

**Focalizzazione longitudinale: stabilità di fase per macchine circolari, adiabatic damping.**

*Sincrotroni*

Nel caso dei sincrotroni, la frequenza dell'RF non è ovviamente una costante, definita dunque nel modo seguente la frequenza di rivoluzione:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi\beta c}{L}$$

la frequenza dell'RF varierà tra i due seguenti valori limite:

$$h\omega \rightarrow h \frac{2\pi c}{L}$$

Sfruttando ora le tre seguenti relazioni:

$$\begin{cases} p = qB\rho \\ p = \gamma m_0 v \\ L = 2\pi R \end{cases}$$

è possibile costruire una relazione che esprima il legame tra il campo magnetico B del magnete e il raggio R della macchina:

$$\frac{\omega_{RF}}{h} = \omega = q \frac{\rho}{R} \cdot \frac{B}{\gamma m_0}$$

Per quanto riguarda il guadagno di energia per giro si sfrutta la relazione

$$\frac{\Delta T}{\Delta n} = \frac{dT}{dt} \tau = \frac{dT}{dp} \cdot \frac{dp}{dB} \cdot \frac{dB}{dt} \cdot \frac{2\pi}{\omega}$$

Usando le seguenti relazioni di tipo relativistico:

$$p^2 c^2 = T^2 + 2TE_0$$

si ottiene:

$$\frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{pc^2}{T + E_0} = \frac{qB\rho c^2}{T + E_0} = \frac{qB\rho}{\gamma m_0} = \omega R$$

e quindi:

$$\Delta T = \omega R \Delta p$$

relazione che esprime la variazione di momento ed energia. La variazione di energia per giro sarà quindi:

$$\frac{\Delta T}{\Delta n} = 2\pi q R p \frac{dB}{dt}$$

Siccome in un sincrotrone è noto che si ha:

$$\frac{\Delta T}{\Delta n} = q \hat{V} \sin \phi$$

ne segue che l'energia guadagnata per giro (data dalla scelta del potenziale di picco e della fase  $\phi$ ) dipende dal termine di variazione del campo magnetico  $dB/dt$ . Una variazione lenta implica un guadagno lento di energia per giro.

Dalla relazione fondamentale secondo la quale:

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} = \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta v}{v}$$

essendo possibile dimostrare che:

$$\begin{cases} \frac{\Delta L}{L} = \alpha \frac{\Delta p}{p} \\ \frac{\Delta v}{v} = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\Delta p}{p} \end{cases}$$

dove  $\alpha$  prende il nome di momentum compaction, si ottiene:

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \left( \alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{\Delta p}{p}$$

Sfruttando la smooth approximation la traiettoria di equilibrio dovuto ad un certo spread di energia è:

$$x_p = \frac{R}{v_x^2} \cdot \frac{\Delta p}{p}$$

e quindi:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{2\pi x_p}{2\pi R} = \frac{1}{v_r^2} \cdot \frac{\Delta p}{p}$$

da cui si ricava che, applicando la smooth approximation, il momentum compaction assume la seguente forma:

$$\alpha = \frac{1}{v_r^2}$$

ed è dunque una costante. Ponendo ora:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{\gamma_t^2} \\ \frac{\Delta\tau}{\tau} = 0 \end{cases}$$

si ottiene:

$$\gamma_{tr} = v_x$$

Si viene così a definire un'energia di transizione, espressa come:

$$T_{trans} = (v_r - 1)m_0c^2$$

in corrispondenza della quale cambia il segno di  $\Delta\tau/\tau$ . Se c'è una transizione in una macchina significa che si ha:

$$\begin{cases} \frac{\Delta\tau}{\tau} < 0 \Leftrightarrow \gamma < \gamma_{tr} \\ \frac{\Delta\tau}{\tau} > 0 \Leftrightarrow \gamma > \gamma_{tr} \end{cases}$$

e questo ha una implicazione sulla stabilità di fase in quanto è necessario fare un salto di fase alle particelle del sincrotrone.

Nel caso del PS del CERN, essendo  $v=6.25$ , l'energia di transizione si ha a 4.9 GeV, ovvero nel bel mezzo del suo range di energia (il salto di fase si rende inevitabile); nel caso dell'SPS, essendo  $v=26.6$ , l'energia di transizione è pari a 24 GeV e si può dunque evitare di fare il salto di fase sfruttando il PS fino al massimo e quindi iniettando le particelle nell'SPS all'energia di 26 GeV, superiore al valore critico.

