve scostamento dalla legge  $1/v$  la cui entità può essere valutata osservando la seguente tabella che esprime i termini correttivi relativi all'andamento  $1/v$  dell'assorbimento e della fissione a due temperature differenti:

T	$g_a$	$g_f$
20°C	0,978	0,9759
600°C	0,9229	0,9108

Soffermiamoci ora sullo scattering elastico che, a bassa energia, presenta una sezione d'urto costante, si avrà:

$$S_s(v) = \frac{S_s}{v} \int v_r P(v_r) dv_r$$

L'integrale che appare nell'ultima relazione è una velocità media relativa e quindi possiamo scrivere:

$$\mathbf{s}_s(v) = \mathbf{s}_s \frac{\bar{v}_r}{v}$$

Facciamo ora riferimento al disegno seguente nel quale appare ovvio che, se siamo nel caso in cui:

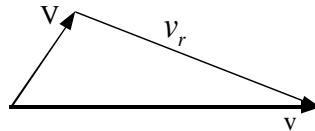
$$|V| \ll |v|$$

si avrà, naturalmente:

$$\bar{v}_r \cong v$$

e quindi:

$$\mathbf{s}_s(v) \cong \mathbf{s}_s$$



Nel caso opposto, in cui invece si ha:

$$|V| \gg |v|$$

risulterà essere:

$$\bar{v}_r \cong V$$

e quindi si avrà:

$$\mathbf{s}_s(v) = \mathbf{s}_s \frac{V}{v}$$

In questo secondo caso vediamo ricomparire la dipendenza  $1/v$ , e sperimentalmente si osserva che la sezione d'urto dipende dalla temperatura, dato che le velocità dipendono da essa. Tuttavia, in fisica dei reattori il secondo caso descritto ha poco interesse, e quindi da ora in poi supporremo sempre che  $\mathbf{s}_s$  sia costante.

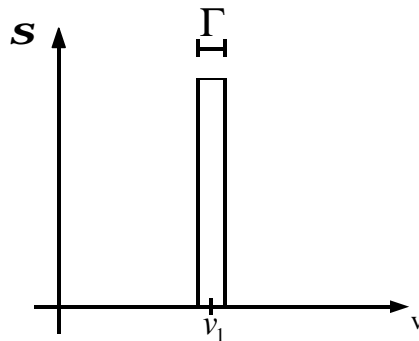
Soffermiamoci ora sulle zone di risonanza. Consideriamo la formula di Breit-Wigner secondo la quale:

$$\mathbf{s} \div \frac{const}{(E - E_1)^2 + \Gamma^2/2}$$

dove  $E_1$  è l'energia di risonanza mentre  $\Gamma$  è la larghezza della banda energetica interessata dalla risonanza. Ci dobbiamo ora chiedere se e come i picchi di risonanza vengono influenzati dalla temperatura. Innanzitutto dobbiamo precisare che, quando non si lavora a temperatura pari allo zero assoluto, la larghezza della risonanza non è  $\Gamma$  ma  $\Gamma_D$  (dove il pedice D sta per Doppler) che è così definito:

$$\Gamma_D = \sqrt{\frac{4E_1KT}{A}} \quad (2)$$

Vediamo ora però di analizzare il tutto in termini di velocità. Scegliamo dunque un caso ideale di risonanza che può essere schematizzato nel modo seguente:



Se fossimo nella situazione di zero assoluto le maggiori probabilità di cattura si avrebbero quando  $v \equiv v_1$ .

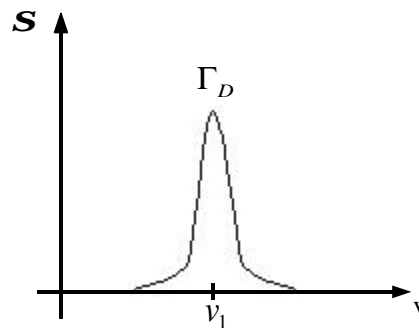
Se siamo ad una temperatura diversa dallo zero assoluto dobbiamo considerare la composizione di  $v$  con  $V$  e quindi è possibile che la massima probabilità di cattura si realizzi anche con una velocità  $v < v_1$  (oppure  $v > v_1$ ), in quanto, anche con una tale velocità, può risultare possibile che la composizione tra  $V$  e  $v$  porti alla situazione in cui si abbia  $v + V \equiv v_1$  (oppure, rispettivamente,  $v - V \equiv v_1$ ).

Quando consideriamo dunque l'effetto Doppler, anche una risonanza a forma di rettangolo come quella rappresentata nella precedente figura può modificarsi fino a trasformarsi in una curva simile a quella riportata nella figura seguente. Vediamo ora come si giunge alla relazione (2). Come prima cosa notiamo che, conoscendo la temperatura, possiamo ricavare la velocità media di agitazione termica dei nuclei tramite la seguente relazione:

$$V_T = \sqrt{\frac{2KT}{M}}$$

Quando dunque passiamo dalla situazione allo zero assoluto alla situazione con temperatura  $T$ , si vedrà, nell'immagine precedentemente mostrata, un allargamento della banda delle velocità che portano alla massima probabilità di cattura che può essere indicata nel modo seguente:

$$\Delta v \equiv V_T = \sqrt{\frac{2KT}{M}}$$



Passiamo ora dall'intervallo di velocità all'intervallo di energia corrispondente:

$$\Delta E = \Gamma_D = mv_1 \Delta v = mv_1 \sqrt{\frac{2KT}{M}} = \sqrt{\frac{2mv_1^2 KTm}{M}} = \sqrt{\frac{2mv_1^2 KT}{A}} = \sqrt{\frac{4E_1 KT}{A}}$$

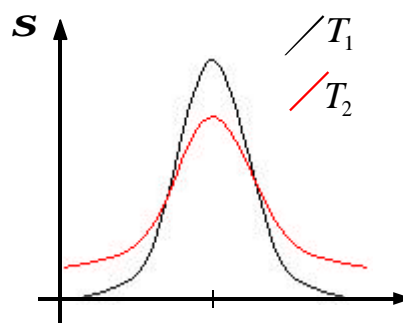
Proseguiamo nella descrizione in termini di energia e vediamo qual è l'allargamento relativo della zona di massima cattura:

$$\frac{\Gamma_D}{E_1} \div \frac{1}{\sqrt{E_1}} \sqrt{\frac{T}{A}}$$

Dalla dipendenza dall'inverso di  $\sqrt{E_1}$  ricaviamo che più i neutroni sono veloci e meno mi interessa la velocità dei nuclei; dalla dipendenza da  $\sqrt{T}$ , invece, ricaviamo che più è alta la temperatura e maggiore è l'allargamento della risonanza. Se consideriamo allora due temperature diverse e tali per cui si abbia:

$$T_2 > T_1$$

possiamo estrarre il seguente grafico comparativo:



L'area di pericolo di cattura è ovviamente uguale nei due casi in quanto l'integrale non dipende dalla temperatura; la cattura alla temperatura  $T_2$  è però maggiore della cattura a temperatura  $T_1$  perché l'intervallo dell'asse delle ascisse che viene ricoperto è più grande e quindi i neutroni (che, come vedremo, si muovono a passi discreti) hanno maggiori

probabilità di cadere nella zona di pericolo. Questo effetto di temperatura ci ruba quindi dei neutroni (stiamo infatti parlando dell'assorbimento dell' $^{238}\text{U}$ ) però è anche un effetto abbastanza utile nel senso che, se il reattore dovesse scaldarsi più del dovuto, un numero maggiore di neutroni verrebbe catturato contribuendo a contenere il danno. Torniamo ora alla relazione di criticità:

$$hf = 1$$

dalla quale ricaviamo:

$$h = \frac{1}{f} = 1 + \frac{\Sigma_a^{MOD}}{\Sigma_a^{FUEL}} = 1 + \frac{N^{MOD}}{N^{FUEL}} \cdot \frac{s_a^{MOD}}{s_a^{FUEL}}$$

Da quest'ultima relazione ricaviamo:

$$\frac{N^{FUEL}}{N^{MOD}} = \frac{1}{h-1} \cdot \frac{s_a^{MOD}}{s_a^{FUEL}}$$

Abbiamo così trovato un rapporto tra il numero di atomi del combustibile e il numero di atomi del moderatore in grado di soddisfare la relazione di criticità; passiamo ad un rapporto tra le masse ottenendo:

$$m_{FUEL} = m_{MOD} \frac{A_{FUEL}}{A_{MOD}} \cdot \frac{1}{h-1} \cdot \frac{s_a^{MOD}}{s_a^{FUEL}} \quad (3)$$

Usando i valori relativi all'uranio naturale si otterrebbe:

$$s_a^{Unat} = (0,72 \cdot 10^{-2}) s_a^{235} + (99,28 \cdot 10^{-2}) s_a^{238} = 7,6b$$

essendo:

$$\begin{cases} s_a^{235} = 680b \\ s_a^{238} = 2,73b \end{cases}$$

Sostituendo dunque i valori numerici nella relazione (3) si ottiene che un reattore omogeneo infinito che usa uranio naturale ed acqua avrebbe bisogno di 3,5 kg di uranio per ogni litro d'acqua. Nel caso della coppia uranio naturale e grafite (si vedano i valori numerici nelle tabelle della scorsa lezione) sarebbero necessari 32 g di uranio per ogni kg di grafite mentre, nel caso della coppia uranio naturale ed acqua pesante, si otterrebbero 2,4 g di combustibile per ogni litro di moderatore. Nel caso, infine, di uranio altamente arricchito ed acqua, sarebbero necessari 14,8 g di combustibile in ogni litro d'acqua.

Torniamo ora a considerare l'equazione della diffusione espressa nella forma:

$$D\nabla^2 \mathbf{f} - \Sigma_a \mathbf{f} + \mathbf{u}\Sigma_f \mathbf{f} = \frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}$$

che può essere riscritta nella forma seguente:

$$\frac{D\nabla^2 \mathbf{f}}{\Sigma_a} + \frac{(\mathbf{u}\Sigma_f - \Sigma_a) \mathbf{f}}{\Sigma_a} = \frac{1}{v\Sigma_a} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \quad (4)$$

Nel mezzo infinito ed omogeneo la dipendenza spaziale viene a cadere e quindi rimane:

$$\frac{(\mathbf{u}\Sigma_f - \Sigma_a) \mathbf{f}}{\Sigma_a} = \frac{1}{v\Sigma_a} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}$$

Ricordiamo ora che la vita media dei neutroni nel mezzo omogeneo finito era espressa tramite la relazione:

$$l = \frac{1}{v\Sigma_a} \quad (5)$$

e inoltre che il coefficiente di moltiplicazione poteva essere espresso nel modo seguente:

$$k_\infty = \frac{\mathbf{u}\Sigma_f}{\Sigma_a} \quad (6)$$

Combinando allora le ultime tre relazioni scritte si ottiene:

$$\frac{(k_\infty - 1) \mathbf{f}}{l} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}$$

dalla quale si ricava:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 e^{\frac{k_\infty - 1}{l} t}$$

E' importante sottolineare che, nella valutazione di  $l$ , non stiamo tenendo conto dei neutroni ritardati.

Supponiamo ora che il mezzo sia finito; siccome ricompare la dipendenza spaziale dobbiamo tornare ad occuparci della relazione (4) che combiniamo nuovamente con la (5), la (6) e con la relazione seguente:

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$$

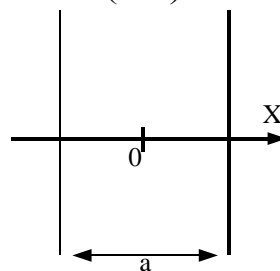
Si ottiene così:

$$L^2 \nabla^2 \mathbf{f} + (k_\infty - 1)\mathbf{f} = l \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}$$

In questa situazione, quindi, vediamo che il flusso dipende sia dallo spazio che dal tempo.

Ci mettiamo dunque in una situazione geometricamente molto semplice e consideriamo una lastra infinita di spessore  $a$  (avendo incluso anche le distanze di estrapolazione). In una situazione come questa la dipendenza spaziale si riduce alla dipendenza da una sola coordinata: la  $x$ . Si avrà dunque un flusso del tipo  $\phi(x,t)$ . Le condizioni al contorno che dovremo porre saranno le seguenti:

$$\mathbf{f}\left(\pm \frac{a}{2}\right) = 0$$



A causa della dipendenza spaziale ridotta alla sola dipendenza da  $x$ , l'equazione della diffusione assumerà la seguente forma:

$$L^2 \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} + (k_\infty - 1)\mathbf{f} = l \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \quad (7)$$

Imponiamo la separabilità tra la coordinata  $x$  e la coordinata  $t$  e otteniamo:

$$\mathbf{f}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \cos(B_n x)$$

dove sia:

$$B_n = (2n + 1) \frac{\pi}{a} \quad (8)$$

Sostituiamo dunque nella relazione (7) la soluzione trovata e otteniamo:

$$-L^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) B_n^2 \cos(B_n x) + (k_\infty - 1) \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \cos(B_n x) = l \sum_{n=0}^{\infty} A_n'(t) \cos(B_n x)$$

Questa espressione relativa all'inviluppo di tutte le armoniche deve essere valida anche armonica per armonica e ciò significa che la medesima equazione deve valere anche senza il segno di sommatoria, ovvero:

$$-L^2 A_n B_n^2 \cos(B_n x) + (k_\infty - 1) A_n \cos(B_n x) = l A_n'(t) \cos(B_n x)$$

Siccome poi tale relazione deve valere anche in ogni punto, cade la dipendenza spaziale e rimane:

$$-L^2 A_n B_n^2 + (k_\infty - 1) A_n = l A_n'(t)$$

ovvero:

$$[k_\infty - (1 + L^2 B_n^2)] A_n = l A_n'(t)$$

E' quindi rimasta solo una componente temporale. Definiamo ora un coefficiente di moltiplicazione parziale per ogni armonica nel modo seguente:

$$k_n = \frac{k_\infty}{1 + L^2 B_n^2}$$

Un discorso analogo può essere poi fatto per le vite medie:

$$l_n = \frac{l}{1 + L^2 B_n^2}$$

Combinando dunque le ultime tre relazioni scritte si ottiene:

$$A_n [k_n - 1] = l_n A_n'(t)$$

dalla quale si ricava:

$$A_n(t) = A_n(0) e^{\frac{k_n - 1}{l_n} t}$$

La soluzione completa sarà allora:

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(0) \cos(B_n x) e^{\frac{k_n - 1}{l_n} t}$$

Se abbiamo scelto una concentrazione tale da portare sottocriticità, ovvero  $k_{\infty} < 1$ , si avrà che risultano minori dell'unità anche tutti i  $k_n$  e quindi il flusso iniziale si smorza. In effetti ogni armonica si smorza con un periodo:

$$T_n = \frac{l_n}{k_n - 1}$$

Nel caso di reattore infinito, per ottenere la criticità era sufficiente portarsi nella situazione di:

$$k_{\infty} = 1$$

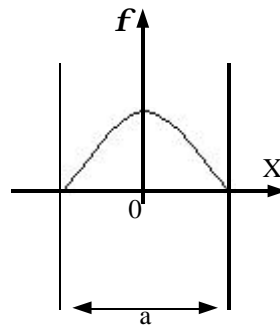
Ora che siamo passati al caso del mezzo finito, tale condizione non basta più. Se infatti tale condizione fosse verificata, avremmo nuovamente tutti i  $k_n$  minori dell'unità, e dunque un flusso complessivo che tende a smorzarsi. Rispetto alla condizione di reattore infinito, dunque, dobbiamo aggiungere ulteriore combustibile in modo da metterci in una situazione nella quale si ha:

$$\begin{cases} k_{\infty} > 1 \\ k_0 = 1 \\ k_1 < 1 \\ k_2 < 1 \\ \dots \end{cases}$$

In questo modo si vedranno spegnersi tutte le armoniche tranne quella per  $n$  nullo; rimane dunque:

$$f(x, t) = A_0 \cos(B_0 x)$$

E quindi il grafico della situazione finale sarà il seguente:



L'armonica privilegiata è quindi quella con  $n=0$  e quindi sono importanti i parametri  $k_0$ ,  $l_0$  e  $B_0$ . Aumentando ulteriormente la concentrazione di combustibile in modo da mettersi nella situazione:

$$\begin{cases} k_{\infty} > 1 \\ k_0 > 1 \\ k_1 < 1 \\ k_2 < 1 \\ \dots \end{cases}$$

si avrà ancora che la prima armonica tende alla fine a dominare ma il flusso tenderà ad crescere sempre più, come schematicamente rappresentato nella prima immagine della pagina seguente.

Mettiamoci ora nella situazione di criticità, ovvero nella situazione nella quale si abbia:

$$k_0 = \frac{k_{\infty}}{1 + L^2 B_0^2} = 1$$

ovvero, nella geometria che stiamo considerando noi (si ricordi la relazione (8)):

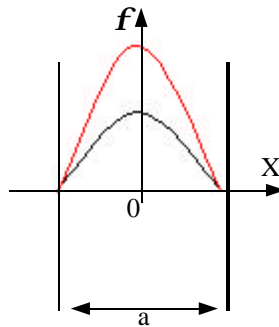
$$k_0 = \frac{k_\infty}{1 + L^2 \left(\frac{p}{a}\right)^2} = 1$$

La scelta della geometria è dunque indispensabile perché scegliendo la geometria si scelgono anche le forme delle autofunzioni tra le quali, come abbiamo appena visto, è importante la prima. Definiamo ora il coefficiente di moltiplicazione effettivo come segue:

$$k_{eff} = k_\infty P_{NFT}$$

dove, nella geometria considerata sarà:

$$P_{NFT} = \frac{1}{1 + L^2 \left(\frac{p}{a}\right)^2}$$



Il fatto che sia apparsa la probabilità di non fuga termica significa che, ovviamente, passando al caso del reattore finito bisogna considerare anche le fughe. E' ora necessario precisare che il termine  $L^2$  è stato fino ad ora considerato relativamente all'intera miscela e non solo al moderatore, ovvero si aveva:

$$L_{misc}^2 = \frac{D_{misc}}{\Sigma_a^{misc}} \quad (9)$$

Generalmente si avrà:

$$L_{misc}^2 < L_{MOD}^2$$

In effetti il rapporto

$$\frac{N_{MOD}}{N_{FUEL}}$$

è talmente grande che si può porre

$$D_{misc} \approx D_{MOD}$$

Non sarà così però per l'assorbimento, dato che la sez. d'urto del combustibile è ordini di grandezza maggiore di quella del moderatore, per cui:

$$\Sigma_a^{misc} = \Sigma_a^{MOD} + \Sigma_a^{FUEL}$$

Combinando dunque le ultime due relazioni scritte con la relazione numero (9) si ottiene:

$$L_{misc}^2 = \frac{D_{misc}}{\Sigma_a^{misc}} = \frac{D_{MOD}}{\Sigma_a^{FUEL} + \Sigma_a^{MOD}}$$

Combinando quest'ultima relazione con la definizione del fattore  $f$  che troviamo come quarta equazione della lezione di oggi, otteniamo:

$$L_{misc}^2 = \left( \frac{D_{MOD}}{\Sigma_a^{MOD}} \right) \frac{\Sigma_a^{MOD}}{\Sigma_a^{MOD} + \Sigma_a^{FUEL}} = L_{MOD}^2 (1 - f)$$

Giunti a questo punto possiamo riscrivere la condizione di criticità per un reattore omogeneo finito nel modo seguente:

$$\frac{hf}{1 + L_{MOD}^2 (1 - f) \left(\frac{p}{a}\right)^2} = 1$$

Una relazione di questo genere può essere utilizzata in due modi diversi: è possibile fornire la dimensione  $a$  e ricavare il rapporto  $N_{FUEL}/N_{MOD}$  oppure viceversa. Le dimensioni del reattore che, per un fissato rapporto  $N_{FUEL}/N_{MOD}$ , garantiscono la validità della condizione di criticità, prendono il nome di dimensioni critiche.



Concentriamoci ora sulla relazione che definisce la probabilità di non fuga termica che, per questa geometria sarà:

$$P_{NFT} = \frac{1}{1 + L_{misc}^2 \left(\frac{\mathbf{p}}{a}\right)^2}$$

Se ci poniamo in situazione di reattore critico, l'equazione di diffusione avrà la seguente forma:

$$D\nabla^2 \mathbf{f} + (\mathbf{u}\Sigma_f - \Sigma_a)\mathbf{f} = 0$$

ovvero:

$$L^2\nabla^2 \mathbf{f} + (k_\infty - 1)\mathbf{f} = 0$$

oppure anche:

$$\nabla^2 \mathbf{f} + \frac{k_\infty - 1}{L^2} \mathbf{f} = 0$$

Nei mezzi non moltiplicanti il coefficiente di moltiplicazione è ovviamente nullo e quindi l'ultima relazione scritta si riduce come segue:

$$\nabla^2 \mathbf{f} - \frac{1}{L^2} \mathbf{f} = 0$$

Si può dunque comprendere come si sia arrivati alla relazione che esprime il caso in cui c'è anche la produzione. La relazione:

$$k_{eff} = \frac{k_\infty}{1 + L^2 B_0^2} = 1 \quad (10)$$

può risciversi nel modo seguente:

$$\frac{k_\infty - 1}{L^2} = B_0^2 = \left(\frac{\mathbf{p}}{a}\right)^2 \quad (11)$$

In quest'ultima relazione si noti come le informazioni nucleari (presenti nel primo membro) siano state separate dalle informazioni geometriche (presente solo al secondo membro). Definiamo dunque il "Buckling geometrico" e il "Buckling materiali" rispettivamente come segue:

$$\begin{cases} B_g^2 = \left(\frac{\mathbf{p}}{a}\right)^2 \\ B_m^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2} \end{cases}$$

Se il reattore è in stato di criticità vale, come abbiamo visto, la relazione (11) e quindi varrà anche la seguente uguaglianza:

$$\{\nabla^2 \mathbf{f} - B_g^2 \mathbf{f} = 0\} = \{\nabla^2 \mathbf{f} - B_m^2 \mathbf{f} = 0\}$$

Vediamo ora se è possibile trovare la relazione che esprime la probabilità di non fuga termica anche tramite un approccio del tutto diverso. La definizione teorica di probabilità di non fuga termica è un rapporto tra i neutroni catturati e i neutroni catturati sommati con i neutroni fuggiti. In generale possiamo dunque esprimere tale probabilità nel modo seguente:

$$P_{NFT} = \frac{\int_V \Sigma_a \mathbf{f} dV}{\int_V \Sigma_a \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{j} \cdot \underline{n} dS}$$

Ricordando che:

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \underline{n} dS = \int_V \text{div} \mathbf{j} dV$$

si ottiene:

$$P_{NFT} = \frac{\int_V \Sigma_a \mathbf{f} dV}{\int_V \Sigma_a \mathbf{f} dV + \int_V \text{div} \mathbf{j} dV}$$

Ricordando però che:

$$\vec{J} = -D\nabla f$$

e poiché il reattore deve essere critico, vale la seguente uguaglianza:

$$\text{div}\vec{J} = -D\nabla^2 f = DB_g^2 f$$

e si avrà quindi:

$$P_{NFT} = \frac{\int_V \Sigma_a f dV}{\int_V \Sigma_a f dV + \int_V DB_g^2 f dV}$$

Poiché il sistema è stato assunto omogeneo, questa relazione deve essere valida punto per punto e quindi può anche essere riscritta nel modo seguente:

$$P_{NFT} = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + DB_g^2}$$

ovvero anche:

$$P_{NFT} = \frac{1}{1 + \frac{D}{\Sigma_a} B_g^2}$$

Ricordiamo ora la relazione (9) che ha valenza generale e che ci permette di riscrivere l'ultima relazione nel modo seguente:

$$P_{NFT} = \frac{1}{1 + L^2 B_g^2}$$

Combinando dunque quest'ultima relazione con l'equazione (10) si ricava:

$$k_\infty P_{NFT} = 1$$

da cui, ovviamente:

$$P_{NFT} = \frac{1}{k_\infty}$$

Riassumendo: ci siamo occupati di un reattore omogeneo, finito e nudo, ovvero di un reattore nel quale non c'è niente che si oppone alla fuga dei neutroni, e abbiamo considerato l'equazione completa:

$$D\nabla^2 f - \Sigma_a f + \mathbf{u}\Sigma_f f = \frac{1}{v} \frac{df}{dt}$$

Tale relazione è stata specializzata per la geometria piana e sono stati così trovati gli autovalori e le seguenti due espressioni:

$$\begin{cases} k_{eff} = \frac{k_\infty}{1 + L^2 B^2} \\ B_m^2 = B_g^2 \end{cases}$$

Quanto abbiamo trovato per la geometria piana vale anche per tutte le altre geometrie; le equazioni che ci interesseranno sono le seguenti:

$$\begin{cases} \nabla^2 f + B_g^2 f = 0 \\ \nabla^2 f + B_m^2 f = 0 \end{cases} \quad (12)$$

La parte temporale si risolve pensando che si troverà un autovalore, il più piccolo, che sarà quello da prendere in considerazione. Da ora in poi, dunque, ci disinteresseremo del tempo.

Andiamo dunque a soffermarci sulla geometria sferica (che è una geometria con la quale, effettivamente, possono essere realizzati dei reattori) e quindi, considerando un flusso che dipende dalla sola r (si veda la figura della pagina seguente), consideriamo la seguente relazione:

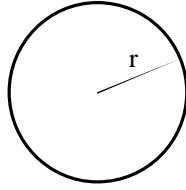
$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (fr)$$

In questo caso, quindi, la relazione (12) potrà essere riscritta nel modo seguente:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (fr) + B_g^2 f = 0$$

ovvero:

$$\frac{d^2}{dr^2}(\mathbf{f}r) + B_g^2 \mathbf{f}r = 0$$



Per semplicità di notazione imponiamo ora che sia:

$$\mathbf{f}r = F$$

e quindi, combinando le ultime due relazioni scritte, si ottiene:

$$F'' + B_g^2 F = 0$$

Abbiamo dunque trovato un'equazione differenziale semplice da risolvere il cui integrale generale è:

$$F = A \sin(B_g r) + B \cos(B_g r)$$

e quindi, ricordando il legame tra F e  $\phi$ :

$$\mathbf{f}(r) = \frac{A \sin(B_g r) + B \cos(B_g r)}{r}$$

Siccome vogliamo che il flusso sia finito anche per r che tende a zero, possiamo ridurre la relazione appena scritta come segue:

$$\mathbf{f}(r) = \frac{A \sin(B_g r)}{r}$$

Detto allora R il raggio effettivo del reattore sferico che stiamo considerando, imponiamo la condizione al contorno secondo la quale:

$$\mathbf{f}(R) = 0$$

e ciò significa imporre:

$$A \sin(B_g R) = 0$$

Da questa relazione si originano una serie di autovalori poiché si avrà:

$$B_{gn} R = n\pi$$

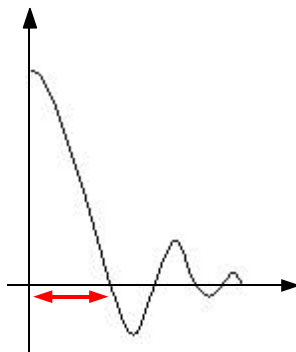
e quindi:

$$B_{gn} = \frac{n\pi}{R}$$

Ci interessa, ovviamente, solo il primo di tali autovalori, ovvero:

$$B_g = \frac{\pi}{R}$$

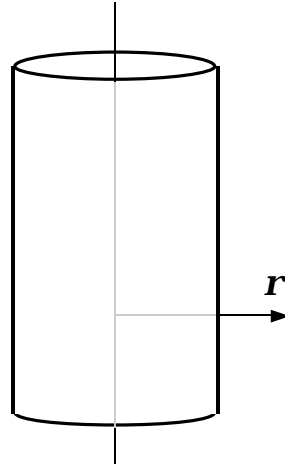
Il motivo per il quale mi interessa solo il primo autovalore è facilmente comprensibile considerando il disegno seguente:



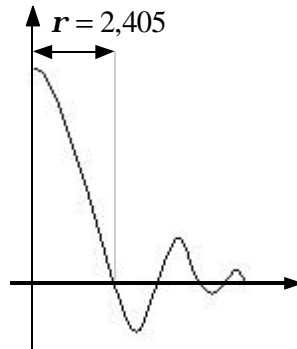
Appare infatti evidente che, siccome non possono esistere flussi negativi, il confine del reattore si avrà ad una distanza (indicata in rosso nel grafico) alla quale per la prima volta il flusso si annulla. Nella tabella seguente vediamo l'analogia relativa al Buckling geometrico della geometria piana e della geometria sferica:

Geometria piana	Geometria sferica
$\frac{\rho}{a}$	$\frac{\rho}{R}$

Occupiamoci ora della geometria cilindrica e, in particolare, facciamo riferimento al cilindro infinito.



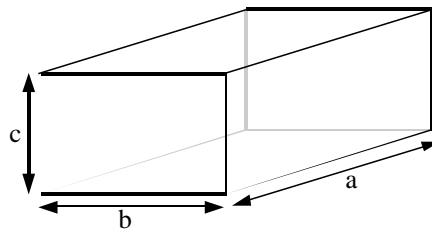
Anche in questo caso ci troviamo a dover affrontare una situazione monodimensionale in quanto il flusso dipenderà solamente dalla coordinata  $\rho$ ; anche in questo caso, quindi, si fa riferimento all'equazione (12); in questo caso, però bisogna fare riferimento alle funzioni di Bessel per gestire il laplaciano di  $\phi$ . Sfruttando dunque le funzioni di Bessel si otterrà una funzione  $J_0$  con il seguente andamento:



Il primo zero della funzione deve coincidere, ancora, con il contorno (estrapolato) del reattore; in questo caso quindi si avrà:

$$B_g = \frac{2,405}{R}$$

dove  $R$  è il raggio del cilindro. Fino ad ora ci siamo dunque occupati di tre geometrie monodimensionali (nel senso che, in tutti i casi, si aveva la dipendenza da una sola coordinata:  $x$ ,  $r$  e  $\rho$ ), vediamo ora un caso tridimensionale: il parallelepipedo.



In questo caso il flusso dipende da tre coordinate e può essere scomposto nel modo seguente (separabilità delle variabili):

$$f = f(x, y, z) = F(x)G(y)H(z)$$

La relazione (12) può essere così adattata a questa situazione:

$$\frac{d^2 \mathbf{f}}{dx^2} + \frac{d^2 \mathbf{f}}{dy^2} + \frac{d^2 \mathbf{f}}{dz^2} + B_g^2 \mathbf{f} = 0$$

Combinando dunque le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$F''GH + FG''H + FGH'' + B_g^2 FGH = 0$$

ovvero:

$$\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} + \frac{H''}{H} + B_g^2 = 0$$

da cui si ricava:

$$\begin{cases} \frac{F''}{F} = \text{const} = -\mathbf{a}^2 \\ \frac{G''}{G} = \text{const} = -\mathbf{b}^2 \\ \frac{H''}{H} = \text{const} = -\mathbf{g}^2 \end{cases}$$

Concentrandosi sulla prima relazione di questo sistema si avrà:

$$F'' + \mathbf{a}^2 F = 0$$

Un'equazione come questa ammette soluzioni di tipo trigonometrico, ovvero:

$$F = \cos(\mathbf{a}x)$$

Dobbiamo poi imporre le condizioni al contorno secondo le quali:

$$\cos\left(\mathbf{a}_n \frac{a}{2}\right) = 0$$

da cui si ricavano gli autovalori seguenti:

$$\mathbf{a}_n = (2n+1)\frac{\mathbf{p}}{a}$$

Un discorso analogo può poi essere ripetuto anche per le altre due coordinate; si otterrà dunque:

$$-\mathbf{a}_0^2 - \mathbf{b}_0^2 - \mathbf{g}_0^2 + B_g^2 = 0$$

da cui:

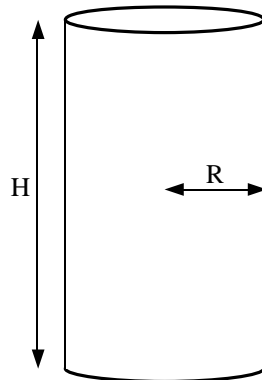
$$B_g^2 = \left(\frac{\mathbf{p}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{p}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{p}}{c}\right)^2$$

**Il cilindro finito. Scelta della geometria ideale. Il reattore del CESNEF. Misure del Buckling materiale. Il riflettore. Il Reflector Saving.**

Nella lezione precedente avevamo analizzato i Buckling geometrici relativi ad alcune geometrie; i risultati ottenuti sono riassunti nella seguente tabella:

Caso geometrico	Buckling geometrico
Lastra piana infinita	$B_g^2 = \left(\frac{p}{a}\right)^2$
Cilindro infinito	$B_g^2 = \left(\frac{2,405}{R}\right)^2$
Sfera	$B_g^2 = \left(\frac{p}{R}\right)^2$
Parallelepipedo	$B_g^2 = \left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2$

Analizziamo ora un caso geometrico particolarmente significativo: il caso del cilindro finito.



Dovremo ancora fare riferimento alla relazione

$$\nabla^2 \mathbf{f} + B_g^2 \mathbf{f} = 0$$

Invece di fare i conti, però, osserviamo cosa succede nel passaggio dalla lastra piana infinita al parallelepipedo. Si partiva da una soluzione del tipo:

$$\cos\left(\frac{p}{a} x\right)$$

per arrivare ad una soluzione del tipo:

$$\cos\left(\frac{p}{a} x\right) \cos\left(\frac{p}{b} y\right) \cos\left(\frac{p}{c} z\right)$$

Per passare da una lastra piana infinita ad un parallelepipedo si può pensare di ottenere quest'ultimo tramite l'intersezione di 3 lastre piane mutuamente ortogonali. Seguendo una analogia simile vediamo ora il passaggio dal caso del cilindro infinito al caso del cilindro finito: per ottenere un cilindro finito si può infatti pensare di tagliare il cilindro infinito utilizzando due piani paralleli, che possiamo pensare appartenenti ad una lastra piana infinita. Il risultato finale dovrà allora risultare scomposto in una parte dovuta al cilindro infinito e in una parte dovuta alla lastra piana, ossia:

$$\mathbf{f}(r) = \cos\left(\frac{p}{H} r\right) J\left(\frac{r}{2,405}\right)$$

da cui si ricava:

$$B_g^2 = \left(\frac{p}{H}\right)^2 + \left(\frac{2,405}{R}\right)^2$$

Conoscere il Buckling geometrico è molto importante per poter stabilire le dimensioni di un reattore; supponendo infatti di aver scelto la miscela si conosce il Buckling materiale, ovvero si ha:

$$B_m^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2}$$

E' allora sufficiente sfruttare la seguente uguaglianza:

$$B_m^2 = B_g^2$$

per stabilire le dimensioni del reattore in base alla geometria che si è scelta. Nel caso che si voglia realizzare un reattore a forma di parallelepipedo, l'ultima relazione scritta assumerà al seguente forma:

$$B_m^2 = \left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2$$

e quindi si potranno scegliere le dimensioni a, b e c del parallelepipedo in modo che soddisfino tale relazione. Un discorso analogo può essere fatto anche nel caso in cui si scelga la geometria cilindrica.

Ora che abbiamo introdotto tre geometrie effettivamente realizzabili (la sfera, il cilindro finito e il parallelepipedo) è necessario stabilire quale di queste tre sia la migliore ovvero quale di queste tre permette un maggior risparmio del combustibile. Appare ovvio che sarà necessario scegliere la situazione che minimizza il volume; sarebbe dunque consigliabile scegliere una geometria sferica. Se, però, per altri motivi, fosse necessario costruire un reattore che sfrutti effettivamente la geometria cilindrica o quella del parallelepipedo, bisogna fare in modo che, anche in questi casi, il volume sia minimizzato. Vediamo dunque come si può fare per trovare il parallelepipedo che minimizza il volume a parità di  $B_g^2$  (ricerca di un minimo condizionato). Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e quindi introduciamo la seguente combinazione lineare:

$$F = V + \lambda B_g^2 \quad (1)$$

dove V sia il volume. Nel caso specifico del parallelepipedo si ha:

$$\begin{cases} V = abc \\ B_g^2 = \left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2 \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$F = abc + \lambda \left[ \left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2 \right]$$

Annuliamo ora le derivate della F rispetto alle tre coordinate che descrivono il parallelepipedo ovvero consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dF}{da} = 0 \\ \frac{dF}{db} = 0 \\ \frac{dF}{dc} = 0 \end{cases}$$

che equivale a:

$$\begin{cases} bc = 2\lambda \frac{p^2}{a^3} \\ ac = 2\lambda \frac{p^2}{b^3} \\ ab = 2\lambda \frac{p^2}{c^3} \end{cases}$$

Tale sistema può essere manipolato e riscritto nel modo seguente:

$$\begin{cases} 2I = \frac{a^3 bc}{p^2} \\ 2I = \frac{ab^3 c}{p^2} \\ 2I = \frac{abc^3}{p^2} \end{cases}$$

Da questo si deduce che le tre equazioni del sistema possono essere tutte vere solo se il parametro  $\lambda$  è inessenziale e se  $a = b = c$

Si è dunque ottenuto che la struttura ideale è quella cubica. Un discorso analogo viene poi fatto anche nel caso del cilindro finito; in questo caso specifico si avrà:

$$\begin{cases} V = pR^2 H \\ B_g^2 = \left(\frac{p}{H}\right)^2 + \left(\frac{2,405}{R}\right)^2 \end{cases}$$

e quindi la relazione (1) diventa:

$$F = pR^2 H + I \left[ \left(\frac{p}{H}\right)^2 + \left(\frac{2,405}{R}\right)^2 \right]$$

Nel caso del cilindro sarà necessario derivare solo rispetto all'altezza e al raggio e quindi si avrà:

$$\begin{cases} \frac{dF}{dr} = 0 \\ \frac{dF}{dH} = 0 \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} 2pRH = 2I \frac{(2,405)^2}{R^3} \\ pR^2 = 2I \frac{p^2}{H^3} \end{cases}$$

Anche in questo caso è possibile eliminare il parametro  $\lambda$  dividendo membro a membro le due equazioni dell'ultimo sistema scritto:

$$2 \frac{H}{R} = \frac{(2,405)^2}{p^2} \left(\frac{H}{R}\right)^3$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{H}{R} = \sqrt{2} \frac{p}{2,405} = 1,84735$$

Nel caso di geometria cilindrica, dunque, la situazione che permette il maggior risparmio del combustibile è rappresentata da un cilindro la cui altezza è un po' meno che doppia rispetto al raggio.

Riassumendo:

- Nel caso della sfera dobbiamo considerare il seguente sistema:

$$\begin{cases} V = \frac{4}{3} pR^3 \\ B_g^2 = \left(\frac{p}{R}\right)^2 \\ B_g^2 = B_m^2 \end{cases}$$

Combinando tra di loro queste tre relazioni si ottiene:



$$V = \frac{4}{3} \rho \left( \frac{\rho}{B_m} \right)^3 = \frac{129,9}{B_m^3}$$

- Nel caso del cubo il sistema da considerare è il seguente:

$$\begin{cases} V = a^3 \\ B_g^2 = 3 \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 \\ B_g^2 = B_m^2 \end{cases}$$

Combinando tra di loro queste espressioni si ottiene:

$$V = \left( \sqrt{3} \frac{\rho}{B_m} \right)^3 = \frac{161,1}{B_m^3}$$

- Nel caso del cilindro, infine, dobbiamo fare riferimento al seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} V = \rho R^2 H \\ B_g^2 = \left( \frac{\rho}{H} \right)^2 + \left( \frac{2,405}{R} \right)^2 \\ B_g^2 = B_m^2 \\ \frac{H}{R} = 1,84735 \end{cases}$$

dalle quali si ricava:

$$V = \frac{148,3}{B_m^3}$$

Appare dunque evidente che la geometria che consente una migliore minimizzazione del volume è la geometria sferica, seguita dalla geometria cilindrica e dalla geometria cubica in quest'ordine.

Consideriamo, come esempio numerico, il reattore in funzione tempo fa al CESNEF che era un reattore omogeneo che sfruttava come combustibile  $^{235}\text{U}$  e come moderatore l'acqua. La massa critica del reattore era di 1,1 kg e il raggio era di circa 20 cm.

Il reattore del CESNEF, in realtà, era un reattore riflesso e conteneva, ovviamente, anche dei neutroni veloci e quindi non siamo ancora in grado di descrivere in maniera approfondita tale sistema (possiamo comunque intuire che la presenza del riflettore giocava a favore del reattore mentre la presenza dei neutroni veloci era un punto a sfavore).

Ricordiamo i dati numerici che avevamo ricavato durante la lezione numero 8 a proposito del reattore ad  $^{235}\text{U}$  moderato ad acqua:

$$\begin{cases} h^{235} = 2,07 \\ f^{235} = 0,483 \\ C = 11,8 \frac{g}{l} \end{cases}$$

L'ultimo dato implicava che fosse:

$$\frac{N_{H_2O}}{N_{235}} = 1105,6$$

Con questi valori era inoltre confermata la relazione caratteristica del reattore critico:

$$h^{235} f^{235} = 1$$

Tutti i discorsi che ci avevano portati a questi valori numerici erano stati fatti senza considerare la presenza di sorgenti di neutroni. Nel caso di un reattore funzionante, però, siamo in presenza di un mezzo moltiplicante; ci si chiede dunque se anche in questa situazione vale la condizione:

$$\Sigma_a \ll \Sigma_s$$

Supponendo che praticamente tutti i neutroni assorbiti dal combustibile diano origine a fissione si avrà:

$$n\Sigma_f \approx \Sigma_a$$

e quindi, imporre che lo scattering sia dominante significa imporre che:

$$n\Sigma_f < \Sigma_s$$

Ricordando i valori numerici secondo i quali:

$$\begin{cases} \mathbf{s}_a^{235} = 680b \\ \mathbf{s}_a^{H_2O} = 0,66b \\ \mathbf{s}_s^{235} = 10b \\ \mathbf{s}_s^{H_2O} = 103b \end{cases}$$

si ottiene, effettivamente:

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s} = \frac{N^{235} \mathbf{s}_a^{235} + N^{H_2O} \mathbf{s}_a^{H_2O}}{N^{235} \mathbf{s}_s^{235} + N^{H_2O} \mathbf{s}_s^{H_2O}} = 1,2 \cdot 10^{-2}$$

Fatta questa osservazione che ci permette di considerare buoni tutti i valori numerici trovati in precedenza, possiamo soffermarci sulla geometria del reattore che, come detto, era un reattore sferico. Siccome ci sono della fughe sarà necessario aumentare la concentrazione di Uranio nell'acqua. Imponiamo dunque che sia:

$$\frac{N_{H_2O}}{N_{235}} = 10^3 \quad (2)$$

che corrisponde alla seguente concentrazione:

$$C = 13,056 \frac{g}{l}$$

Possiamo allora ricavare il parametro f nel modo seguente:

$$f = \frac{\Sigma_a^{235}}{\Sigma_a^{235} + \Sigma_a^{H_2O}} = 0,5082$$

Possiamo a questo punto calcolare il  $k_\infty$  nel modo seguente:

$$k_\infty = \mathbf{h}^{235} f = 1,052$$

Un ulteriore dato importante è, ora, il termine  $L_m^2$  che si ottiene a partire dalla seguente relazione:

$$L_m^2 = L_{H_2O}^2 (1 - f)$$

Sapendo allora che è:

$$L_{H_2O} = 2,85cm$$

si ricava:

$$L_m^2 = 8,12cm^2$$

e quindi:

$$L_m^2 = L_{H_2O}^2 (1 - f) = 3,995cm^2$$

Ora abbiamo tutto quello che ci serve per ricavare il Buckling materiale tramite la seguente relazione:

$$B_m^2 = \frac{k_\infty - 1}{L_m^2} = 1,3017 \cdot 10^{-2} cm^{-2}$$

Avendo scelto un reattore sferico dobbiamo ora uguagliare il Buckling materiale del reattore con il Buckling geometrico caratteristico della geometria sferica, ovvero:

$$B_m^2 = B_g^2 = \left( \frac{p}{R} \right)^2$$

da cui, esplicitando per il raggio R si ricava il raggio critico:

$$R = 27,5cm$$

Per sapere quanti neutroni lasciamo sfuggire usiamo la relazione

$$k_\infty P_{NFT} = 1$$

dalla quale si ricava:

$$P_{NFT} = \frac{1}{k_{\infty}} = 0,95$$

Possiamo dunque affermare che scappa il 5% dei neutroni termici. Il volume critico non è altro che la sfera caratterizzata dal raggio critico e quindi si avrà:

$$V_{Cr} = 87,1l$$

Per ricavare la massa critica, invece, sfruttiamo la relazione (2), dalla quale si ricava:

$$m_{Cr}^{235} = m^{H_2O} \frac{N^{235}}{N^{H_2O}} \cdot \frac{235}{18} = 1,14kg$$

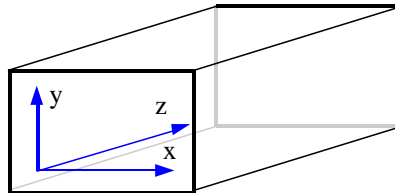
Dopo aver visto questo esempio numerico possiamo tornare ad occuparci del Buckling materiale che, come si ricorda, è definito dalla relazione:

$$B_m^2 = \frac{k_{\infty} - 1}{L^2}$$

Ovviamente è nel nostro interesse avere un Buckling materiale il più alto possibile e quindi risulta particolarmente conveniente avere un termine  $L^2$  il più basso possibile. Conoscere il Buckling materiale è un punto talmente importante che, soprattutto quando si è in presenza di miscele nuove, oltre ai calcoli il Buckling materiale viene effettivamente misurato; per fare questo si usano masse molto inferiori rispetto alla massa critica (solitamente inferiori ad 1/3 della massa critica). Supponiamo dunque di avere a disposizione una massa M di miscela alla quale viene data la forma di un parallelepipedo di spigoli a, b e c tali per cui:

$$V = abc \ll V_{Cr}$$

Siccome siamo molto al di sotto della criticità non vedremo accadere niente a meno di non inserire dei neutroni termici; supponiamo di introdurre tali neutroni lungo l'asse z (con riferimento all'immagine seguente).