Una trattazione più completa dell'instabilità di fase nei sincrotroni si può trovare su "An Introduction to the Physics of High-Energy Accelerators" di Donald A. Edwards e M.J. Syphers. John Wiley & Sons, 1993, New York, da pagina 32 a pagina 45, di cui qui si riportano i passaggi fondamentali.

Il punto di partenza è sempre la relazione secondo la quale:

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta v}{v}$$

anche in questo caso viene definito il momentum compaction, che differisce però a livello di notazione, si hanno infatti le due seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{\gamma_t^2} \cdot \frac{\Delta p}{p} \\ \frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\Delta p}{p} \end{cases}$$

Viene inoltre definito un fattore di slip  $\eta$ , espresso come:

$$\eta = \frac{1}{\gamma_t^2} - \frac{1}{\gamma^2}$$

A questo punto è possibile costruire le due equazioni alle differenze; la prima delle quali sarà:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \omega_{RF} \Delta T$$

Per ricavare la seconda, detta  $(E_s)_n$  l'energia della particella di riferimento, si considera l'espressione:

$$(E_s)_{n+1} = (E_s)_n + qV \sin \phi_s \quad (1)$$

Per una particella generica si avrà invece:

$$E_{n+1} = E_n + qV \sin \phi_n \quad (2)$$

La differenza in energia tra la particella generica e la particella di riferimento dovrà allora soddisfare la seguente relazione:

$$\Delta E_{n+1} = \Delta E_n + qV(\sin \phi_n - \sin \phi_s)$$

Le due equazioni alle differenze per il moto delle due particelle possono infine essere riscritte nel modo seguente:

$$\begin{cases} \phi_{n+1} = \phi_n + \frac{\omega_{RF} \tau \eta c^2}{v^2 E_s} \Delta E_{n+1} \\ \Delta E_{n+1} = \Delta E_n + qV(\sin \phi_n - \sin \phi_s) \end{cases} \quad (3)$$

Applicando tali equazioni alle differenze nel caso di cinque diverse condizioni iniziali si ottiene il grafico mostrato in figura 1

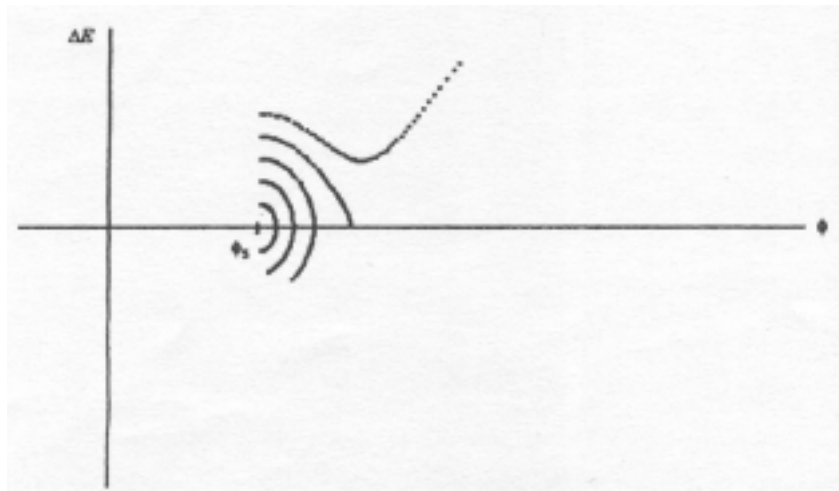


Figura 1

In figura 2 è invece mostrato come, applicando le equazioni alle differenze per un certo numero di condizioni iniziali differenti, si configurino delle regioni stabili (quelle a forma di occhio) ed instabili per il moto.