Consideriamo a questo punto la seguente relazione:

$$\nabla^2 \mathbf{f} + B_m^2 \mathbf{f} = 0$$

che, nel caso della geometria scelta, diventa:

$$\frac{d^2 \mathbf{f}}{dx^2} + \frac{d^2 \mathbf{f}}{dy^2} + \frac{d^2 \mathbf{f}}{dz^2} + B_m^2 \mathbf{f} = 0 \quad (3)$$

Imponiamo nuovamente la separabilità delle variabili, ovvero imponiamo che sia:

$$\mathbf{f}(x, y, z) = F(x)G(y)H(z)$$

Potremo così ottenere, con un procedimento già visto in precedenza:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{F''}{F} = const = -\mathbf{a}_n^2 \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{G''}{G} = const = -\mathbf{b}_m^2 \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{H''}{H} = const = \mathbf{g}_{n,m}^2 \end{array} \right. \quad (6)$$

Da questo sistema (noto con il nome di esperienza esponenziale) si ricava la seguente espressione del flusso:

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \sum_{n,m} A_{nm} \cos(\mathbf{a}_n x) \cos(\mathbf{b}_m y) e^{-\mathbf{g}_{n,m} z}$$

Imponendo le condizioni al contorno lungo le direzioni x ed y si ricava:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_n = (2n+1)\frac{\mathbf{p}}{a} \\ \mathbf{b}_n = (2m+1)\frac{\mathbf{p}}{b} \end{cases}$$

Le costanti  $A_{nm}$ , inoltre, non sono fisicamente importanti poiché dopo un po' (ovvero ad una certa distanza dal piano  $z=0$ ) le armoniche lungo  $x$  e lungo  $y$  scompaiono, rimane:

$$\mathbf{f}(z) \approx e^{-\mathbf{g}_{0,0}z}$$

dunque, misurando il flusso a varie distanze  $z$ , possiamo ricavare il valore di  $\mathbf{g}_{0,0}$ .

Riscriviamo ora la relazione (3) sfruttando il sistema composto dalle relazioni (4), (5) e (6); si ottiene così:

$$\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} + \frac{H''}{H} + B_m^2 = 0$$

ovvero:

$$-\mathbf{a}_n^2 - \mathbf{b}_m^2 + \mathbf{g}_{n,m}^2 + B_m^2 = 0$$

Come ricordato, in zone un po' lontane dal piano sorgente si può anche scrivere:

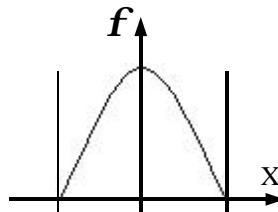
$$-\mathbf{a}_0^2 - \mathbf{b}_0^2 + \mathbf{g}_{0,0}^2 + B_m^2 = 0$$

da cui si ricava:

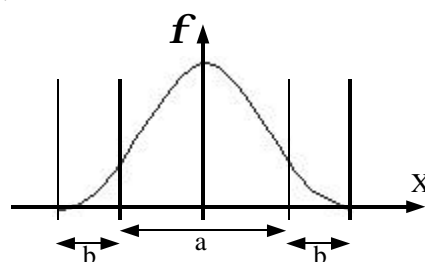
$$B_m^2 = \left(\frac{\mathbf{p}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{p}}{b}\right)^2 - \mathbf{g}_{0,0}^2$$

in cui, a secondo membro, i primi due termini sono puramente geometrici, e il terzo si ricava sperimentalmente.

Facciamo ora un ulteriore passo avanti nella descrizione di un reattore e parliamo del riflettore. Fino ad ora abbiamo sempre fatto riferimento a mezzi moltiplicanti finiti ma nudi; nell'analisi numerica fatta in precedenza del reattore del CESNEF si tollerava una fuga di neutroni termici pari al 5%. E' però evidente che, per motivi di sicurezza, una tale percentuale di fuga di neutroni termici non è assolutamente tollerabile. A queste considerazioni legate alla sicurezza bisogna poi aggiungere una ulteriore osservazione: facendo riferimento alla seguente immagine si può vedere come, vicino alla zona di frontiera, il combustibile lavora malissimo in quanto il flusso che illumina quella zona è scarso.



Sono questi dunque i due principali motivi che mi spingono ad inserire uno specchio per i neutroni (il riflettore appunto): in questo modo, infatti, evito gran parte delle fughe e miglioro la distribuzione del flusso. Come prima cosa bisogna chiedersi cosa si può utilizzare come riflettore. Ovviamente un buon riflettore non deve catturare e quindi deve avere una  $S_a$  molto piccola in zona termica, inoltre un buon riflettore deve garantire degli scattering all'indietro vicini alla materia moltiplicante e quindi si deve avere una  $S_s$  molto grande. I neutroni veloci, infine, devono poter essere presi dal riflettore, rallentati e rispediti verso l'interno, dunque il riflettore deve avere anche un alto potere rallentante. Buoni riflettori sono allora, nuovamente, l'acqua, l'acqua pesante e la grafite; molto spesso, infatti, il moderatore e il riflettore sono costituiti dallo stesso materiale. Sofferamoci sulla geometria piana e consideriamo una lastra piana infinita circondata da due lastre di riflettore; l'andamento del flusso nelle tre zone che si vengono a creare è rappresentato nell'immagine seguente:



Anche in questo caso il flusso dipenderà solo dalla coordinata  $x$  però la zona centrale è composta da materiale moltiplicatore per il quale vale la seguente relazione:

$$\nabla^2 \mathbf{f}_m + B_m^2 \mathbf{f}_m = 0 \quad (7)$$

mentre le due zone esterne sono composte dal riflettore per il quale vale la relazione:

$$\nabla^2 \mathbf{f}_r - \frac{1}{L_r^2} \mathbf{f}_r = 0$$

Dalla relazione (7), quindi, si ricava:

$$\mathbf{f}_m(x) = A \cos(B_m x)$$

che, come si osserva dal disegno, non si annulla al contorno del reattore; dalla relazione (8), invece, si ricava:

$$\mathbf{f}_r(x) = A_1 \sinh \left( \frac{\frac{a}{2} + b - x}{L_r} \right)$$

che si annulla su quello che prende il nome di contorno estrapolato. Alla frontiera tra i due mezzi, ovviamente, ci dovrà essere uguaglianza dei due flussi e quindi si avrà:

$$A \cos \left( B_m \frac{a}{2} \right) = A_1 \sinh \left( \frac{b}{L_r} \right)$$

e ci dovrà essere anche uguaglianza delle correnti, e quindi:

$$D_m A B_m \sin \left( \frac{B_m a}{2} \right) = \frac{D_r A_1}{L_r} \cosh \left( \frac{b}{L_r} \right)$$

Facciamo ora il rapporto membro a membro tra le ultime due relazioni scritte e ricaviamo:

$$D_m B_m \tan \left( \frac{B_m a}{2} \right) = \frac{D_r}{L_r} \coth \left( \frac{b}{L_r} \right)$$

Se ne sono andate le due costanti che fornivano informazioni inessenziali. Nell'ultima relazione scritta vediamo che le informazioni nucleari sono fornite da  $D_m$ ,  $B_m$ ,  $D_r$  ed  $L_r$  mentre le informazioni geometriche sono fornite da  $a$  e  $b$ .

Risolviamo ora l'ultima equazione scritta esplicitando rispetto ad  $a$  che, da ora in poi, chiameremo  $a_r$  (spessore della lastra in presenza del riflettore); siccome l'Uranio in acqua è molto poco possiamo fare la seguente approssimazione:

$$D_m \approx D_r$$

e ottenere così:

$$a_r = \frac{2}{B_m} \arctan \left[ \frac{1}{B_m L_r} \coth \left( \frac{b}{L_r} \right) \right]$$

Se non ci fosse il riflettore, la dimensione critica del reattore nudo sarebbe:

$$a_{Cr} = \frac{\mathbf{p}}{B_m}$$

L'introduzione del riflettore si traduce in un risparmio che prende il nome di Reflector Saving (R.S.) che è così definito:

$$R.S. = a_{Cr} - a_r$$

Si avrà dunque:

$$R.S. = \frac{1}{B_m} \left[ \mathbf{p} - 2 \arctan \left( \frac{1}{B_m L_r} \coth \left( \frac{b}{L_r} \right) \right) \right] \quad (8)$$

Fissati i materiali della zona moltiplicante e del riflettore (ovvero fissati  $B_m$  ed  $L_r$ ) possiamo graficare l'andamento di R.S. al variare di  $b$ , si veda a questo proposito il primo grafico della pagina seguente. Nel caso si utilizzasse grafite, con

$$L_r = 47 \text{ cm}$$

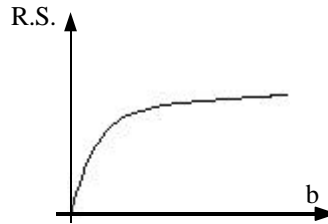
e una miscela caratterizzata dal seguente Buckling materiali:

$$B_m = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$

l'efficienza del riflettore sarebbe quella indicata nella seguente tabella:

Spessore del riflettore (b) (cm)	Reflector Saving (cm)
<b>1</b>	<b>2</b>
<b>5</b>	<b>10</b>
<b>25</b>	<b>46</b>
<b>100</b>	<b>91</b>
<b>500</b>	<b>94</b>
<b>1000</b>	<b>94</b>

Come possiamo vedere, tale tabella è divisa in due zone: nella prima zona (in grigio) il risparmio è pari, circa a  $2b$ , nella seconda zona (in bianco) si vede come il risparmio totale non può arrivare a superare  $2L_r$ .



L'andamento evidenziato dal grafico e dalla tabella può essere spiegato dal punto di vista analitico osservando che, qualora si abbia:

$$\frac{b}{L_r} \ll 1$$

ricordando il limite notevole secondo il quale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \coth x \approx \frac{1}{x}$$

la relazione (8) si riduce come segue:

$$R.S. = \frac{1}{B_m} \left[ p - 2 \operatorname{arc} \tan \left( \frac{1}{B_m b} \right) \right]$$

Sempre sfruttando i limiti notevoli abbiamo che, trovandosi in presenza dell'arctan di un numero molto grande, si può fare la seguente ulteriore semplificazione:

$$\operatorname{arc} \tan \left( \frac{1}{B_m b} \right) \approx \frac{p}{2} - B_m b$$

Combinando le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$R.S. = \frac{1}{B_m} \left[ p - 2 \left( \frac{p}{2} - B_m b \right) \right] = 2b$$

Abbiamo dunque la conferma analitica della prima parte della tabella. Quando, invece, si ha:

$$\frac{b}{L_r} \gg 1$$

possiamo fare riferimento al seguente limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \coth x \approx 1$$

La relazione (8) si riduce allora come segue:

$$R.S. = \frac{1}{B_m} \left[ p - 2 \operatorname{arc} \tan \left( \frac{1}{B_m L_r} \right) \right]$$

Sfruttiamo nuovamente la medesima semplificazione prima vista a proposito della tangente, in questa situazione si avrà:

$$\operatorname{arc} \tan \left( \frac{1}{B_m L_r} \right) \approx \frac{p}{2} - B_m L_r$$

che, combinata con la relazione precedente, mi permette di dimostrare l'andamento della seconda parte della tabella:

$$R.S. = \frac{1}{B_m} \left[ \mathbf{p} - 2 \left( \frac{\mathbf{p}}{2} - B_m L_r \right) \right] = 2L_r$$

**Il riflettore. Il rallentamento. Variazione della velocità con l'urto. Differenza tra Idrogeno e altri moderatori. Variazione dell'energia con l'urto. Urti successivi al primo.**

Nella lezione precedente eravamo arrivati ad scrivere la seguente relazione:

$$a_r = \frac{2}{B_m} \arctan \left[ \frac{1}{B_m L_r} \coth \left( \frac{b}{L_r} \right) \right] \quad (1)$$

che esprimeva il risparmio nel mezzo moltiplicante dovuto alla presenza di un riflettore. E' importante sottolineare che l'inserimento di un riflettore lascia inalterata la probabilità di fuga ma diminuisce il numero delle fughe effettive. Consideriamo ora, nel caso della geometria piana, il seguente rapporto:

$$\frac{f}{f_{\max}}$$

Quando siamo in presenza di un reattore nudo ricordiamo che il flusso è dato dalla seguente relazione:

$$f(x) = \cos \left( \frac{p}{a_n} x \right)$$

e quindi si avrà (ponendo per ipotesi pari ad 1 il flusso massimo):

$$\frac{f}{f_{\max}} = \frac{2 \int_0^{\frac{a_n}{2}} \cos \left( \frac{p}{a_n} x \right) dx}{a_n} = \frac{2}{p} \sin \left( \frac{p}{2} \right) = \frac{2}{p} = 0,64$$

Nel caso, invece, di reattore riflesso, ricaviamo, dalla relazione (1):

$$a_r B_m = 2 \arctan \left[ \frac{1}{B_m L_r} \coth \left( \frac{b}{L_r} \right) \right]$$

da cui si ottiene (ponendo ancora pari ad 1 il flusso massimo):

$$\frac{f}{f_{\max}} = \frac{2 \int_0^{\frac{a_n}{2}} \cos(B_m x) dx B_m}{a_r B_m} = \frac{2}{a_r B_m} \sin \left( \frac{B_m a_r}{2} \right) > 0,64$$

Un discorso identico può poi essere fatto anche per la geometria sferica e per la geometria cilindrica infinita. Alcuni problemi sorgono passando alle geometrie bidimensionali (come per esempio il caso del cilindro finito) perché risulta a volte problematica la separabilità; in questi casi, siccome non possiamo trattare la situazione da un punto di vista analitico, dovremo utilizzare metodi numerici.

Con questo abbiamo concluso il discorso sui neutroni termici ed è ora giunto il momento di occuparci del loro rallentamento.

Come abbiamo in precedenza accennato, i neutroni nascono nel reattore con un'energia di circa 2MeV e diventano termici solo dopo una serie di scattering elastici ai quali vanno incontro nel mezzo in cui si trovano. Occuparsi del rallentamento significa valutare quanti urti sono necessari e quanto tempo i neutroni impiegano per rallentare e diventare termici; possiamo inoltre valutare quale sia la distanza media percorsa prima di diventare termici. Nell'ambito del rallentamento è importante andare a valutare i contributi dovuti alle catture in risonanza da parte dell' $^{238}\text{U}$  e anche i contributi dovuti alle fissioni veloci con il medesimo isotopo. Infine, se il mezzo è finito, occorre tener presente quanti neutroni fuggono.

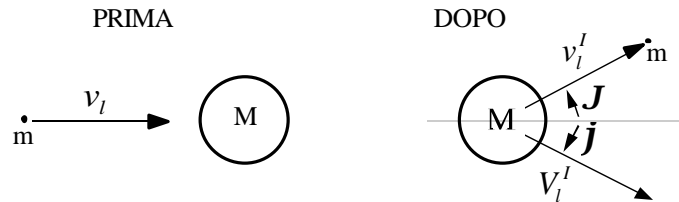
Iniziamo con il considerare una situazione abbastanza semplificata: supponiamo dunque di avere un mezzo omogeneo infinito con del moderatore puro. Questo ci permette di considerare, per ora, solo gli scattering elastici. La prima cosa che vogliamo stabilire è quanta energia perde un neutrone dopo un urto; anche in questo caso ci mettiamo in una situazione particolarmente semplificata nella quale i neutroni e i nuclei con i quali scatterano siano modellizzati come delle sfere rigide. La fisica nucleare ci assicura che lo scattering elastico è un fenomeno isotropo nel sistema del centro di massa; noi aggiungiamo l'ipotesi semplificativa che si sia in presenza di nuclei liberi (in quanto i neutroni sono talmente veloci che non vedono le molecole o i cristalli ma direttamente i nuclei) e fermi nel sistema del laboratorio (in quanto la velocità dovuta alla temperatura dei nuclei è molto inferiore rispetto alla velocità dei neutroni). Fin da ora possiamo comprendere come le ultime due ipotesi fatte siano molto verosimili all'inizio del processo di rallentamento mentre diventano meno buone verso la fine. Decidiamo, infine, di utilizzare le relazioni della meccanica classica (questa ipotesi sarà invece più verosimile alla fine del processo che non all'inizio) in quanto l'errore commesso usando le



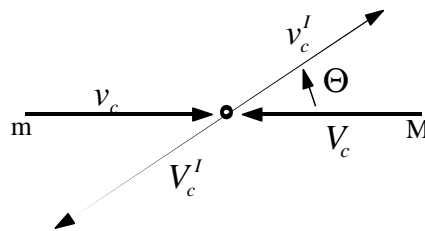
relazioni classiche piuttosto che le relazioni relativistiche è piccolo. Nella seguente tabella vediamo le velocità (cm/s) ricavate con le relazioni classiche e con le relazioni relativistiche per neutroni a differenti energie:

Energia dei neutroni	Velocità (classica)	Velocità (relativistica)
15 MeV	$5,36 \cdot 10^9$	$5,297 \cdot 10^9$
2 MeV	$1,96 \cdot 10^9$	$1,95 \cdot 10^9$
0,1 MeV	$4,377 \cdot 10^8$	$4,337 \cdot 10^8$

Ora che abbiamo imposto tutte queste ipotesi andiamo effettivamente a vedere cosa succede quando un neutrone colpisce un nucleo del moderatore. Nell'illustrazione seguente vediamo (anche se bisogna immaginare una rappresentazione in 3D) la situazione prima e dopo l'urto.



Questa rappresentazione esprime quanto avviene dal punto di vista del laboratorio e quindi tutte le velocità (come espresso nel loro pedice) sono le velocità relative al sistema di riferimento del laboratorio; Nel sistema di riferimento del centro di massa la schematizzazione delle velocità è invece la seguente:



Prima e dopo l'urto la quantità di moto del centro di massa è nulla e quindi si avrà:

$$\begin{cases} mv_c = MV_c \\ mv_c^I = MV_c^I \end{cases}$$

dalle quali si ricava:

$$\begin{cases} v_c = AV_c & (2) \\ v_c^I = AV_c^I & (3) \end{cases}$$

dove si è definito:

$$A = \frac{M}{m}$$

La velocità del centro di massa calcolata nel sistema del laboratorio sarà invece la seguente:

$$v_0 = \frac{mv_l}{m+M} = \frac{v_l}{A+1} \quad (4)$$

Applichiamo ora il principio della conservazione dell'energia cinetica che, nel sistema del centro di massa, si esprime come segue:

$$\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}MV_c^2 = \frac{1}{2}mv_c^{I2} + \frac{1}{2}MV_c^{I2}$$

ovvero:

$$v_c^2 + AV_c^2 = v_c^{I2} + AV_c^{I2}$$

Combiniamo ora il principio di conservazione dell'energia cinetica con il principio di conservazione della quantità di moto, ovvero combiniamo l'ultima relazione scritta con le relazioni (2) e (3), ottenendo:

$$A^2V_c^2 + AV_c^2 = A^2V_c^{I2} + AV_c^{I2}$$

dalla quale si ricava:

$$\begin{cases} v_c^I = v_c \\ V_c^I = V_c \end{cases}$$

Dunque, nel sistema del centro di massa i moduli delle velocità prima e dopo l'urto sono uguali e si ha solo deflessione. Sfruttiamo ora la relazione (4) per passare dal sistema del centro di massa al sistema del laboratorio. Prima dell'urto, dunque, avremo:

$$\begin{cases} \vec{v}_c = \vec{v}_l - \vec{v}_0 \\ \vec{V}_c = \vec{V}_l - \vec{v}_0 \end{cases}$$

ovvero, passando alla lettura scalare:

$$\begin{cases} v_c = v_l - v_0 \\ V_c = v_0 \end{cases}$$

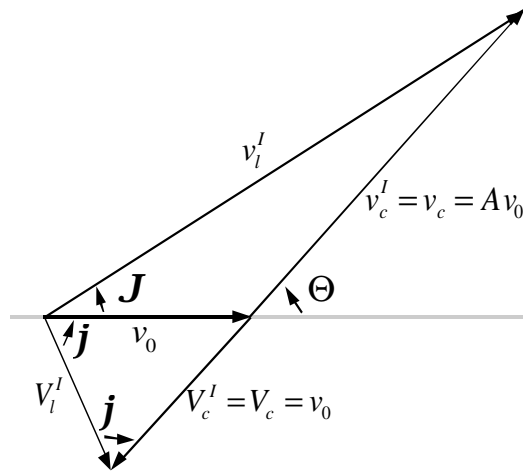
infatti il nucleo di massa M era stato considerato fermo nel sistema del laboratorio. Sfruttando, a questo punto, la relazione (4), si ricava:

$$\begin{cases} v_c = v_l \left( \frac{A}{A+1} \right) = Av_0 \\ V_c = v_0 \end{cases} \quad (5)$$

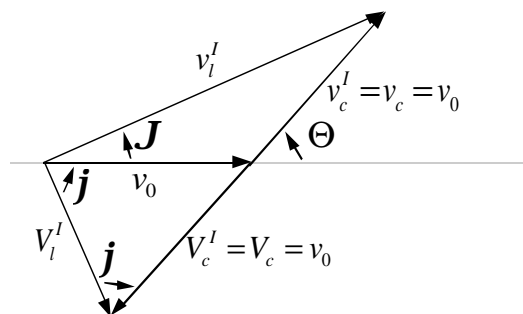
Dopo l'urto, invece, si avrà:

$$\begin{cases} \vec{v}_c^I = \vec{v}_l^I - \vec{v}_0 \\ \vec{V}_c^I = \vec{V}_l^I - \vec{v}_0 \end{cases}$$

Rappresentiamo ora graficamente quanto abbiamo appena visto, ottenendo:



Possiamo a questo punto distinguere due casi particolari: il caso in cui A=1 (ovvero quando abbiamo idrogeno come moderatore) e il caso in cui A>1 (ovvero quando facciamo riferimento a deuterio, ossigeno o grafite). Nel caso di A=1 la rappresentazione grafica viene leggermente modificata e si ha:



Definiamo i tre angoli che vediamo comparire nel disegno: gli angoli  $\theta$ ,  $\varphi$  e  $\Theta$  che sono, rispettivamente, l'angolo di deflessione del neutrone nel sistema di riferimento del laboratorio, l'angolo di deflessione del nucleo nel sistema di

riferimento del laboratorio e l'angolo di deflessione di neutrone nel sistema del centro di massa. Quando, come si vede nel secondo disegno,  $A=1$ , siamo in presenza di due triangoli isosceli e valgono le due seguenti relazioni tra gli angoli:

$$\begin{cases} 2\mathbf{j} + \Theta = \mathbf{p} \\ 2\mathbf{J} = \Theta \end{cases}$$

Da queste due relazioni si ricava che:

$$\mathbf{J} + \mathbf{j} = \frac{\mathbf{p}}{2}$$

L'angolo  $\Theta$  può variare tra 0 e  $\pi$  mentre gli angoli  $\theta$  e  $\varphi$  possono variare solo tra 0 e  $\pi/2$ . La situazione in cui  $\Theta = 0$  prende il nome di urto di sfioro; in corrispondenza di questa situazione si avrà che  $\varphi = \pi/2$  (in quanto si dovrà avere  $\theta = 0$ ) e si ha che il nucleo rimane fermo mentre il neutrone non viene deflesso e non perde velocità. La situazione opposta si ha quando l'urto è centrato, ovvero quando  $\Theta = \pi$ . In questo caso si ha che, come conseguenza,  $\varphi = 0$  (in quanto si dovrà avere  $\theta = \pi/2$ ). In questa situazione il neutrone si ferma con un solo urto e rimane con la sola energia di agitazione termica.

Quando siamo, invece, nella situazione con  $A > 1$ , tutti e tre gli angoli ( $\Theta$ ,  $\theta$  e  $\varphi$ ) possono variare tra 0 e  $\pi$  e quindi il neutrone può anche tornare indietro. In questo caso l'urto di sfioro e l'urto centrato sono definiti quando l'angolo  $\theta$  è pari, rispettivamente, a 0 o a  $\pi$ .

Torniamo ora a considerare il grafico relativo al caso generico (con  $A > 1$ ) e applichiamo il teorema di Carnot, secondo il quale:

$$v_l'^2 = v_0^2 + A^2 v_0^2 + 2Av_0^2 \cos \Theta = v_0^2 [A^2 + 2A \cos \Theta + 1] = v_l^2 \frac{A^2 + 2A \cos \Theta + 1}{(A+1)^2}$$

Da tale relazione, ovviamente, si ricava:

$$v_l' = v_l \sqrt{\frac{A^2 + 2A \cos \Theta + 1}{(A+1)^2}} \quad (6)$$

Riscrivendo tale relazione in termini di energia si ottiene:

$$E' = E_0 \frac{A^2 + 2A \cos \Theta + 1}{(A+1)^2}$$

Definiamo ora il parametro d'urto nel modo seguente:

$$\mathbf{a} = \left( \frac{A-1}{A+1} \right)^2$$

che, ovviamente, è nullo per l'Idrogeno e tende ad 1 con l'aumentare della massa. Combinando le due ultime relazioni scritte si ottiene dunque:

$$E' = \frac{E_0}{2} [(1+\mathbf{a}) + (1-\mathbf{a}) \cos \Theta] \quad (7)$$

Gli estremi delle energie possibili sono dunque:

$$\begin{cases} \{\Theta = 0\} \Rightarrow \{E'_{\max} = E_0\} \\ \{\Theta = \pi\} \Rightarrow \{E'_{\min} = \mathbf{a}E_0\} \end{cases}$$

Questo significa che l'Idrogeno è il moderatore migliore in assoluto in quanto, dopo un singolo urto, l'energia del neutrone può variare tra l'energia iniziale e zero mentre, con un moderatore più pesante, l'energia di un neutrone dopo un singolo urto varia tra l'energia iniziale ed un valore  $\mathbf{a}E_0$ .

Torniamo ora al grafico relativo al caso con  $A > 1$  dal quale possiamo verificare la validità della seguente relazione:

$$v_l' \cos \mathbf{J} = v_0 + v_c \cos \Theta$$

dalla quale si ricava, sfruttando le relazioni (4) e (5):

$$v_l' \cos \mathbf{J} = \frac{v_l}{A+1} + \frac{Av_l}{A+1} \cos \Theta = v_l \frac{A \cos \Theta + 1}{A+1}$$

ovvero:

$$\cos \mathbf{J} = \frac{v_l}{v_l'} \frac{A \cos \Theta + 1}{A+1}$$

che diventa, sfruttando la relazione (6):

$$\cos J = \frac{1 + A \cos \Theta}{\sqrt{A^2 + 2A \cos \Theta + 1}} \quad (8)$$

Ricordiamo ora l'ipotesi, vista all'inizio, secondo la quale lo scattering elastico era isotropo nel sistema del centro di massa; questa affermazione si può tradurre in una delle seguenti espressioni:

$$\begin{cases} P(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \\ P(\Theta) = \frac{\sin \Theta}{2} \\ P(\cos \Theta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{\cos \Theta} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Ovviamente c'è una relazione biunivoca tra l'energia e il  $\cos \Theta$  che ci autorizza a considerare la seguente relazione:

$$P(E') dE' = P(\cos \Theta) d \cos \Theta$$

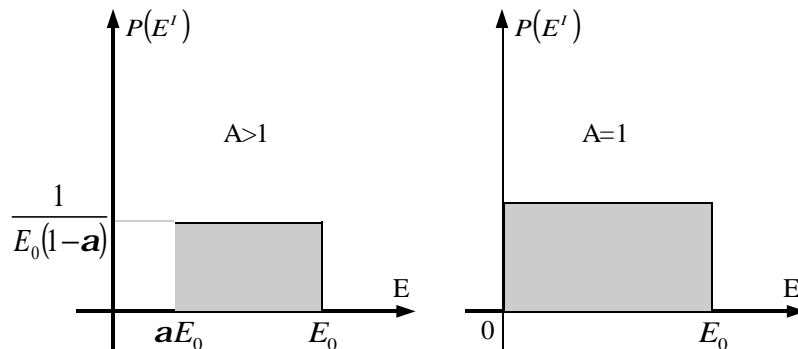
dalla quale si ricava:

$$P(E') = \frac{P(\cos \Theta)}{dE' / d \cos \Theta}$$

Sfruttando ora la relazione (7) si ricava:

$$P(E') = \frac{1}{2} \frac{1}{E_0(1-a)} = \frac{1}{E_0(1-a)}$$

Da un punto di vista grafico si avrà allora:



Possiamo dunque affermare che, a seconda che si sia nel caso di  $A > 1$  o di  $A = 1$ , l'energia media del neutrone dopo il primo urto è, rispettivamente:

$$\begin{cases} \overline{E'} = E_0 \left( \frac{1+a}{2} \right) \\ \overline{E'} = \frac{E_0}{2} \end{cases}$$

E' ovvio, quindi, che, più il nucleo è piccolo, più il rallentamento è efficace. Tutto il discorso fatto fino ad ora prende in esame un solo urto del neutrone con il moderatore; proseguiamo ora e andiamo a considerare gli urti successivi. Innanzitutto osserviamo che, partendo dalla relazione (8) e tenendo conto della definizione di valor medio, si ricava:

$$\overline{\cos J} = \int F(\cos \Theta) P(\cos \Theta) d \cos \Theta = \frac{2}{3A}$$

che vediamo tendere a zero quando  $A$  tende all'infinito; da questa relazione ricaviamo l'importante informazione secondo la quale, mediamente, i neutroni vengono deflessi in avanti. Torniamo ora, appunto, al problema degli urti successivi al primo: il nostro scopo sarà quello di trovare le densità di probabilità  $P_2(E)$  (ovvero dopo 2 urti),  $P_3(E)$  (ovvero dopo 3 urti), etc...

Mettiamoci innanzitutto nel caso semplice dell'Idrogeno e consideriamo la probabilità che, dopo il primo urto, i neutroni abbiano energia  $dE$ ; sfruttiamo allora la relazione:

$$P_2(E)dE = \int_E^{E_0} P_1(E')dE' \frac{dE}{E'}$$

Siccome il particolare intervallo di attesa è irrilevante, l'ultima relazione scritta si può così riscrivere:

$$P_2(E) = \int_E^{E_0} \frac{P_1(E')dE'}{E'} = \frac{1}{E_0} \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} = \frac{1}{E_0} \ln \frac{E_0}{E}$$

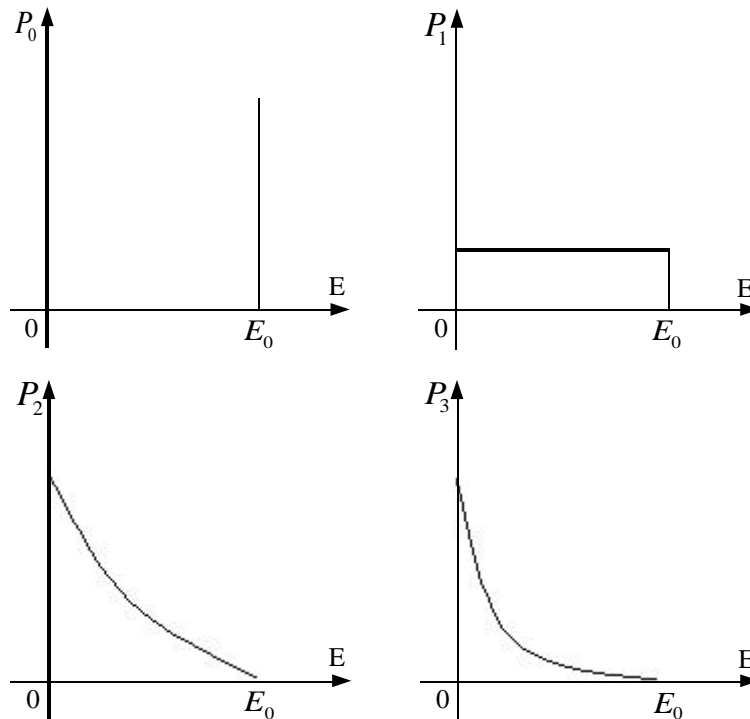
Analogamente si avrà poi:

$$P_3(E)dE = \int_E^{E_0} P_2(E')dE' \frac{dE}{E'}$$

dalla quale si ricava:

$$P_3(E) = \int_E^{E_0} \frac{P_2(E')dE'}{E'} = \frac{1}{E_0} \int_E^{E_0} \ln \left( \frac{E_0}{E'} \right) \frac{dE'}{E'} = \frac{1}{2E_0} \ln^2 \frac{E_0}{E}$$

Dal punto di vista grafico, dunque, gli andamenti delle probabilità di trovare neutroni di una certa energia dopo zero, uno, due e tre urti sono i seguenti:



Nel caso di un numero generico n di urti si avrà:

$$P_n(E) = \frac{1}{E_0 (n-1)!} \ln^{(n-1)} \frac{E_0}{E}$$

**Urti successivi al primo. La letargia. Energia media di un neutrone dopo n urti. Urti necessari per ottenere una particolare energia. Densità di rallentamento. Densità di collisione. Sorgente piatta.**

Nella lezione precedente eravamo arrivati ad esprimere la seguente relazione:

$$P_n(E) = \frac{1}{E_0(n-1)!} \ln^{(n-1)} \frac{E_0}{E} \quad (1)$$

Continuiamo ad assumere una situazione nella quale il moderatore sia omogeneo, infinito, composto da solo Idrogeno e tale per cui non possa esserci assorbimento, ovvero, tale per cui sia  $\Sigma_a = 0$

Affinché l'espressione della probabilità che abbiamo ricavato nella scorsa lezione sia consistente con un fenomeno fisico si deve ovviamente avere:

$$\int_0^{E_0} P_n(E) dE = 1$$

ovvero, combinando quest'ultima relazione con l'espressione (1)

$$\frac{1}{E_0(n-1)!} \int_0^{E_0} \ln^{n-1} \left( \frac{E_0}{E} \right) dE = 1 \quad (2)$$

Imponiamo ora che sia:

$$U = \ln \frac{E_0}{E}$$

dove U prende il nome di letargia. Si avrà:

$$E = E_0 e^{-U}$$

da cui si ricava:

$$dE = -E_0 e^{-U} dU$$

Inserendo quest'ultima espressione nella (2) si ricava:

$$\frac{E_0}{E_0(n-1)!} \int_0^{\infty} U^{n-1} e^{-U} dU = 1$$

ovvero:

$$\frac{E_0}{E_0(n-1)!} (n-1)! = 1$$

Quest'ultima espressione, che è un'identità, ci conferma il fatto che le distribuzioni trovate sono normalizzate. Ora cerchiamo l'energia media posseduta da un neutrone di energia iniziale  $E_0$  che ha subito n urti. Per fare questo dobbiamo utilizzare la relazione seguente:

$$\bar{E}_n = \int_0^{E_0} E P_n(E) dE$$

Esprimendo tale relazione in funzione della letargia si ricava:

$$\bar{E}_n = \frac{1}{E_0(n-1)!} \int_0^{E_0} \ln^{n-1} \left( \frac{E_0}{E} \right) E dE = \frac{E_0^2}{E_0(n-1)!} \int_0^{\infty} U^{n-1} e^{-2U} dU$$

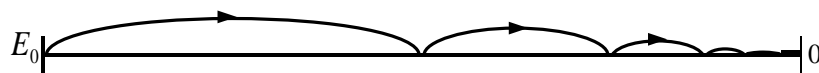
Consideriamo ora la seguente ulteriore sostituzione:

$$t = 2U$$

grazie alla quale si ottiene:

$$\bar{E}_n = \frac{E_0}{(n-1)!} \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{2^{n-1}} e^{-t} \frac{dt}{2} = \frac{E_0}{2^n}$$

Un grafico del comportamento del neutrone medio è dunque il seguente:



Esplicitando l'ultima relazione scritta rispetto al numero di urti si ricava:

$$n = \frac{\ln \frac{E_0}{E_n}}{\ln 2}$$

che non è altro che la relazione che esprime quanti urti sono necessari per ottenere neutroni con una particolare energia. Usando i numeri tipici che ci interessano (ovvero partendo da neutroni veloci di circa 2 MeV e arrivando a neutroni termici di circa 1 eV) si ottiene:  $n = \ln(2 \cdot 10^6) / \ln 2 = 20,93$ .

Fino ad ora abbiamo fatto riferimento ad una situazione nella quale il moderatore era Idrogeno puro e il mezzo era infinito e non assorbente; imponiamo ora l'ulteriore ipotesi secondo la quale all'interno del mezzo ci sia una distribuzione di sorgenti costante nel tempo ed uniforme nello spazio. La presenza di tali sorgenti implica che ci sia la produzione di un certo numero di neutroni per ogni centimetro cubo e per ogni secondo. Imponendo che sia presente una sorgente di questo tipo dobbiamo altresì imporre, affinché il numero di neutroni non diverga, che, dopo il rallentamento, ci sia assorbimento diverso da zero (continuiamo dunque ad ipotizzare che non ci sia assorbimento durante il rallentamento ma solamente dopo). Siccome durante il rallentamento non consideriamo nessuna perdita, possiamo definire la densità di rallentamento  $q(E)$  che non è altro che il numero di neutroni che superando un certo traguardo in energia (dimensionalmente tale densità si misura in neutroni per centimetro cubo e secondo). Avendo imposto la presenza della sorgente uniforme  $S$ , si avrà:

$$q(E) = S$$

Durante il rallentamento abbiamo supposto che i neutroni possano compiere solo reazioni di scattering e la fisica nucleare, a questo proposito, ci dice che  $\Sigma_s(E) \approx const$ .

Definiamo ora la densità di collisione che esprime gli eventi di scattering per ogni centimetro cubo, secondo ed unità di energia, tale grandezza viene indicata nel modo seguente:

$$F(E) = \Sigma_s(E) f(E) \quad (3)$$

dalla quale si ricava:

$$F(E) dE = \Sigma_s f dE$$

che esprime il numero di eventi di scattering che si verificano in ogni centimetro cubo e secondo, nell'intervallino di energia  $dE$ . Nelle ipotesi stazionarie che abbiamo fatto ci deve essere equilibrio tra l'uscita da  $dE$  e l'ingresso in  $dE$ ; quest'ultimo può essere espresso nel modo seguente:

$$Ingresso = S [P_1(E) + P_2(E) + \dots + P_n(E) + \dots] dE$$

Uguagliando dunque le ultime due relazioni scritte si ricava:

$$F(E) = S [P_1(E) + P_2(E) + \dots + P_n(E) + \dots]$$

ovvero, esplicitando le distribuzioni di probabilità:

$$F(E) = \frac{S}{E_0} \left[ 1 + \ln \frac{E_0}{E} + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{E_0}{E} + \dots + \frac{1}{n!} \ln^n \frac{E_0}{E} + \dots \right]$$

Esplicitando il tutto in funzione della letargia si ottiene:

$$F(E) = \frac{S}{E_0} \left[ 1 + U + \frac{U^2}{2} + \dots + \frac{U^n}{n!} + \dots \right] = \frac{S}{E_0} e^U$$

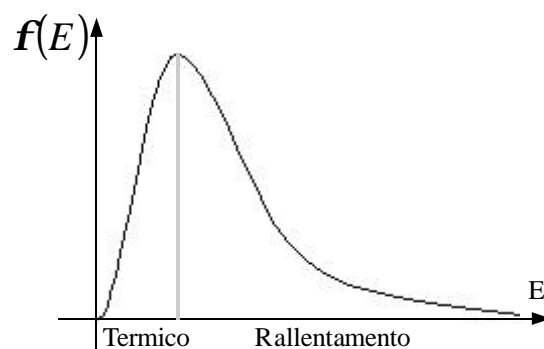
Combinando allora quest'ultima equazione con la relazione (3) si ricava:

$$F(E) = \Sigma_s(E) f(E) = \frac{S}{E}$$

dalla quale si ricava:

$$f(E) = \frac{S}{\Sigma_s(E) E} \approx \frac{1}{E}$$

Il flusso neutronico in funzione dell'energia può dunque essere descritto da un grafico come quello seguente:



**Libero cammino medio di trasporto. Descrizione del rallentamento con la letargia. Andamento delle probabilità con la letargia. Letargia media. Urti necessari per avere una certa letargia media. Legami non lineari tra grandezze. Andamento delle probabilità con la velocità. Sorgente uniforme. Rappresentazione fisica del rallentamento tramite la letargia. Moderatori più pesanti. Probabilità per i moderatori pesanti. Energia media senza l'utilizzo delle probabilità. Sorgente uniforme con i moderatori pesanti.**

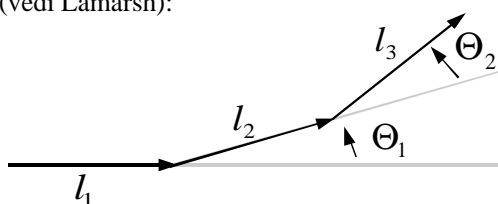
Continuiamo ad occuparci dell'Idrogeno come moderatore ed in particolare ricordiamo la relazione vista nella lezione 11 secondo la quale:

$$\overline{\cos J} = \frac{2}{3A}$$

che ovviamente, nel caso dell'Idrogeno, diventa:

$$\overline{\cos J} = \frac{2}{3}$$

Da questa relazione si deduce che la direzione originale del neutrone viene in qualche modo ricordata. Possiamo infatti considerare la seguente situazione (vedi Lamarsh):



Lo spazio percorso nella direzione originale è il seguente (che prende il nome di libero cammino medio di trasporto):

$$l_{tr} = l_s + l_s \overline{\cos J} + l_s (\overline{\cos J})^2 + \dots + l_s (\overline{\cos J})^n = \frac{l_s}{1 - \overline{\cos J}} \quad (1)$$

dove sia:

$$\overline{\cos J} = \overline{\cos J}$$

Possediamo ora informazioni che rendono necessario un ulteriore commento circa le ipotesi formulate con la teoria della diffusione. Soprattutto nel caso di Idrogeno, infatti, l'ipotesi di scattering isotropo nel sistema del laboratorio è poco applicabile poiché, come abbiamo appena visto, l'Idrogeno tende a deviare prevalentemente in avanti i neutroni scatterati durante il rallentamento. L'effetto di questa situazione è la modifica di alcune quantità come ad esempio il coefficiente D che avevamo definito come:

$$D = \frac{\sum_s}{3 \sum_{Tot}^2} = \frac{l_{Tot}^2}{3 l_s}$$

Si era poi inoltre visto che:

$$l_s \approx l_{Tot}$$

e quindi rimaneva:

$$D = \frac{l_s}{3}$$

Apportando la modifica legata alla relazione (1) avremo invece adesso:

$$D_{tr} = \frac{l_{tr}}{3}$$

Torniamo ora ad occuparci del rallentamento e, in particolare, ricordiamo la definizione di letargia:

$$U = \ln \frac{E_0}{E}$$

Traduciamo dunque tutto quello che abbiamo detto a proposito del rallentamento in termini di letargia. Innanzitutto osserviamo che il fatto che ci sia una relazione biunivoca tra U ed E ci permette di utilizzare la relazione:

$$P_n(E)dE = -P_n(U)dU$$

dalla quale si ricava:



$$P_n(U) = - \frac{P_n(E)}{dU/dE}$$

Siccome poi:

$$\frac{dU}{dE} = -\frac{1}{E}$$

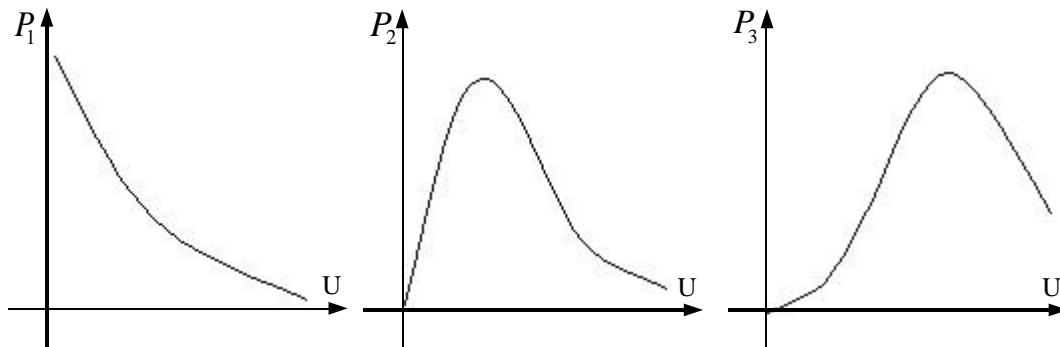
rimane:

$$P_n(U) = P_n(E)E$$

Quest'ultima relazione ci permette di ricavare molto rapidamente l'andamento delle probabilità in termini di letargia una volta che si conoscano gli andamenti delle probabilità in termini di energia; lo si vede molto bene nella seguente tabella:

Probabilità in energia	$P_n(U) = P_n(E)E$	Probabilità in letargia
$P_1(E) = \frac{1}{E_0}$	$P_1(U) = P_1(E)E = \frac{E}{E_0}$	$P_1(U) = e^{-U}$
$P_2(E) = \frac{1}{E_0} \ln \frac{E_0}{E}$	$P_2(U) = P_2(E)E = \frac{E}{E_0} \ln \frac{E_0}{E}$	$P_2(U) = Ue^{-U}$
$P_3(E) = \frac{1}{2E_0} \ln^2 \frac{E_0}{E}$	$P_3(U) = P_3(E)E = \frac{E}{2E_0} \ln^2 \frac{E_0}{E}$	$P_3(U) = \frac{U^2 e^{-U}}{2}$
...	...	...

L'andamento grafico delle prime tre probabilità in termini di letargia sarà allora il seguente:



La distribuzione dopo  $n$  urti sarà, nel caso della letargia:

$$P_n(U) = \frac{U^{n-1} e^{-U}}{(n-1)!}$$

Cerchiamo ora la letargia media di un neutrone che ha subito  $n$  urti, ricordando che l'energia media di un neutrone che aveva subito  $n$  urti era data dalla relazione:

$$\bar{E}_n = \frac{E_0}{2^n}$$

Nel caso della letargia, invece, si avrà:

$$\bar{U}_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} U^n e^{-U} dU = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

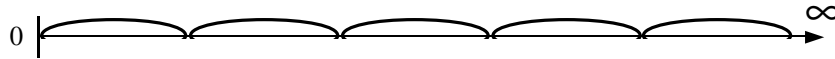
Questa relazione è particolarmente significativa in quanto implica che:

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_2 = 2 \\ \dots \\ U_n = n \end{cases}$$

e quindi:

$$\overline{\Delta U} = 1 \quad (2)$$

Questo significa che un grafico del comportamento del neutrone medio, in funzione della letargia, sarà:



Il numero di urti necessari per ottenere neutroni con una particolare energia media, era:

$$n_E = \frac{\ln \frac{E_0}{E}}{\ln 2}$$

Nel caso della letargia, invece, il numero di urti necessari per ottenere neutroni con una particolare letargia media sarà:

$$n_U = U = \ln \frac{E_0}{E}$$

Come si può notare, le ultime due relazioni scritte forniscono risultati diversi (a causa del legame non lineare tra E ed U) e quindi il passaggio dall'energia alla letargia non consente il trasporto dei valori medi. Si può dunque compilare una tabella come la seguente:

n	$\overline{E}$	$\overline{U}$
1	$\frac{E_0}{2}$	$\frac{E_0}{e}$
2	$\frac{E_0}{2^2}$	$\frac{E_0}{e^2}$
3	$\frac{E_0}{2^3}$	$\frac{E_0}{e^3}$
...	...	...

Un altro esempio di legame non lineare (come quello che c'è tra E ed U) è quello che esiste tra la velocità e l'energia; si ricordi infatti che esiste la relazione:

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

Se ora cerchiamo la probabilità in funzione della velocità dobbiamo innanzitutto considerare l'espressione:

$$\frac{dE}{dv} = mv$$

grazie alla quale si potrà scrivere:

$$P_1(v) = P_1(E) \frac{dE}{dv} = \frac{1}{E_0} mv$$

Imponendo poi che sia:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

si ricava:

$$P_1(v) = 2 \frac{v}{v_0^2}$$

Comprendiamo dunque la differenza tra l'andamento delle probabilità in funzione dell'energia e l'andamento delle probabilità in funzione della velocità che vediamo rappresentate nella prima immagine della pagina seguente. Ovviamente anche la probabilità espressa in funzione della velocità deve essere normalizzabile e quindi varrà la relazione:

$$\int_0^{v_0} P_1(v) dv = 1$$

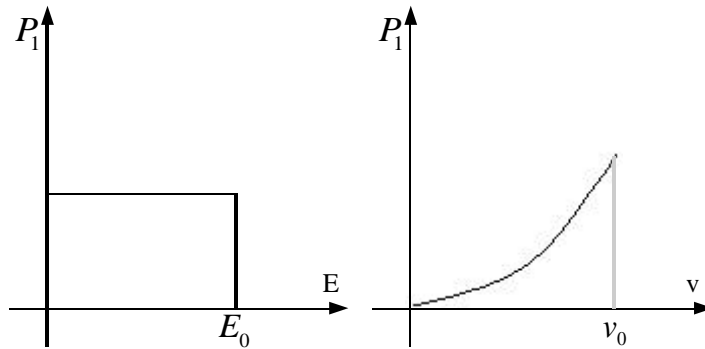
Per quanto riguarda, però i valori medi, si avrà:

$$\bar{v} = \frac{2}{v_0^2} \int_0^{v_0} v^2 dv = \frac{2}{3} v_0$$

(a cui corrisponde un'energia pari a  $4/9 E_0$ ).

L'energia media dopo il primo urto, invece, è data dalla relazione:

$$\bar{E} = \frac{E_0}{2}$$



Anche in questo caso, quindi, siccome il legame tra velocità ed energia non è lineare, i valori medi calcolati nei due modi non coincidono; in questo caso, siccome il legame tra energia e velocità è quadratico, affinché i valori medi coincidano non bisogna considerare la velocità ma il suo quadrato, si avrà allora:

$$\overline{v^2} = \frac{2}{v_0^2} \int_0^{v_0} v^3 dv = \frac{1}{2} v_0^2$$

Tale espressione coincide con l'espressione dell'energia media. Torniamo ora al legame tra l'energia e la letargia ed introduciamo, anche per questo secondo modo di descrivere il rallentamento, la sorgente uniforme; nel caso dell'energia eravamo giunti ad una relazione del tipo:

$$F(E) = \frac{S}{E}$$

Siccome nel passaggio dall'energia alla letargia c'è solamente una moltiplicazione per E, la rispettiva relazione nell'ambito della letargia sarà:

$$F(U) = S \quad (3)$$

Siccome poi, qualunque sia il metodo di rappresentazione, continuano a valere tutti i discorsi sull'assenza di fughe e assorbimenti visti in precedenza, si avrà:

$$\begin{cases} q(E) = S \\ q(U) = S \end{cases}$$

Da quanto abbiamo visto fino ad ora appare evidente che usare la letargia ci permette di avere una visione più semplice del fenomeno del rallentamento. Tornando alla relazione (3) vediamo come una sua diretta conseguenza sia:

$$f(U) = const$$

Ciò non è in contraddizione con la relazione secondo la quale:

$$f(E) \div \frac{1}{E}$$

in quanto si ha che:

$$|dU| = \frac{dE}{E}$$

Se vogliamo dare una rappresentazione fisica in termini di letargia di cosa succede durante il rallentamento possiamo iniziare considerando la seguente relazione:

$$f(U) = n(U)v(U) = const$$

e ricordare poi che è:

$$E = E_0 e^{-U}$$

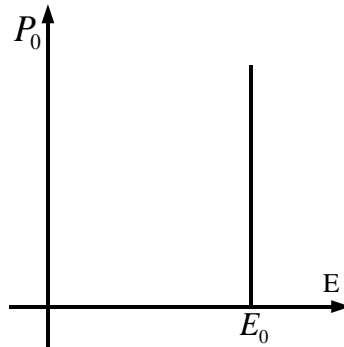
dalla quale si ricava:

$$v = v_0 e^{-U/2}$$

Fisicamente ci possiamo dunque raffigurare una scena nella quale, all'inizio, ci siano pochi neutroni che si muovono velocemente di passo costante mentre, alla fine, ci saranno molti neutroni che si muovono lentamente di passo costante; il fatto che rimanga costante il flusso viene in questa visione schematizzato dal fatto che rimane costante il numero dei passi fatti. Con questo possiamo considerare concluso il discorso sull'Idrogeno puro usato come moderatore. Rimaniamo dunque nelle medesime ipotesi imposte fino ad ora ma consideriamo un moderatore più pesante dell'Idrogeno, ovvero un moderatore per il quale si abbia  $A > 1$ . Siccome continuano a non esserci né fughe né catture, continua ad essere valida la seguente relazione:

$$q(E) = q(U) = S$$

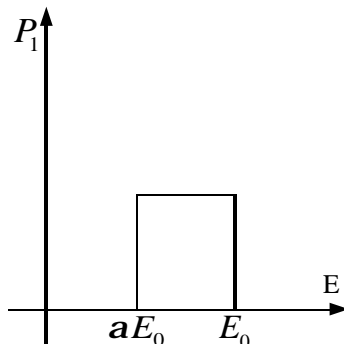
Il grafico dell'andamento della probabilità dopo nessun urto continua ad essere il medesimo, ovvero:



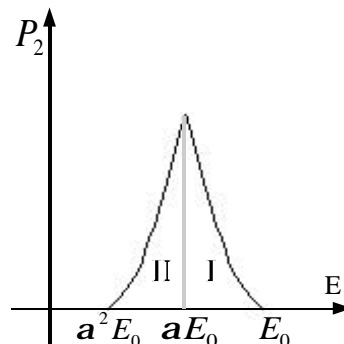
Per quanto riguarda, invece, la probabilità dopo il primo urto, molto semplicemente si avrà:

$$P_1(E) = \frac{1}{E_0(1-a)}$$

e quindi il grafico sarà:



Il fatto che l'intervallo tra 0 e l'energia iniziale  $E_0$  risulti ora suddiviso in due parti che presentano una probabilità differente dopo il primo urto, implica che la probabilità relativa al secondo urto vada studiata in due intervalli distinti. In effetti l'andamento grafico della probabilità relativa al secondo urto sarà qualcosa del genere:

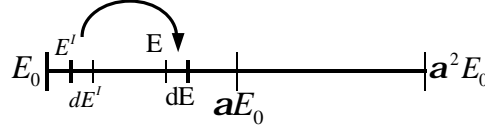


La probabilità dopo il secondo urto va dunque studiata in due intervalli distinti: nel primo intervallo ci occupiamo dei neutroni che, dopo il primo urto, sono nella zona I e che, dopo il secondo urto, rimangono nella medesima zona, ovvero si analizza la situazione schematizzata nella prima illustrazione della pagina seguente. Si avrà quindi:

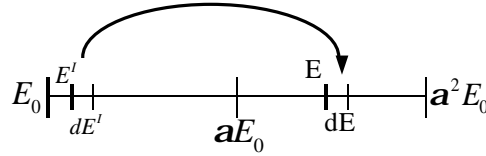
$$P_2^I(E)dE = \int_E^{E_0} P_1(E') dE' \frac{dE}{E'(1-a)}$$

ovvero:

$$P_2^I(E) = \int_E^{E_0} P_1(E') \frac{dE'}{E'(1-a)} = \frac{1}{E_0(1-a)^2} \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} = \frac{1}{E_0(1-a)^2} \ln \frac{E_0}{E}$$



Nel secondo intervallo ci occupiamo dei neutroni che, dopo il primo urto, sono nella zona I e che, dopo il secondo urto, finiscono nella zona II; si analizza quindi la situazione schematizzata qui di seguito.



Si avrà allora:

$$P_2^{II}(E)dE = \int_{aE_0}^{E/a} P_1(E') dE' \frac{dE}{E'(1-a)}$$

e quindi:

$$P_2^{II}(E) = \int_{aE_0}^{E/a} P_1(E') \frac{dE'}{E'(1-a)} = \frac{1}{E_0(1-a)^2} \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} = \frac{1}{E_0(1-a)^2} \ln \frac{E}{a^2 E_0}$$

Facendo attenzione agli estremi di integrazione notiamo che, in quest'ultima espressione, il primo estremo di integrazione non è più E ma è  $aE_0$  poiché tanto, prima di tale valore la  $P_1$  è nulla; per quanto riguarda il secondo estremo di integrazione si osservi che, se per muoversi nel disegno da sinistra a destra è necessario moltiplicare per  $\alpha$ , per muoversi sul medesimo grafico da destra a sinistra sarà necessario dividere per  $\alpha$ . Osservando le due parti nella quale risulta scomposta la  $P_2$  possiamo osservare che entrambe le relazioni daranno lo stesso risultato in corrispondenza di  $aE_0$  ma che il raccordo tra le due parti si limita a questo; la derivata, infatti, sarà differente arrivando in tale punto da sinistra piuttosto che da destra. Una volta calcolata in questo modo la  $P_2$  potremmo reiterare il discorso e calcolare anche la  $P_3$ : in questo caso sarebbe necessario suddividere lo studio nei tre intervalli  $(E_0, aE_0)$ ,  $(aE_0, a^2 E_0)$  ed  $(a^2 E_0, a^3 E_0)$ . Riassumendo avremo, allora:

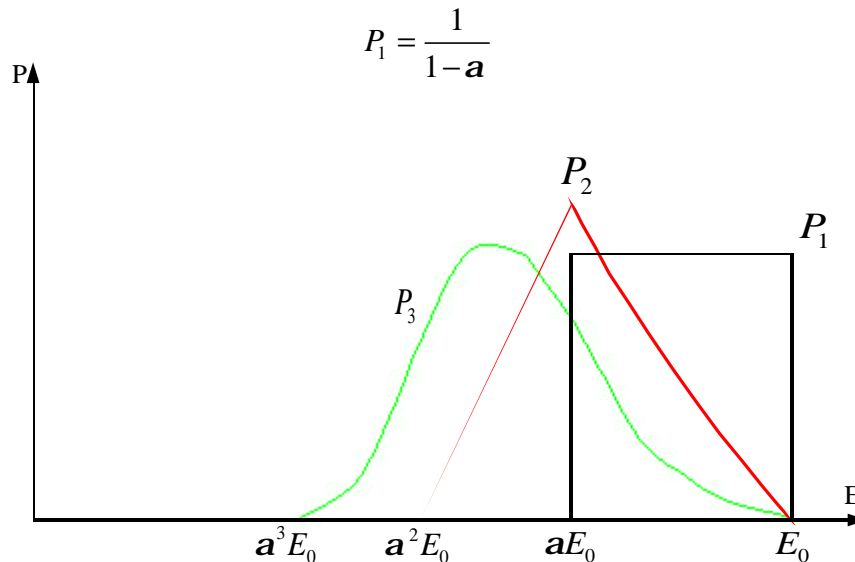
$$P_1 = \frac{1}{E_0(1-a)} \quad E_0 \rightarrow aE_0$$

$$P_2 \left\{ \begin{array}{l} I \quad \frac{1}{E_0(1-a)^2} \ln \frac{E_0}{E} \quad E_0 \rightarrow aE_0 \\ II \quad \frac{1}{E_0(1-a)^2} \ln \frac{E}{a^2 E_0} \quad aE_0 \rightarrow a^2 E_0 \end{array} \right.$$

$$P_3 \left\{ \begin{array}{l} I \quad \frac{1}{2E_0(1-a)^3} \ln^2 \frac{E_0}{E} \quad E_0 \rightarrow aE_0 \\ II \quad \frac{1}{2E_0(1-a)^3} \left[ 2 \ln^2 \frac{1}{a} - \ln^2 \frac{E}{a^2 E_0} - \ln^2 \frac{aE_0}{E} \right] \quad aE_0 \rightarrow a^2 E_0 \\ III \quad \frac{1}{2E_0(1-a)^3} \ln^2 \frac{E}{a^3 E_0} \quad a^2 E_0 \rightarrow a^3 E_0 \end{array} \right.$$

La rappresentazione grafica delle tre probabilità nel caso del carbonio (per il quale si ha  $\alpha=0,716$ ) si può vedere nella prima immagine della pagina seguente; da tale immagine osserviamo che la  $P_3$  è continua anche con la sua derivata prima (mentre un calcolo approfondito dimostrerebbe la non continuità della derivata seconda).

Come abbiamo visto il calcolo delle probabilità diventa, già dopo il secondo urto, particolarmente macchinoso; proprio per questo motivo, allora, si rinuncia all'utilizzo delle  $P_n(E)$ . Si osserva, inoltre, che anche avendo a disposizione tutte le  $P_n(E)$ , si avrebbero comunque dei problemi al bordo del primo intervallo, ovvero in  $aE_0$  poiché comunque si ha:



Il problema al bordo del primo intervallo dipende ovviamente da  $\alpha$ . Nel caso rappresentato (che si riferisce, lo ricordiamo alla grafite) si ha:

$$a = \left( \frac{A-1}{A+1} \right)^2 = 0,716$$

e quindi si avrà:

$$P_1 = 3,53$$

Tanto più grande è  $\alpha$  e tanto più la differenza è maggiore e tanto più il punto che crea problemi è vicino all'energia iniziale; tanto più  $\alpha$  è piccolo, tanto più la differenza è minore e tanto più il punto problematico si trova lontano dall'energia iniziale.

Siccome, come si è detto, rinunciamo al calcolo dei  $P_n(E)$  in quanto troppo complicati, dobbiamo trovare un modo diverso per poter calcolare l'energia media di un neutrone che ha subito  $n$  urti; ricordiamo allora la seguente relazione:

$$E_1 = \frac{E_0}{2} [(1+a) + (1-a)\cos\Theta_1] \quad (4)$$

Dopo un secondo urto possiamo supporre di avere:

$$E_2 = \frac{E_1}{2} [(1+a) + (1-a)\cos\Theta_2]$$

ovvero:

$$E_2 = \frac{E_0}{2^2} [(1+a) + (1-a)\cos\Theta_1][(1+a) + (1-a)\cos\Theta_2]$$

e quindi in generale si avrà:

$$E_n = \frac{E_0}{2^n} \prod_{i=1}^n [(1+a) + (1-a)\cos\Theta_i]$$

Siccome stiamo cercando l'energia media consideriamo la seguente relazione:

$$\bar{E}_n = \frac{E_0}{2^n} \prod_{i=1}^n [(1+a) + (1-a)\cos\Theta_i]$$

Ricordando però che:

$$\overline{\cos\Theta} = 0$$

e che i vari contributi sono tutti scorrelati tra di loro, si ottiene:

$$\bar{E}_n = \frac{E_0}{2^n} (1+a)^n = E_0 \left( \frac{1+a}{2} \right)^n$$

Da questa relazione è poi possibile ricavare il numero di urti necessari per ottenere neutroni con una certa energia:

$$n_E = \frac{\ln \frac{E_0}{E}}{\ln \frac{1+a}{2}} \quad (5)$$

Ora che possiamo valutare il numero di urti necessari per ottenere neutroni di una certa energia sia per l'Idrogeno che per moderatori più pesanti, possiamo fare un primo raffronto: partendo da neutroni veloci e volendo ottenere neutroni termici (circa 1 eV) il numero di urti necessari nel caso di Idrogeno e Carbonio (Grafite) è:

$$\begin{cases} n_{1eV}^H = 20,93 \\ n_{1eV}^C = 94,74 \end{cases}$$

Abbiamo trovato dunque un'ulteriore conferma del fatto che l'Idrogeno è il miglior moderatore in assoluto. Rivediamo ora il medesimo discorso nel caso della letargia; partiamo dunque dalla relazione:

$$\bar{U}_1 = \ln \frac{E_0}{E_1} = \ln \frac{2E_0}{E_1 [(1+a) + (1-a) \cos \Theta]}$$

dove il contributo  $E_1$  può essere ricavato dalla relazione (4). Per semplicità di notazione poniamo:

$$X = \frac{(1+a) + (1-a) \cos \Theta}{2}$$

Combinando allora le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$\bar{U}_1 = -\overline{\ln X} = -\int_a^1 \ln X P_1(x) dx = -\frac{1}{1-a} \int_a^1 \ln X dx = \frac{1}{1-a} \int_1^a \ln X dx = \frac{[X \ln X - X]_1^a}{1-a} = 1 + \frac{a}{1-a} \ln a$$

Ancora per semplicità di notazione poniamo:

$$1 + \frac{a}{1-a} \ln a = x$$

Si avrà dunque:

$$\bar{U}_1 = x$$

Passando al secondo urto avremo ora:

$$\bar{U}_2 = \ln \frac{E_0}{E_2} = -\ln \frac{1}{X_1 X_2} = \overline{\ln X_1} + \overline{\ln X_2} = 2x$$

e, in generale:

$$\bar{U}_n = nx \quad (6)$$

Da quest'ultima relazione si ricava che:

$$\overline{\Delta U} = x$$

che possiamo confrontare con la relazione (2) che è l'equivalente nel caso dell'idrogeno. A partire dalla relazione (6) possiamo ricavare, a questo punto, il numero di urti necessari per avere neutroni con una certa letargia media:

$$n_U = \frac{U}{x} = \frac{\ln \frac{E_0}{E}}{x}$$

Confrontando quest'ultima relazione con la relazione (5) osserviamo, nuovamente, che i risultati sono diversi a seconda del punto di vista utilizzato perché il legame tra letargia ed energia non è lineare. Il numero medio di urti sarà dato dalla seguente relazione:

$$\bar{n}_U = \frac{1}{S} \int_0^U F(U) dU + 1 = U + 1$$

Nella tabella seguente vediamo alcuni valori numerici di alcuni materiali caratteristici di un reattore nucleare.

Elemento o isotopo	A	$\alpha$	$\xi$	$n_E^*$ (2 MeV→1eV)	$n_U^*$ (2 MeV→1eV)
H	1	0	1	20,93	14,51
D	2	0.111	0,725	24,7	20
C	12	0,716	0,158	94,73	91,8
O	16	0,7785	0,120	124	121
U	238	0,983	0,0084	1730	1731

\* Osserviamo che, crescendo il numero di massa,  $n_E$  e  $n_U$  diventano sempre più simili.

Torniamo ora al discorso legato alla sorgente uniforme in idrogeno puro e ricordiamo la relazione secondo la quale:

$$F(E) = \frac{S}{E} \quad (7)$$

Ci proponiamo di arrivare a questo risultato tramite un'altra strada. Si considera un approccio globale legato al bilancio tra gli ingressi e le uscite:

$$F(E)dE = \int_E^{E_0} F(E') dE' \frac{dE}{E'} + \frac{SdE}{E_0}$$

dalla quale si ricava:

$$F(E) = \int_E^{E_0} F(E') \frac{dE'}{E'} + \frac{S}{E_0}$$

Derivando tale relazione si ricava:

$$\frac{dF}{dE} = -\frac{F(E)}{E}$$

separando le variabili:

$$\frac{dF}{F} = -\frac{dE}{E}$$

Si integra poi questa relazione:

$$\int_E^{E_0} \frac{dF}{F} = -\int_E^{E_0} \frac{dE}{E}$$

e si ricava:

$$\ln \frac{F(E_0)}{F(E)} = -\ln \frac{E_0}{E}$$

dalla quale ricava ancora la relazione (7) che era quella che stavamo cercando. Il fatto che questo approccio funzioni nel caso dell'Idrogeno, ci porta a pensare che sia possibile usarlo anche nel caso di elementi più pesanti.



**Sorgente uniforme con i moderatori pesanti. Moderatori misti. Spazio e tempo di rallentamento.**

Nella scorsa lezione avevamo visto che l'approccio globale con il quale trattavamo la sorgente uniforme nel caso dell'Idrogeno funzionava e quindi ci eravamo riproposti, cosa che facciamo ora, di applicarlo anche al caso di moderatori pesanti. Come prima cosa sarà dunque necessario specificare gli intervalli I, II, III, IV, etc... da cui deriveranno  $F_I$ ,  $F_{II}$ ,  $F_{III}$ ,  $F_{IV}$  etc... Incominciamo allora con il primo intervallo nel quale, siccome siamo in presenza della sorgente, dobbiamo considerare la seguente relazione:

$$F_I(E)dE = \int_E^{E_0} F_I(E')dE' \frac{dE}{E'(1-a)} + \frac{SdE}{E_0(1-a)}$$

dalla quale si ricava:

$$F_I(E) = \int_E^{E_0} F_I(E') \frac{dE'}{E'(1-a)} + \frac{S}{E_0(1-a)} \quad (1)$$

Mettendosi nel secondo intervallo si avrà invece:

$$F_{II}(E) = \int_E^{aE_0} F_{II}(E') \frac{dE'}{E'(1-a)} + \int_{aE_0}^{E/a} F_I(E') \frac{dE'}{E'(1-a)} \quad (2)$$

In questo intervallo la sorgente non è più presente ma ho dovuto spezzare l'integrale in due parti. Per il terzo intervallo si avrà:

$$F_{III}(E) = \int_E^{a^2E_0} F_{III}(E') \frac{dE'}{E'(1-a)} + \int_{a^2E_0}^{E/a} F_{II}(E') \frac{dE'}{E'(1-a)} \quad (3)$$

Anche in questo caso si deve spezzare l'integrale in due parti perché si lavora sempre a cavallo di due intervalli. Per vedere cosa succede a cavallo degli intervalli valuto le relazioni (1) e (2) in corrispondenza di  $aE_0$  e così vedo cosa succede al bordo tra il primo e il secondo intervallo; si avrà dunque:

$$\begin{cases} F_I(aE_0) = \int_{aE_0}^{E_0} F_I(E') \frac{dE'}{E'(1-a)} + \frac{S}{E_0(1-a)} \\ F_{II}(aE_0) = \int_{aE_0}^{aE_0} F_{II}(E') \frac{dE'}{E'(1-a)} + \int_{aE_0}^{E_0} F_I(E') \frac{dE'}{E'(1-a)} \end{cases}$$

La differenza tra queste due espressioni sarà:

$$F_I(aE_0) - F_{II}(aE_0) = \frac{S}{E_0(1-a)}$$

La differenza è dunque data esclusivamente dal contributo proveniente dai neutroni di sorgente che subiscono il primo urto. Si valuti ora la relazione 2) e la relazione (3) in corrispondenza di  $a^2E_0$  per esaminare il bordo tra il secondo e il terzo intervallo; si avrà dunque:

$$\begin{cases} F_{II}(a^2E_0) = \int_{a^2E_0}^{aE_0} F_{II}(E') \frac{dE'}{E'(1-a)} + \int_{aE_0}^{aE_0} F_I(E') \frac{dE'}{E'(1-a)} \\ F_{III}(a^2E_0) = \int_{a^2E_0}^{a^2E_0} F_{III}(E') \frac{dE'}{E'(1-a)} + \int_{a^2E_0}^{aE_0} F_{II}(E') \frac{dE'}{E'(1-a)} \end{cases}$$

La differenza tra queste due espressioni sarà dunque:

$$F_{II}(a^2E_0) - F_{III}(a^2E_0) = 0$$

In questo caso si troverebbe una discontinuità sulla derivata prima. Proseguendo in questo modo si troverebbero discontinuità sulle derivate di ordine sempre più alto. Ponendoci in un punto lontano dall'energia di sorgente siamo dunque sicuri di trovarci di fronte ad una funzione continua con alcune delle sue derivate. Mettendosi infatti sul bordo dell'intervallo n-esimo si avrà:

$$F_n(E) = \int_E^{a^{n-1}E_0} \frac{F_n(E^I) dE^I}{E^I(1-a)} + \int_{a^{n-1}E_0}^{E/a} \frac{F_{n-1}(E^I) dE^I}{E^I(1-a)} \approx \int_E^{E/a} \frac{F(E^I) dE^I}{E^I(1-a)} = F(E)$$

Abbiamo così fatto un'approssimazione che sarà tanto più buona quanto più  $n$  è grande. Guidati dal risultato dell'Idrogeno e osservando che  $F$  deve essere crescente per  $E$  che diminuisce, poniamo:

$$F(E) = \frac{C}{E} \quad (4)$$

Tale imposizione è assolutamente compatibile in quanto si ha:

$$\frac{C}{E} = \frac{C}{1-a} \int_E^{E/a} \frac{dE^I}{E^{I2}} = \frac{C}{1-a} \left( \frac{1}{E} - \frac{a}{E} \right) = \frac{C}{1-a} \frac{1-a}{E} = \frac{C}{E}$$

Per trovare  $C$  ricordiamo l'ipotesi che continua ad essere valida secondo la quale:

$$q(E) = S$$

Nel caso in analisi si ha:

$$q(E) = \int_E^{E/a} F(E^I) dE^I \frac{E - E^I a}{E^I(1-a)} = S$$

Combinando quest'ultima relazione con l'espressione (4) si ottiene:

$$\frac{C}{1-a} \int_E^{E/a} \frac{E - E^I a}{E^{I2}} = S$$

dalla quale ricaviamo:

$$S = \frac{C}{1-a} \left[ E \left( \frac{1}{E} - \frac{a}{E} \right) - a \ln \frac{1}{a} \right] = \frac{C}{1-a} [(1-a) + a \ln a] = C \left( 1 + \frac{a}{1-a} \ln a \right)$$

Ricordando poi la relazione:

$$x = 1 + \frac{a}{1-a} \ln a$$

si ottiene:

$$S = Cx$$

da cui:

$$C = \frac{S}{x}$$

Si avrà allora:

$$F(E) = \frac{S}{xE} \quad (5)$$

Questo risultato è tanto più credibile quanto più siamo lontani dall'energia di sorgente; solitamente si pone:

$$E \ll a^3 E_0$$

Nella relazione (5) ritroviamo anche il caso dell'Idrogeno anche se bisogna sottolineare una importante differenza: nel caso dell'Idrogeno il risultato al quale si è pervenuti è esatto mentre nel caso di  $A > 1$ , come abbiamo detto, si tratta di una approssimazione. Trascrivendo la relazione (5) in termini di letargia si ottiene:

$$F(U) = \frac{S}{x}$$

e quindi:

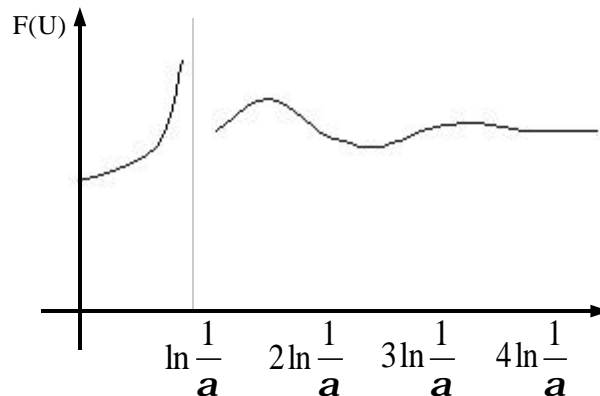
$$f(U) = \frac{S}{x \Sigma_s}$$

Anche nella rappresentazione con la letargia troviamo degli intervalli che, però, sono caratterizzati dall'avere i bordi in

$0, \ln \frac{1}{a}, 2 \ln \frac{1}{a}, 3 \ln \frac{1}{a}$  etc... Si osserva dunque che la lunghezza degli intervalli è costante. Dal punto di vista grafico

avremo allora la situazione rappresentata nella prima immagine della pagina seguente. In tale immagine vediamo l'andamento sinusoidale della  $F$  che è dovuto alla discontinuità che, progressivamente, si sposta sulle derivate di ordine superiore; si nota inoltre che, come abbiamo accennato in precedenza, l'approssimazione è buona oltre i primi tre

intervalli. La discontinuità dovuta all'immissione dei neutroni di sorgente si attenua un po' pensando che non tutti i neutroni della sorgente hanno energia esattamente pari a 2 MeV; anche i neutroni di sorgente, infatti, sono distribuiti secondo una curva ~ Maxwelliana che smussa le discontinuità.



Osserviamo infine che, introdurre dell'  $^{238}\text{U}$  nel moderatore equivale, a causa della presenza delle risonanze (che sono quasi delle delta di Dirac) ad inserire delle sorgenti negative; siccome la presenza della sorgente positiva genera dei problemi, è logico aspettarsi problemi simili anche nel caso della sorgenti negative. L'approssimazione fatta è però ancora valida perché le risonanze più significative dell'  $^{238}\text{U}$  sono tutte ad alte energie ma comunque ad una certa distanza dall'energia di sorgente.

Fino ad ora abbiamo parlato di Idrogeno o di sostanze con  $A > 1$  che comunque fossero composte da una singola specie atomica (come nel caso della grafite), è ora necessario fare riferimento a moderatori composti da più specie chimiche. Si è infatti visto che il moderatore migliore in assoluto è l'Idrogeno, non è però pensabile utilizzare l'Idrogeno puro come moderatore ed esso infatti appare, nei moderatori più comuni, legato ad altri elementi:  $\text{H}_2\text{O}$  o anche  $\text{D}_2\text{O}$ . Vediamo dunque cosa è possibile dire sul rallentamento in mezzi misti e facciamo per semplicità riferimento all'acqua. L'acqua è composta da Idrogeno ed Ossigeno, per i quali si hanno i seguenti valori:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_H = 0 \\ \mathbf{a}_O = 0,7785 \end{cases}$$

Facendo riferimento ad un moderatore composto da nuclei di tipo A e nuclei di tipo B, per poter gestire la situazione sarà necessario conoscere, per ogni tipo di nuclei, l' $\alpha$  e la  $\Sigma_s$ . La sezione d'urto di scattering macroscopica totale sarà infatti:

$$\Sigma_s^{Tot} = \Sigma_s^A + \Sigma_s^B$$

Bisogna inoltre conoscere la probabilità che il neutrone urti un tipo di nucleo piuttosto che l'altro, tali probabilità si esprimono nel modo seguente:

$$\begin{cases} P_A = \frac{\Sigma_s^A}{\Sigma_s^{Tot}} \\ P_B = \frac{\Sigma_s^B}{\Sigma_s^{Tot}} \end{cases}$$

Ovviamente sarà valida la seguente relazione:

$$P_A + P_B = 1 \quad (6)$$

Cerchiamo allora l'energia media di un neutrone dopo un urto in un mezzo misto; se ci fosse solo il mezzo A si avrebbe:

$$\bar{E}_{1A} = E_0 \left( \frac{1 + \mathbf{a}_A}{2} \right)$$

Mentre se ci fosse solo il mezzo B sarebbe:

$$\bar{E}_{1B} = E_0 \left( \frac{1 + \mathbf{a}_B}{2} \right)$$

E' dunque logico supporre che, complessivamente, si debba avere:

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_{1A} P_1 + \bar{E}_{2A} P_2 = E_0 \left( \frac{1 + \mathbf{a}_A}{2} \right) P_A + E_0 \left( \frac{1 + \mathbf{a}_B}{2} \right) P_B = \frac{E_0}{2} [(1 + \mathbf{a}_A) P_A + (1 + \mathbf{a}_B) P_B]$$

Sfruttando la relazione (6) si avrà allora:

$$\bar{E}_1 = \frac{E_0}{2} [P_A + P_B + \mathbf{a}_A P_A + \mathbf{a}_B P_B] = \frac{E_0}{2} [1 + \mathbf{a}_A P_A + \mathbf{a}_B P_B]$$

Siccome nel mezzo singolo si aveva:

$$\bar{E}_1 = \frac{E_0}{2} [1 + \mathbf{a}]$$

è logico supporre che tutti i discorsi visti nel caso del mezzo singolo sono applicabili in maniera perfettamente identica anche nel caso del mezzo misto, pur di utilizzare un  $\alpha$  medio così definito:

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_A P_A + \mathbf{a}_B P_B$$

Nel caso si considerino, invece, due urti, osserviamo come le possibili strade evolutive per il neutrone sarebbero quattro, che di seguito vediamo indicate insieme con le associate probabilità:

$$\begin{cases} AA \rightarrow P_A^2 \\ AB \rightarrow P_A P_B \\ BA \rightarrow P_B P_A \\ BB \rightarrow P_B^2 \end{cases}$$

Ovviamente la situazione AB e la situazione BA sono assolutamente identiche e quindi si avrà:

$$\begin{cases} AA \rightarrow P_A^2 \\ AB \rightarrow 2P_A P_B \\ BB \rightarrow P_B^2 \end{cases}$$

L'energia media di un neutrone dopo due urti in un mezzo misto può allora essere espressa nel modo seguente:

$$\bar{E}_2 = \bar{E}_{2A} P_A^2 + \bar{E}_{2B} P_B^2 + 2\bar{E}_{2AB} P_A P_B$$

ovvero:

$$\bar{E}_2 = \frac{E_0(1+\mathbf{a}_A)^2}{4} P_A^2 + \frac{E_0(1+\mathbf{a}_B)^2}{4} P_B^2 + E_0 \frac{(1+\mathbf{a}_A)(1+\mathbf{a}_B)}{2} 2P_A P_B$$

Quest'ultima relazione si può riscrivere nel modo seguente:

$$\bar{E}_2 = \frac{E_0}{4} [(1+\mathbf{a}_A)^2 P_A^2 + (1+\mathbf{a}_B)^2 P_B^2 + 2(1+\mathbf{a}_A)(1+\mathbf{a}_B) P_A P_B] = \frac{E_0}{2^2} [(1+\mathbf{a}_A)P_A + (1+\mathbf{a}_B)P_B]^2$$

e quindi:

$$\bar{E}_2 = \frac{E_0}{2^2} (1 + \bar{\mathbf{a}})^2$$

Il medesimo discorso risulta valido anche nel caso degli urti successivi; possiamo dunque affermare che, nei mezzi misti, l'unico problema è quello di trovare l' $\alpha$  medio e poi possiamo usare le medesime formule viste in precedenza. Nel caso dell'acqua usata come moderatore, ci occorrono i seguenti dati:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_H = 0 \\ \mathbf{a}_O = 0,7785 \\ \mathbf{s}_s^H = 20b \\ \mathbf{s}_s^O = 4b \end{cases}$$

grazie ai quali si ricava:

$$\begin{cases} P_H = \frac{2\mathbf{s}_s^H}{2\mathbf{s}_s^H + \mathbf{s}_s^O} = 0,9091 \\ P_O = \frac{\mathbf{s}_s^O}{2\mathbf{s}_s^H + \mathbf{s}_s^O} = 0,0909 \end{cases}$$

Possiamo dunque valutare l' $\alpha$  medio che sarà:

$$\bar{\mathbf{a}}_{H_2O} = \mathbf{a}_H P_H + \mathbf{a}_O P_O = 0,071$$

Ora possiamo utilizzare quest'ultimo dato per ricavare tutti i valori che avevamo in precedenza visto; è ad esempio possibile ricavare quanti urti sono necessari per portare un neutrone dall'energia iniziale di 2 MeV all'energia finale di 1 eV; si otterrà:

$$n = 23,22$$

Confrontando questo numero con quello trovato nel caso del soli Idrogeno (era 20,93) vediamo come la presenza dell'Ossigeno porta un peggioramento che, però, non è particolarmente drastico. Rivediamo ora il discorso sui mezzi misti in funzione della letargia; in questo caso sarà necessario conoscere, per entrambi i tipi di atomi contenuti nel mezzo, la  $\xi$  e la probabilità P. Nel caso, dunque, di un singolo urto, se ci fosse solo la specie chimica A, si avrebbe:

$$\bar{U}_{1A} = \mathbf{x}_A$$

mentre, nel caso ci fosse solo la specie chimica B, si avrebbe:

$$\bar{U}_{1B} = \mathbf{x}_B$$

Nel mezzo misto quindi si avrà:

$$\bar{U}_1 = \mathbf{x}_A P_A + \mathbf{x}_B P_B$$

Anche in questo ambito è allora possibile definire un valor medio che, in questo caso, riguarderà la  $\xi$  e sarà:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_A P_A + \mathbf{x}_B P_B$$

Passando al caso dei due urti e ricordando che le sequenze AB e BA sono assolutamente identiche, si avrà:

$$\begin{cases} AA \rightarrow P_A^2 \rightarrow \bar{U}_{AA} = 2\mathbf{x}_A \\ AB \rightarrow 2P_A P_B \rightarrow \bar{U}_{AB} = \mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B \\ BB \rightarrow P_B^2 \rightarrow \bar{U}_{BB} = 2\mathbf{x}_B \end{cases}$$

Complessivamente si ricava quindi:

$$\bar{U}_2 = 2[\mathbf{x}_A P_A^2 + (\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B)P_A P_B + \mathbf{x}_B P_B^2] = 2[\mathbf{x}_A P_A (P_A + P_B) + \mathbf{x}_B P_B (P_A + P_B)]$$

ovvero:

$$\bar{U}_2 = 2[(\mathbf{x}_A P_A + \mathbf{x}_B P_B)(P_A + P_B)] = 2(\mathbf{x}_A P_A + \mathbf{x}_B P_B) = 2\bar{\mathbf{x}}$$

Il numero di urti necessari per ottenere neutroni con una letargia meda che corrisponde ad una energia E si trova quindi con la seguente relazione:

$$n = \frac{\ln \frac{E_0}{E}}{\bar{\mathbf{x}}}$$

Nel caso dell'acqua i valori numerici sono:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_H = 1 \\ \mathbf{x}_O = 0,12 \end{cases}$$

mentre le probabilità rimangono quelle calcolate precedentemente; si ottiene quindi:

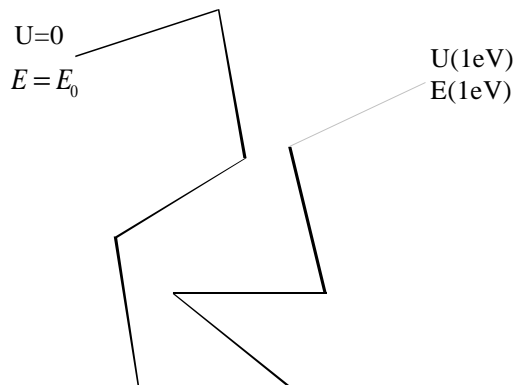
$$\bar{\mathbf{x}}_{H_2O} = 0,92$$

e quindi, facendo riferimento al medesimo intervallo energetico prima esaminato:

$$n = 15,8$$

Nel caso del solo Idrogeno si aveva invece 14,51.

Dobbiamo ora iniziare ad occuparci dell'aspetto spaziale legato al rallentamento e quindi consideriamo la seguente figura:



Siccome si è ipotizzato che possano avvenire solo scattering elastici, il tratto medio è lungo  $l_s$ ; la stima della distanza totale necessaria per rallentare un neutrone fino ad un certo valore di letargia sarà:

$$L = \frac{U}{\mathbf{x}} l_s$$

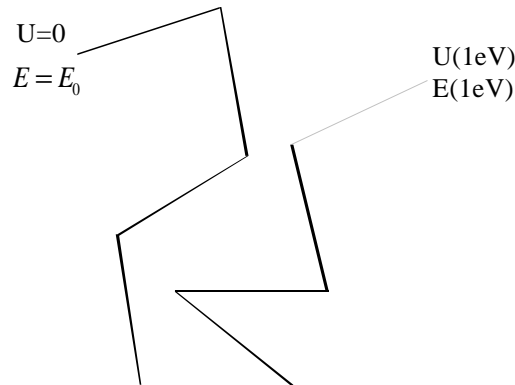
Con un discorso identico a quello precedentemente visto per i neutroni termici si ottiene:

$$\overline{L^2} = \frac{U}{\mathbf{x}} 2l_s^2$$

Particolarmente interessante è anche il concetto di tempo di rallentamento che è il tempo necessario perché i neutroni veloci diventino termici. Il tempo di rallentamento va a sommarsi al tempo di vita termica dei neutroni nella descrizione del ciclo vitale dei neutroni stessi.

**Tempo di rallentamento. Conseguenze dell'acquisto di energia dal moderatore. Dipendenza spaziale.**

Torniamo ad occuparci del grafico seguente:



Il nostro scopo è adesso quello di andare a ricavare il tempo necessario al rallentamento. Come prima cosa è opportuno specificare che la misura del tempo di rallentamento è assolutamente impossibile, sono invece possibili delle simulazioni che utilizzano il metodo Montecarlo. Cerchiamo però un'altra via che ci permetta di ricavare il tempo di rallentamento e supponiamo che la lunghezza di ogni tratto della spezzata rappresentata in figura sia:

$$l_s = \frac{1}{\Sigma_s}$$

Si decide di utilizzare la letargia che, lo ricordiamo, è definita nel modo seguente:

$$U = \ln \frac{E_0}{E}$$

Supponendo di conoscere i valori di  $A$ ,  $\alpha$  e  $\xi$  relativi al mezzo nel quale ci troviamo, osserviamo che, ad ogni urto, la letargia aumenta di un fattore  $\xi$  e quindi l'andamento della velocità dei neutroni è il seguente:

$$v = v_0 e^{-x/2} \quad (1)$$

Le velocità relative ai vari tratti saranno allora le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 = 1,9 \cdot 10^9 \frac{cm}{s} \\ v_1 = v_0 e^{-x/2} \\ v_2 = v_0 e^{-2x/2} \\ \dots \end{array} \right.$$

e, di conseguenza, i tempi impiegati a percorrere i vari tratti saranno:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_0 = \frac{l_s}{v_0} \\ t_1 = \frac{l_s}{v_1} \\ t_2 = \frac{l_s}{v_2} \\ \dots \end{array} \right.$$

Il tempo di rallentamento si può allora ottenere tramite la seguente somma:

$$t = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} \quad (2)$$

La sommatoria continuerà fino a quando il neutrone non viene portato ad una energia minore di quella fissata; siccome, però, stiamo usando la letargia, dobbiamo anche ricordare la relazione secondo la quale:

$$\bar{U}_n = n\xi$$

In questo caso, dunque, la sommatoria deve continuare fino a quando il neutrone non viene portato ad un livello di letargia superiore rispetto alla soglia posta: tale livello si raggiunge sommando i primi n termini. Riscrivendo ora la relazione (2) tenendo conto dei due sistemi precedenti, si ottiene:

$$t = \frac{l_s}{v_0} \left[ 1 + e^{x/2} + e^{2x/2} + \dots + e^{(n-1)x/2} \right] = \frac{e^{nx/2} - 1}{e^{x/2} - 1} \frac{l_s}{v_0}$$

Nel caso di mezzi pesanti ( $\xi \ll 1$ ) è possibile scrivere:

$$t = \frac{e^{U_f/2} - 1}{x/2} \frac{l_s}{v_0} = \frac{2 \left( e^{U_f/2} - 1 \right) l_s}{x v_0}$$

dove  $U_f$  sia la letargia finale. Osserviamo ora che, nel caso della velocità finale, la relazione (1) diventa:

$$v_f = v_0 e^{-U_f/2}$$

e quindi, combinando le ultime due relazioni scritte, si ottiene:

$$t = \frac{2 \left( \frac{v_0}{v_f} - 1 \right) l_s}{x v_0} \quad (3)$$

Alle soglie della zona termica è:

$$v_f \approx 10^6 \frac{cm}{s}$$

e quindi la relazione (3) può essere approssimata nel modo seguente:

$$t = \frac{2 \frac{v_0}{v_f} l_s}{x v_0} = \frac{2 l_s}{x v_0} \cdot \frac{v_0}{v_f} = \frac{2 l_s}{x v_f} = \frac{2}{x \Sigma_s v_f}$$

Tale relazione ricorda molto il termine di vita termica dei neutroni che era stato così espresso:

$$t_{Th} = \frac{1}{\Sigma_a^{Th} v_{Th}}$$

Vediamo dunque alcuni valori numerici nella seguente tabella:

Moderatore	$\bar{\Sigma}_s$ ( $cm^{-1}$ )	$\xi$	$t$ ( $\mu s$ )	$t_{Th}$	$t_{Th}/t$
$H_2O$	1,55	0,92	1	205 $\mu s$	205
$D_2O$	0,246	0,725	8,1	0,136 s	$1,68 \cdot 10^4$
C	0,385	0,158	23	0,012 s	522

L'ultima colonna di tale tabella è particolarmente importante perché implica che sia siano distinti i neutroni in due gruppi: un gruppo termico e un gruppo detto di rallentamento. Il rapporto tra la vita termica e il tempo di rallentamento servirà per poter fare una stima dell'abbondanza della popolazione di neutroni; osserviamo, infatti che, per come è stato posto il problema (in assenza di fughe e assorbimenti) si deve avere:

$$\frac{n_{ral}}{t_{ral}} = \frac{n_{Th}}{t_{Th}}$$

ovvero:

$$\frac{n_{Th}}{n_{ral}} = \frac{t_{Th}}{t_{ral}}$$

dalla quale ricaviamo che la popolazione dei neutroni termici è molto più grande rispetto alla popolazione dei neutroni di rallentamento. Passando poi al flusso si avrà:



$$\frac{f_{Th}}{f_{ral}} = \frac{n_{Th} v_{Th}}{n_{ral} v_r} = \frac{t_{Th} v_{Th}}{t_{ral} v_r}$$

e quindi vediamo come il rapporto tra i flussi non è più così marcato come il rapporto tra i tempi caratteristici; è dunque per questo motivo che quest'ultimo rapporto è particolarmente importante.

E' giunto ora il momento di chiederci cosa succede al moderatore mentre avviene il rallentamento. Come abbiamo visto i neutroni passano da un'energia di 2 MeV ad 0,025 eV e quindi si assiste ad un passaggio di energia dai neutroni al moderatore. Parte di questa energia si esprime sotto forma di energia termica, parte andrà a spezzare i legami chimici (soprattutto nel caso in cui il moderatore sia acqua o acqua pesante). Proprio per questo motivo, quando il moderatore è  $H_2O$  oppure  $D_2O$ , i reattori prevedono dei circuiti di ricombinazione H-O e D-O poiché l'Idrogeno da solo è alla lunga pericoloso in quanto molto facilmente infiammabile. Nel caso in cui si abbia grafite, invece, è possibile che i neutroni provochino delle interazioni con i legami cristallini della grafite; si ha allora l'effetto Wigner che consiste in un accumulo di energia dovuta ad un neutrone che riesce a far spostare un nucleo di Carbonio in una zona di non equilibrio del reticolo. La produzione di un difetto fa sì che la grafite accumuli energia, che viene resa se l'atomo di Carbonio torna nella posizione di partenza. Se tanti atomi di carbonio rendono contemporaneamente l'energia che avevano immagazzinato in questo modo, si può andare incontro a gravi problemi (es.: incidente di Windscale). Per avere un'idea della pericolosità di questa situazione supponiamo di avere un flusso

$$f_{Th} \approx 10^{13} \frac{n}{cm^2 s}$$

I neutroni veloci di partenza saranno:

$$S = \Sigma_a^{Th} f_{Th} = 2,73 \cdot 10^9 \frac{n}{cm^3 s}$$

essendo:

$$\Sigma_a^{Th} = 2,73 \cdot 10^{-4} cm^{-1}$$

Ogni neutrone veloce ha un'energia di 2 MeV e quindi la grafite assorbe la seguente energia:

$$E = S \cdot 2MeV = 5,46 \cdot 10^{15} \frac{eV}{cm^3 s} = 1,306 \frac{cal}{gs}$$

In tre anni di funzionamento l'energia ceduta alla grafite sarà:

$$E_{3Y} = E \cdot 3y = 1,24 \cdot 10^4 \frac{cal}{g}$$

Supponendo che solo il 5% di questa energia si accumuli per effetto Wigner, si avrà:

$$E_w = 0,05 E_{3Y} = 618 \frac{cal}{g}$$

Conoscendo il valor medio del calore specifico della grafite che è circa pari a  $0,4 cal g^{-1} °C^{-1}$ , si ha che, con un rilascio improvviso di tutta questa energia, si otterrebbe un aumento di temperatura di quasi  $1500°C$ .

Fino ad ora abbiamo analizzato il caso di mezzi infiniti omogenei che non presentavano né fughe né catture e caratterizzati da una sorgente uniforme. Tutto ciò equivaleva a non considerare la dipendenza spaziale. Da ora in poi faremo riferimento alla densità di rallentamento come una funzione anche dello spazio perché andremo a considerare anche le fughe nette.

**Rallentamento con diffusione. Equazione dell'età alla Fermi. Esempi di soluzione per mezzi infiniti: sorgente piana, sorgente puntiforme, sorgente filiforme.**

Consideriamo la dipendenza spaziale del rallentamento introducendo la possibilità di diffusione dei neutroni; rimaniamo dunque nel caso di mezzo omogeneo e in assenza di assorbimenti e utilizziamo la letargia come parametro descrittivo. Il fatto che ci sia la possibilità di diffusione dei neutroni implica che si debba fare un bilancio tra i neutroni che, nel volume  $dV$  posto in  $r$ , entrano in un certo intervallo di letargia e quelli che, nel medesimo volume, escono da tale intervallo di letargia; si avrà allora:

$$q(U, r)dV = q(U + dU, r)dV + F$$

dove con  $F$  si indicano le fughe nette da  $dV$  nell'intervallo  $dU$ . Ricordando la legge di Fick

$$\vec{J}(r) = -D \text{grad} f(r)$$

avremo che, sfruttando la teoria della diffusione, il termine legato alle fughe può essere così espresso:

$$\int_S \vec{J} \times \underline{ndS} = \int_V \text{div} \vec{J} dV$$

Nell'ambito che stiamo analizzando  $J$  dipenderà anche dalla letargia e quindi la fuga netta da  $dV$  nell'intervallo  $dU$  si può esprimere nel modo seguente:

$$F = \text{div} \vec{J}(U, r) dV du$$

dove la divergenza di  $J$  rappresenta la fuga di neutroni per unità di volume, di tempo e di letargia. L'equazione di bilancio precedentemente impostata diventa dunque:

$$q(U, r)dV = q(U + dU, r)dV + \text{div} \vec{J}(U, r) dV dU$$

Siccome il volumetto di riferimento è inessenziale, possiamo ridurre tale espressione nel modo seguente:

$$q(U, r) = q(U + dU, r) + \text{div} \vec{J}(U, r) dU$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{q(U + dU, r) - q(U, r)}{dU} = -\text{div} \vec{J}(U, r)$$

Abbiamo così costruito un rapporto incrementale. Siccome sappiamo che i neutroni camminano sulla strada letargia con passi discreti (con l'Idrogeno il passo medio è 1 ma può arrivare ad essere infinito mentre con mezzi pesanti il passo medio è  $\xi < 1$  ma può arrivare ad essere anche  $\ln(1/\alpha)$ ) fisicamente non possiamo, nell'ultima relazione scritta, mettere un limite per  $dU$  che tende a zero. Specifichiamo allora che il  $dU$  può tendere a zero, a livello di approssimazione, con i mezzi pesanti (questa approssimazione è ovviamente poco veritiera nel caso dell'acqua, va abbastanza bene nel caso dell'acqua pesante e va bene nel caso della grafite). Questa approssimazione ci permette di passare dall'ultima relazione scritta, che è esatta, alla seguente relazione:

$$\frac{\partial q(U, r)}{\partial U} = -\text{div} \vec{J}(U, r) \quad (1)$$

Questa relazione, è importante ripeterlo, è una approssimazione legata al fatto di utilizzare solo mezzi diffondenti sufficientemente pesanti. Ovviamente deve ancora essere valida la relazione secondo al quale:

$$\vec{J} = -D \text{grad} f$$

che, nel caso in questione, può essere scritta in maniera più completa come segue:

$$\vec{J}(U, r) = -D(U) \text{grad} f(U, r)$$

Combinando quest'ultima relazione con l'espressione (1) si ottiene:

$$\frac{\partial q(U, r)}{\partial U} = D \nabla^2 f(U, r) \quad (2)$$

Affinché questa relazione sia risolvibile è necessario trovare un legame tra  $q$  e  $\phi$ . Nel caso della sorgente uniformemente distribuita nello spazio tale legame effettivamente c'era in quanto si aveva:

$$\begin{cases} q(U) = S \\ F(U) = \frac{S}{x} \\ F(U) = \sum_s (U) f(U) \end{cases}$$

Combinando queste tre relazioni si otteneva:

$$\Sigma_s(U)\mathbf{f}(U) = \frac{q}{\mathbf{x}}$$

oppure anche:

$$q = F\mathbf{x} = \Sigma_s \mathbf{f}\mathbf{x} \quad (3)$$

Dobbiamo ora chiederci se questa relazione tra  $q$  e  $\phi$  valga anche nella situazione più complessa nella quale ci siamo ora posti; scegliamo a questo scopo due traguardi in letargia che siano  $U$  e  $U+\xi$  e facciamo l'ipotesi aggiuntiva secondo la quale tutti i neutroni si comportano come il neutrone medio; ciò significa che:

$$\Delta U = \mathbf{x}$$

In questa nuova ipotesi sarà possibile scrivere che:

$$q(U + \mathbf{x}, r) = \int_U^{U+\mathbf{x}} F(U, r) dU$$

ovvero, ricordando il teorema del valor medio:

$$q(U + \mathbf{x}, r) = \overline{F(U, r)}\mathbf{x}$$

Confrontando quest'ultima relazione con la relazione (3) si osserva che il legame tra  $q$  e  $\phi$  rimane il medesimo anche in questa nuova situazione. Si potrebbe tra l'altro dimostrare che, tanto più il mezzo è pesante, tanto più i neutroni si comportano effettivamente tutti come il neutrone medio. Questa trattazione prende il nome di teoria alla Fermi. Una volta esplicitato il legame tra  $q$  e  $\phi$  possiamo riscrivere la relazione (2) nel modo seguente:

$$\frac{\partial q(U, r)}{\partial U} = \frac{D}{\mathbf{x}\Sigma_s} \nabla^2 q(U, r) \quad (4)$$

Consideriamo ora il seguente cambiamento di variabile:

$$\mathbf{t}(U) = \int_0^U \frac{D(U')}{\Sigma_s(U')\mathbf{x}} dU' \quad (5)$$

E' importante sottolineare che  $\tau$  dipende anche dal mezzo che viene utilizzato e che anche  $\xi$  dipende, in realtà, da  $U$ , anche se in modo solo piuttosto debole. Derivando l'ultima relazione scritta si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial U} = \frac{D}{\mathbf{x}\Sigma_s}$$

La relazione (4) assume quindi la seguente forma (equazione dell'età alla Fermi):

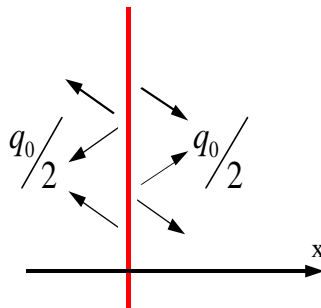
$$\frac{\partial q(\mathbf{t}, r)}{\partial \mathbf{t}} = \nabla^2 q(\mathbf{t}, r) \quad (6)$$

Dalla relazione (5) discende che:

$$\mathbf{t}(U) \equiv \left( \frac{D}{\mathbf{x}\Sigma_s} \right) U$$

e quindi la variabile  $\tau$  è direttamente legata alla letargia da un semplice valore moltiplicativo; a livello dimensionale la letargia è adimensionale mentre la  $\tau$  si valuta in  $\text{cm}^2$  e prende il nome di area di rallentamento oppure di età alla Fermi.

Dopo aver visto la teoria del rallentamento che sfrutta l'età alla Fermi, vediamo di utilizzare la relazione (6) per affrontare qualche caso particolare; mettiamoci dunque, per iniziare, nel caso di un mezzo infinito non assorbente nel quale sia presente un foglio sorgente di neutroni di intensità  $q_0$  neutroni/ $\text{cm}^2$  ed energia  $E_0$ . In una situazione come questa, nella quale, come si vede dalla figura, il foglio emette in modo uniforme isotropo, ci sarà dipendenza dalla sola  $x$  e quindi si avrà una  $q(\tau, x)$ .



In questa situazione l'espressione (6) assume la seguente forma:

$$\frac{\partial q(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 q(t, x)}{\partial x^2} \quad (7)$$

La tecnica di soluzione più comoda è quella delle trasformate di Laplace sulla variabile  $\tau$ , si pone dunque:

$$Lq(t, x) = \Theta(s, x)$$

e si ricordi che, per quanto riguarda le derivate, si ha:

$$L \frac{\partial q}{\partial t} = s\Theta - q(t=0, x)$$

Le ipotesi che abbiamo fatto fino ad ora ci impongono di pensare ad un rallentamento continuo (e non più discreto) e quindi si deve legare lo spostamento  $dx$  ad una variazione di letargia  $dU$ . Questo significa che, ad una distanza non nulla dalla sorgente non possiamo più incontrare dei neutroni di sorgente e quindi l'ultima relazione scritta si semplifica nel modo seguente (tranne, eventualmente, in corrispondenza del piano sorgente):

$$L \frac{\partial q}{\partial t} = s\Theta$$

Accettare il rallentamento continuo e il fatto che i neutroni si comportino come il neutrone medio significa imporre che sia:

$$dU = \Sigma_s x dx = \Sigma_s x v dt$$

Trasformando dunque la relazione (7) si ottiene:

$$s\Theta(x) = \frac{\partial^2 \Theta(s, x)}{\partial x^2}$$

ovvero:

$$\Theta''_x - s\Theta = 0$$

dalla quale si ricava:

$$\Theta = Ae^{-\sqrt{s}x} + Be^{\sqrt{s}x}$$

La soluzione deve essere simmetrica rispetto al piano sorgente. Consideriamo le sole  $x$  positive. Se la trasformata assume valori infiniti, anche la variabile originaria diventa infinita, quindi dobbiamo eliminare il termine che diverge per  $x$  tendente ad infinito. Ne segue che la relazione appena scritta si può semplificare come segue:

$$\Theta = Ae^{-\sqrt{s}x} \quad (8)$$

Inoltre, siccome c'è compensazione perfetta tra i neutroni che entrano e quelli che escono dalla superficie laterale di una zona di spazio costituita da: un cilindro con asse perpendicolare al piano sorgente, una base sul piano sorgente e l'altra base posta ad  $x$  tendente ad infinito, possiamo fare la seguente osservazione:

$$\frac{q_0}{2} = \int_0^{\infty} q(t, x) dx \quad \forall t \quad (9)$$

Trasformando secondo Laplace anche quest'ultima relazione e calcolando l'integrale definito si ottiene:

$$\frac{q_0}{2s} = \frac{A}{\sqrt{s}}$$

e quindi:

$$A = \frac{q_0}{2\sqrt{s}}$$

La relazione (8) potrà allora essere riscritta nel modo seguente:

$$\Theta = \frac{q_0}{2\sqrt{s}} e^{-\sqrt{s}x}$$

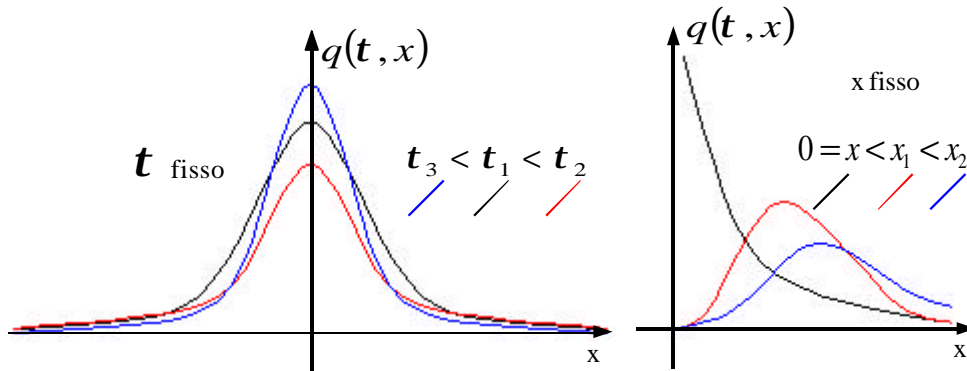
facendo riferimento alle tabelle sulle antitrasformate (in particolare si può consultare lo Schaum sulle trasformate di Laplace a pagina 240, numero 84) troviamo la seguente antitrasformata

$$L^{-1} \frac{e^{-\sqrt{s}x}}{\sqrt{s}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{pt}}$$

Applicando questa antitrasformata al caso in analisi si ottiene:

$$q(t, x) = \frac{q_0}{2} \frac{1}{\sqrt{pt}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{q_0}{\sqrt{4pt}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (10)$$

da questa relazione discende che  $q$  dipende da  $x$  e da  $\tau$  in maniera non separabile. Nelle prime due immagini della pagina seguente vediamo l'andamento della  $q$  in funzione della  $x$  e della  $\tau$  qualora l'altra variabile sia fissata. Nel caso delle  $\tau$  fissate vediamo come si ottengano tante campane gaussiane con la medesima area unitaria.



Soffermiamoci ora su un caso diverso: consideriamo una sorgente puntiforme con emissione isotropa ed intensità  $q_0$ ; sicuramente, in un caso come questo, si avrà solo dipendenza dalla coordinata radiale  $r$  e quindi si ha:

$$\nabla^2 q = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (qr)}{\partial r^2}$$

La relazione (6), in questo caso, assumerà quindi la seguente forma:

$$\frac{\partial (qr)}{\partial t} = \frac{\partial^2 (qr)}{\partial r^2}$$

Introduciamo ora la seguente funzione ausiliaria:

$$F = qr$$

Combinando dunque tra di loro le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

Trasformando secondo Laplace si otterrà allora:

$$LF(t, r) = \Theta(s, r)$$

e si tornerà allora ad ottenere un'espressione del tipo:

$$\Theta_r'' - s\Theta = 0$$

dalla quale ancora si ricava:

$$\Theta = Ae^{-\sqrt{s}r} \tag{11}$$

In questa relazione si è eliminato, come fatto in precedenza, il termine legato alla costante B. Avendo una sorgente puntiforme, la relazione (9) viene sostituita con la seguente espressione:

$$q_0 = \int_0^{\infty} q(t, r) 4\pi r^2 dr$$

in cui stavolta il bilancio viene effettuato sull'intero spazio.

Avendo introdotto la funzione ausiliaria F, l'ultima relazione scritta diventa:

$$q_0 = 4\pi \int_0^{\infty} F(t, r) r dr$$

Trasformando secondo Laplace anche questa espressione si ricava:

$$\frac{q_0}{s} = 4\pi \int_0^{\infty} \Theta(t, x) r dr = 4\pi A \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{s}r} r dr$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{q_0}{s} = \frac{4\pi A}{s}$$

e quindi:

$$A = \frac{q_0}{4p}$$

Combinando allora quest'ultima relazione con l'equazione (11) si ottiene:

$$\Theta(s, r) = \frac{q_0}{4p} e^{-\sqrt{s}r}$$

Sfruttando ancora le tabelle delle antitrasformate (ancora dallo Schaum sulle trasformate di Laplace a pagina 240, numero 85) si trova la seguente antitrasformata:

$$L^{-1} e^{-\sqrt{s}r} = \frac{r}{2\sqrt{pt^3}} e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

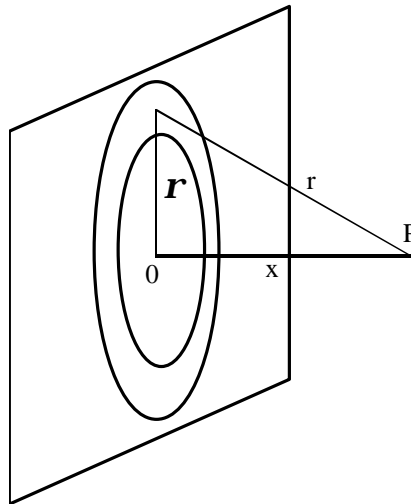
che, applicata al caso in questione, ci permette di ottenere:

$$qr = \frac{q_0}{4p} \frac{r}{2\sqrt{pt^3}} e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

ovvero:

$$q(t, r) = \frac{q_0}{(4pt)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

Osserviamo ora che la relazione (6) è lineare e quindi vale il principio di sovrapposizione; da questo si comprende come il caso puntiforme sia il caso più importante perché da questo sarebbe possibile ricavare tutti gli altri. Dimostriamo quanto appena detto ricavando la relazione (10), relativa al caso della sorgente piana, partendo dall'ultima relazione scritta, che si riferisce, appunto, al caso della sorgente puntiforme. Facciamo inoltre riferimento alla seguente immagine.



Fissando x risulterà innanzitutto valida la seguente relazione:

$$r^2 = r'^2 + x^2$$

Consideriamo ora la seguente relazione nella quale integriamo la soluzione relativa al caso puntiforme nel quale si utilizza l'intensità relativa al piano e l'areola relativa alla corona circolare:

$$q(t, x) = \int_0^{\infty} q_0 \cdot \frac{e^{-\frac{r^2}{4t}}}{(4pt)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi r dr = e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_0^{\infty} \frac{q_0 2\pi r e^{-\frac{r^2}{4t}}}{(4pt)^{\frac{3}{2}}} dr = \frac{2\pi q_0}{(4pt)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4t}} r dr \quad (12)$$

Imponiamo ora il seguente cambiamento di variabile:

$$\frac{r^2}{4t} = t$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{2r dr}{4t} = dt$$

e quindi:

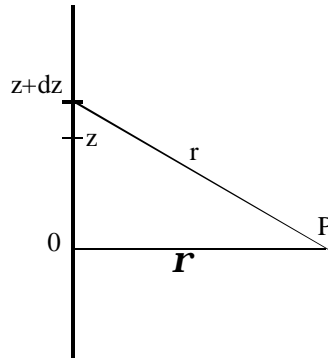
$$r dr = 2t dt$$

Con tale cambiamento di variabile la relazione (12) diventa:

$$q(\mathbf{t}, x) = \frac{4\mathbf{p}tq_0}{(4\mathbf{p}t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4\mathbf{t}}} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{q_0}{\sqrt{4\mathbf{p}t}} e^{-\frac{x^2}{4\mathbf{t}}}$$

Abbiamo dunque ritrovato la soluzione relativa alla sorgente piana.

Partendo dalla soluzione relativa al caso puntiforme possiamo anche andare a valutare il caso della sorgente filiforme. Facciamo dunque riferimento al seguente disegno.



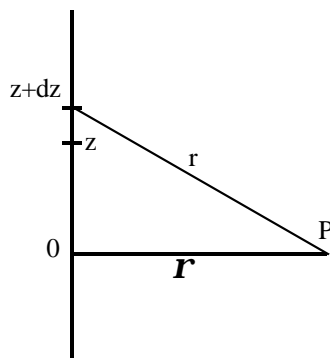
Supposto che l'intensità dovuta alla sorgente filiforme sia  $q_{0f}$ , possiamo utilizzare il metodo appena visto e sfruttare la seguente relazione:

$$q(\mathbf{t}, r) = 2 \int_0^{\infty} \frac{q_{0f} e^{-\frac{r^2}{4\mathbf{t}}}}{(4\mathbf{p}t)^{\frac{3}{2}}} dz$$

**Sorgente filiforme. Distanze quadratiche medie termiche e di rallentamento. Area di migrazione. Misura sperimentale di  $t$ . Sorgente piana in uno spazio di spessore finito.**

**Rallentamento con assorbimento nell'Idrogeno. Rallentamento con assorbimento nella miscela Idrogeno-<sup>238</sup>U. Rallentamento con assorbimento nei moderatori pesanti.**

Continuiamo ad occuparci del caso della sorgente filiforme che vogliamo risolvere partendo dalla soluzione relativa alla sorgente puntiforme; ricordiamo dunque la situazione nella quale ci eravamo posti, che è quella di seguito rappresentata:



Nella scorsa lezione si era impostato il problema arrivando alla seguente relazione:

$$q(t, r) = 2 \int_0^{\infty} \frac{q_{0f} e^{-\frac{r^2}{4t}}}{(4pt)^{\frac{3}{2}}} dz$$

Ricordiamo che vale:

$$r^2 = \mathbf{r}^2 + z^2$$

che, combinata con la relazione precedente, ci permette di ottenere:

$$q(t, r) = \frac{2q_{0f} e^{-\frac{r^2}{4t}}}{(4pt)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4t}} dz$$

Ricordando poi l'espressione generale dell'integrale seguente:

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{p}}{2}$$

si ottiene:

$$q(t, r) = \frac{q_{0f}}{4pt} e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

Complessivamente possiamo osservare che le soluzioni relative al punto, al filo e al piano, differiscono principalmente per le potenze del denominatore; si osserva inoltre che nel caso della sorgente uniforme S il flusso andava come  $1/E$  mentre ciò non è vero nel caso in cui la sorgente sia localizzata (piano, filo, punto). Osserviamo, infine, che tutte le soluzioni trovate sono non separabili.

Torniamo ora a concentrarci sulla teoria della diffusione grazie alla quale si era trovato per il piano, il filo e il punto, che la distanza quadratica media di diffusione alle energie termiche era, rispettivamente:

$$\begin{cases} x^{-2} = 2L^2 & (1) \\ \mathbf{r}^{-2} = 4L^2 & (2) \\ r^{-2} = 6L^2 & (3) \end{cases}$$

Nel caso del punto si era vista la corrispondenza con uno studio di tipo statistico. Vediamo ora di calcolare, per le medesime geometrie, le distanze quadratiche medie di rallentamento. Iniziamo con il caso piano: dobbiamo prima di tutto considerare la probabilità che un neutrone ha di raggiungere l'età  $\tau$  in un certo intervallo  $dx$ . Si avrà allora:



$$p(x)dx = \frac{\frac{q_0}{\sqrt{4pt}} e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\frac{q_0}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{4pt}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx$$

Una volta trovata tale probabilità possiamo calcolare quanto ci interessa sfruttando la relazione:

$$\bar{x}^2 = \int_0^{\infty} x^2 p(x) dx = \frac{2}{\sqrt{4pt}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{4t}} dx$$

Troviamo quindi un integrale del tipo:

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{p}}{4}$$

Combinando allora le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$\bar{x}^2 = 2t \tag{4}$$

Nel caso del filo l'espressione della probabilità sarà:

$$p(r)dr = \frac{e^{-\frac{r^2}{4t}}}{4pt} 2pr dr$$

dalla quale si ricava:

$$\bar{r}^2 = \frac{1}{2t} \int_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{4t}} r dr = 4t \tag{5}$$

Nel caso del punto, infine, la probabilità avrà la seguente forma:

$$p(r)dr = \frac{e^{-\frac{r^2}{4t}}}{(4pt)^{\frac{3}{2}}} 4pr^2 dr$$

dalla quale si ricava:

$$\bar{r}^2 = \frac{4p}{(4pt)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{4t}} dr$$

Ci troviamo in questo caso a dover gestire un integrale particolare del tipo:

$$\int t^4 e^{-t^2} dt = \frac{3}{8} \sqrt{p}$$

Combinando allora le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$\bar{r}^2 = 6t \tag{6}$$

Confrontando a questo punto le relazioni (1), (2) e (3) con le relazioni (4), (5) e (6) si osserva un perfetto parallelismo tra le distanze quadratiche medie termiche e le distanze quadratiche medie di rallentamento.

Definiamo allora come segue l'area di migrazione:

$$M^2 = L^2 + t$$

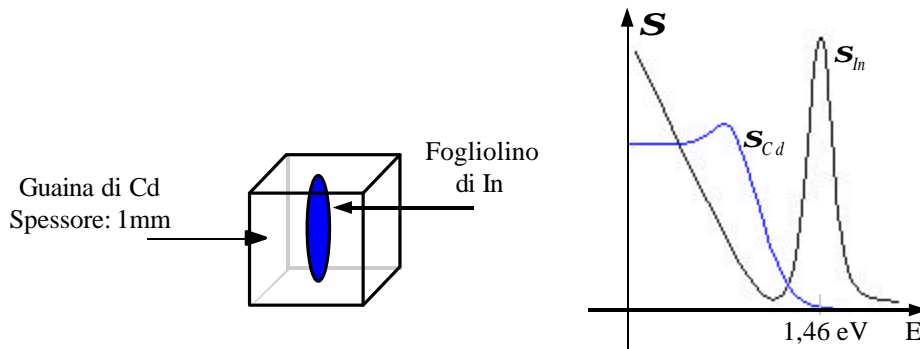
Appare dunque evidente che per la geometria piana, filiforme e puntiforme si avrà, rispettivamente:

$$\begin{cases} \bar{x}^2 = 2M^2 = 2(L^2 + t) \\ \bar{r}^2 = 4M^2 = 4(L^2 + t) \\ \bar{r}^2 = 6M^2 = 6(L^2 + t) \end{cases}$$

Moderatore	$\tau$ [cm <sup>2</sup> ]	$L_r = \sqrt{t}$ * [cm]	$L_d$ ** [cm]
$H_2O$	27	5,2	2,8
$D_2O$	130	11,4	>100
C	370	19,2	50

\* Lunghezza di rallentamento. \*\* Lunghezza di diffusione alle energie termiche.

Nella tabella sono riportati i valori numerici (riferiti ad un'energia iniziale di 2 MeV) per i tre moderatori più comuni. I valori di  $\tau$  sono particolarmente importanti, vediamo dunque come si misura dal punto di vista sperimentale. Per prima cosa bisogna prendere una sorgente di neutroni come ad esempio Pu-Be oppure Am-Be (Pu e Am sono emettitori  $\alpha$  che interagiscono con Be per reazione  $(\alpha, n)$ ); oppure una sorgente di fissione. E' poi necessario trovare un modo per studiare i neutroni che attraversano una certa soglia di energia; per questo si utilizza un rivelatore di risonanza. Un rivelatore di risonanza può essere realizzato sperimentalmente utilizzando In e Cd come mostrato nella prima immagine che segue. Il rivelatore così costruito sfrutta la guaina di Cd per far sì che l'In senta solo i neutroni con energia pari a 1,46 eV come si vede dalla seconda immagine.



Il fatto che il foglietto di Indio senta solo i neutroni di 1,46 eV significa che vengono visti solo i neutroni che attraversano una certa soglia di energia. Avendo a disposizione rivelatori di questo tipo si possono costruire relazioni del tipo:

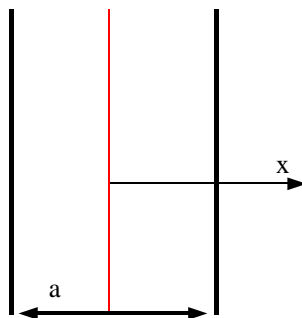
$$C(r) = Ae^{-\frac{r^2}{4t}}$$

dove C sta per conteggio sperimentale mentre A è una costante. Ripetendo misure di questo tipo per r differenti si trova il valore di  $\tau$ . La soglia 1,46 eV non coincide però con la fine del viaggio dei neutroni verso la zona termica e questo significa che il valore di  $\tau$  che abbiamo misurato è relativo all'intervallo tra 2 MeV e 1,46 eV. Siccome non c'è nessun modo per misurare il contributo di  $\tau$  dovuto al percorso tra 1,46 eV e 0,6 eV (che è la soglia della zona termica) per dare una valutazione complessiva del valore di  $\tau$  bisogna scomporre la  $\tau$  in un contributo misurato (tra 2 MeV e 1,46 eV) e in un contributo calcolato (sotto l'1,46 eV). Si avrà dunque:

$$t = \int_0^U \frac{D}{\mathbf{x}\Sigma_s} dU^I = \int_{E_{th}}^E \frac{D}{\mathbf{x}\Sigma_s} \frac{dE^I}{E^I} = \int_{1,46eV}^{E_0} \frac{D}{\mathbf{x}\Sigma_s} \frac{dE^I}{E^I} + \int_{0,6eV}^{1,46eV} \frac{D}{\mathbf{x}\Sigma_s} \frac{dE^I}{E^I}$$

Il primo addendo dell'ultimo membro di tale relazione corrisponde con il contributo misurato mentre il secondo addendo corrisponde al contributo calcolato. Siccome il termine calcolato è piccolo, anche se ci sono degli errori la loro influenza è comunque limitata.

Mettiamoci ora nella situazione rappresentata nell'immagine seguente nella quale si considera una sorgente piana posta in un mezzo di spessore finito a.



Siccome lo spazio non è più infinito si devono avere delle condizioni al contorno che, in questa situazione, sono:

$$q\left(t, \pm \frac{a}{2}\right) = 0$$

In una situazione come questa perdono importanza le preoccupazioni legate alla non separabilità, ed imponiamo:

$$q(t, x) = F(x)G(t)$$

dove sia:

$$F(x) = \cos(B_n x)$$

con:

$$B_n = (2n + 1) \frac{P}{a}$$

La forma classica dell'equazione dell'età di Fermi è sempre valida, ovvero è sempre valida la relazione:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \nabla^2 q$$

che, nel caso in questione, si riduce nel modo seguente:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\partial q}{\partial t} \quad (7)$$

ovvero, avendo scomposto q nel prodotto di F e G:

$$F_x'' G = F G_t'$$

da cui si ricava:

$$\frac{F_x''}{F} = \frac{G_t'}{G} = -B_n^2$$

Considerando solo il II e il III membro di quest'ultima relazione si ottiene:

$$G_t' = -B_n^2 G$$

Troviamo dunque un'equazione differenziale del tipo:

$$G_t' + B_n^2 G = 0$$

la cui soluzione sarà:

$$G(t) = G_0 e^{-B_n^2 t}$$

La densità di rallentamento sarà dunque:

$$q(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(B_n x) e^{-B_n^2 t} \quad (8)$$

In questa espressione vediamo apparire delle armoniche; ovviamente non è necessario usare infinite armoniche per avere una descrizione adeguata della situazione. Un discorso analogo (ovviamente più complesso per quanto riguarda i conti) sarebbe possibile per il caso della sorgente puntiforme contenuta in uno spazio sferico di raggio finito e anche per il caso di una sorgente filiforme contenuta in uno spazio cilindrico di raggio finito. Ora che abbiamo ricavato l'espressione della  $q(\tau, x)$  dobbiamo verificare di aver trovato qualche cosa di compatibile con l'equazione dell'età. Sostituiamo dunque quanto abbiamo trovato nella relazione (7) e ricaviamo:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} A_n B_n^2 \cos(B_n x) e^{-B_n^2 t} = -\sum_{n=0}^{\infty} A_n B_n^2 \cos(B_n x) e^{-B_n^2 t}$$

Siccome abbiamo trovato un'identità, la validità dell'espressione della  $q$  è verificata. Dobbiamo trovare ora l'espressione dei coefficienti  $A_n$  e per fare questo poniamo, nella relazione (8), che  $\tau$  sia nullo:

$$q(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(B_n x)$$

Osserviamo, però, che in questa espressione il primo membro esprime la distribuzione spaziale dei neutroni di sorgente (ovvero di quei neutroni nei quali l'età  $\tau$  è nulla) e tale distribuzione non è altro che una delta di Dirac. L'ultima relazione scritta può dunque così essere riproposta:

$$q_0 \mathbf{d}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(B_n x)$$

Fissiamo ora un valore  $r$  di  $n$  e moltiplichiamo entrambi i membri per  $\cos(B_r x)$ , ottenendo:

$$q_0 \mathbf{d}(x) \cos(B_r x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(B_n x) \cos(B_r x)$$

Integriamo ora entrambi i membri di questa espressione:

$$q_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathbf{d}(x) \cos(B_r x) dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(B_n x) \cos(B_r x) dx$$

Qualora  $r$  sia diverso da  $n$  l'integrale del prodotto dei coseni si annulla e rimane un solo coseno al quadrato; dalla relazione precedente passiamo dunque alla seguente:

$$q_0 = A_r \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos^2(B_r x) dx$$

Ricaviamo quindi:

$$A_n = \frac{2q_0}{a}$$

In questo discorso non sono state utilizzate la trasformate di Laplace perché ci sono le fughe.

Cambiamo argomento. Consideriamo gli assorbimenti durante il rallentamento.

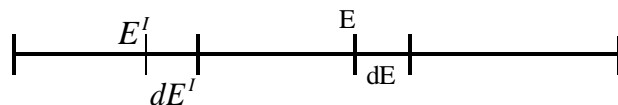
Mettiamoci nell'ipotesi di avere un mezzo infinito, omogeneo, nel quale sia presente una sorgente uniforme, nel quale, però, siano possibili anche reazioni di assorbimento. In una situazione come questa la densità di collisione sarà:

$$F(E) = \Sigma_{Tot} f(E)$$

dove sia:

$$\Sigma_{Tot} = \Sigma_s + \Sigma_a \quad (9)$$

Studiamo questa situazione nel caso di moderatore Idrogeno puro e sfruttando il metodo dell'approccio globale. Consideriamo dunque, come ausilio al ragionamento, al seguente immagine.



Consideriamo quindi la seguente relazione:

$$F(E)dE = F(E')dE' \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma_{Tot}(E')} \frac{dE}{E'} + S \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma_{Tot}(E')} \frac{dE}{E'}$$

dove il primo membro esprime le uscite dall'intervallo energetico  $dE$  mentre il secondo membro si riferisce agli ingressi nell'intervallo energetico  $dE'$ . I rapporti tra le sezioni d'urto servono per selezionare solo le reazioni di scattering (che sono le uniche che permettono al neutrone di entrare effettivamente nell'intervallo  $dE'$ . Dall'ultima relazione scritta, ricordando che il termine  $dE$  è inessenziale e quindi integrando, si ottiene:

$$F(E) = \int_E^{E_0} F(E') \frac{dE'}{E'} \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma_{Tot}(E')} \frac{1}{E'} + \frac{S}{E_0} \quad (10)$$

Il fatto che non appaia più il rapporto tra le sezioni d'urto nel termine relativo alla sorgente è dovuto al fatto che si sono considerati trascurabili gli assorbimenti sui neutroni di sorgente. Valutando quest'ultima espressione in corrispondenza dell'energia di sorgente si otterrà:

$$F(E_0) = \frac{S}{E_0} \quad (11)$$

Dalla relazione (9) si ricava ora che:

$$\Sigma_s = \Sigma_{Tot} - \Sigma_a$$

e quindi si può scrivere:

$$\int_E^{E_0} \frac{dF}{F} = \int_E^{E_0} \frac{dE}{E} \left( 1 - \frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma_{Tot}(E)} \right)$$

dalla quale si ricava:

$$\ln \frac{F(E_0)}{F(E)} = \ln \frac{E}{E_0} + \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_{Tot}(E')} \frac{dE'}{E'}$$

Togliendo i logaritmi e combinando il tutto con la relazione (11) si ricava:

$$F(E) = \frac{S}{E} e^{-\int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}} \frac{dE'}{E'}} \quad (12)$$

Per semplicità di notazione si pone poi:

$$p = e^{-\int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}} \frac{dE'}{E'}}$$

Ricordiamo che, quando avevamo ipotizzato l'assenza di cattura, si era trovata una relazione del tipo:

$$F(E) = \frac{S}{E}$$

Ora, avendo supposto che anche la cattura rientri nella rappresentazione, abbiamo trovato un esponenziale che prende il nome di fattore di trasparenza alla cattura ed è la probabilità che il neutrone viaggi dall'energia di sorgente alla generica energia E e che vi arrivi sano e salvo, ovvero senza essere catturato. Un discorso assolutamente analogo può essere fatto anche per la densità di rallentamento q; in tale caso l'equazione di bilancio sarebbe:

$$q(E) = \int_E^{E_0} F(E') dE' \frac{\Sigma_s}{\Sigma_{Tot}} \frac{E}{E'} + \frac{S}{E_0} E$$

Confrontando questa relazione con la relazione (10) si osserva che, tra le due, la differenza consta nella moltiplicazione per E; senza rifare tutti i calcoli possiamo dunque, usando come modello la relazione (12), scrivere la seguente espressione:

$$q(E) = S e^{-\int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}} \frac{dE'}{E'}}$$

Riscrivendo in termini di letargia si ottiene:

$$\begin{cases} F(U) = S e^{-\int_0^U \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}} dU'} \\ q(U) = S e^{-\int_0^U \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}} dU'} \end{cases}$$

Se ricordiamo ora l'espressione caratteristica del decadimento:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

vediamo che la struttura della soluzione è la stessa, cambia ovviamente la complessità in quanto non ho più a che fare con un esponente costante ma con un esponente integrale.

Fino ad ora abbiamo parlato della cattura durante il rallentamento da parte del moderatore (Idrogeno) senza considerare che l'Idrogeno cattura in maniera assolutamente trascurabile; consideriamo quindi, da ora in poi, una miscela di moderatore e di una sostanza che sia solo un assorbitore (ovvero che assorba ma che non contribuisca alla moderazione) ciò significherà non tener conto degli scattering prodotti dall'assorbitore. Un modello del genere funziona molto bene pensando all' $^{238}\text{U}$ . In effetti il discorso sarebbe assolutamente identico a quello fatto per gli assorbimenti dovuti al solo Idrogeno, pur di porre:

$$\Sigma_a = \Sigma_a^H + \Sigma_a^{238}$$

e dunque, invece della relazione (9):

$$\Sigma_{Tot} = \Sigma_a + \Sigma_s^H$$

Passiamo ora a considerare il problema del rallentamento con assorbimento nel caso di un mezzo generico (caratterizzato da un certo A, un certo  $\alpha$  e un certo  $\xi$ ). Ricordiamo, per prima cosa, la relazione che avevamo trovato che esprimeva il numero di urti (nella descrizione in letargia):

$$F(U) = \frac{S}{\mathbf{x}} \quad (13)$$

Tale relazione, come si ricorda, era esatta nel caso dell'Idrogeno mentre era solo un'approssimazione nel caso di mezzi più pesanti. Avendo il numero di urti e le sezioni d'urto, possiamo ricavare il numero di assorbimenti che avvengono durante un tratto letargico  $\Delta U$ :

$$F(U) \Delta U \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}} = \frac{S}{\mathbf{x}} \Delta U \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}}$$

Ho dunque trovato un'espressione del tasso di cattura nell'intervallo  $\Delta U$ ; per avere una probabilità devo dividere tale relazione per  $S$ , ottenendo la probabilità che un neutrone venga catturato durante il tratto  $\Delta U$ :

$$p_{cattura}(\Delta U) = \frac{\Delta U}{\mathbf{x}} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}}$$

La probabilità di salvezza, ovvero la probabilità che il neutrone superi indenne tale tratto letargico, sarà quindi:

$$p_{salvezza}(\Delta U) = 1 - \frac{\Delta U}{\mathbf{x}} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}}$$

Supponiamo ora che diversi intervalli di letargia rappresentino diversi pericoli per il neutrone, in questo caso dovremmo esplicitare una probabilità di salvezza relativa ad ogni intervallo di letargia

$$p_{salvezza}(\Delta U_i) = 1 - \frac{\Delta U_i}{\mathbf{x}} \left( \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}} \right)_i$$

e poi ottenere la probabilità di salvezza complessiva come produttoria delle probabilità relative ai singoli intervalli:

$$p_{salvezza} = \prod_i \left[ 1 - \frac{\Delta U_i}{\mathbf{x}} \left( \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}} \right)_i \right]$$

Passando al logaritmo, l'ultima relazione scritta diventa:

$$\ln p_{salvezza} = \sum_i \ln \left[ 1 - \frac{\Delta U_i}{\mathbf{x}} \left( \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}} \right)_i \right]$$

Scegliamo ora gli intervalli di letargia in modo che sia:

$$\frac{\Delta U_i}{\mathbf{x}} \left( \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}} \right)_i \ll 1$$

Ciò mi permetterà, combinando le ultime due relazioni scritte, di arrestare lo sviluppo in serie al primo termine e di ottenere:

$$\ln p_{salvezza} = - \sum_i \frac{\Delta U_i}{\mathbf{x}} \left( \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}} \right)_i$$

Qualora gli intervalli di letargia diventino infinitesimi, si può ovviamente passare dalla sommatoria all'integrale:

$$\ln p_{salvezza} = - \int_0^U \frac{\Sigma_a}{\mathbf{x} \Sigma_{Tot}} dU^I$$

da cui si ricava:

$$p_{salvezza} = e^{- \int_0^U \frac{\Sigma_a}{\mathbf{x} \Sigma_{Tot}} dU^I}$$

Tutto questo discorso si basa sulla validità della relazione (13), vedremo nel seguito che la presenza delle risonanze dell' $^{238}\text{U}$  rende tale relazione una approssimazione piuttosto superficiale e quindi saranno necessarie delle ulteriori correzioni.