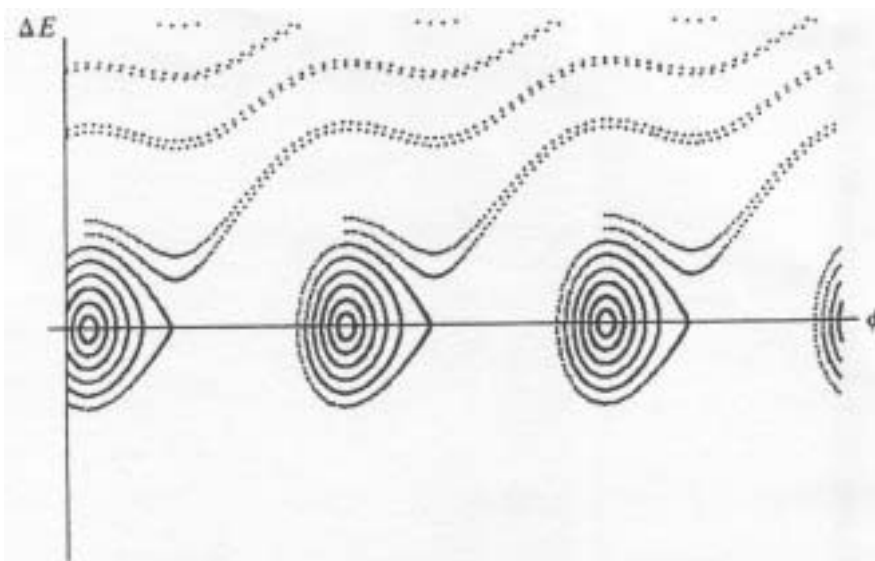


Figura 2

In figura 3 è infine mostrato il caso in cui le equazioni alle differenze vengono applicate con  $\phi_s$  nullo o pari a  $\pi$ ; si riconoscono in questo caso la situazione precedentemente battezzata come bucket stazionari.

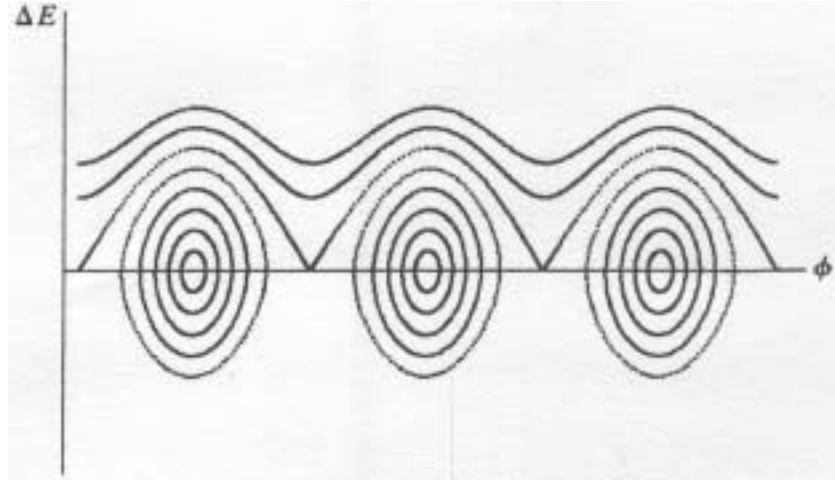


Figura 3

Ora che sono state ricavate le equazioni alle differenze, si vuole passare al caso continuo e, per fare questo, dalle equazioni del sistema (3) si ricavano le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dn} = \frac{\omega_{RF} \tau \eta c^2}{v^2 E_s} \Delta E \\ \frac{d\Delta E}{dn} = qV(\sin \phi - \sin \phi_s) \end{cases} \quad (4)$$

È importante sottolineare che il passaggio dal sistema (3) a quello appena scritto contiene un problema matematico in quanto non si stabilisce se la derivata si riferisca ad  $n-1$ ,  $n$  oppure  $n+1$ ; si accetta di lavorare con questa incertezza solamente perché i risultati in seguito avranno un soddisfacente accordo con quanto si ottiene con le equazioni alle differenze.

Le due equazioni dell'ultimo sistema visto possono essere raccolte in un'unica equazione differenziale del secondo ordine:

$$\frac{d^2 \phi}{dn^2} = \frac{\eta \omega_{RF} \tau q V c^2}{v^2 E_s} (\sin \phi - \sin \phi_s)$$

a patto che si consideri un'accelerazione costante e molto piccola; integrando una prima volta si ottiene dunque:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dn} \right)^2 + \frac{\eta \omega_{RF} \tau q V c^2}{v^2 E_s} (\cos \phi + \phi \sin \phi_s) = \text{costante}$$

Questa è formalmente identica all'espressione dell'energia totale  $T+V=U$ , dove il primo termine sulla sinistra è l'energia cinetica  $T$  e il secondo è l'energia potenziale  $V$ . Combinando quest'ultima espressione con la prima equazione del sistema (4) si ottiene:

$$\Delta E^2 + \frac{2v^2 E_s q V}{\eta \omega_{RF} \tau c^2} (\cos \phi + \phi \sin \phi_s) = \text{costante}$$

che non è altro che l'espressione che descrive il moto della particella nello spazio delle fasi  $\phi-\Delta E$ . L'esistenza di questi percorsi stabili implica che parametri come  $E_s$  siano costanti. Un certo numero di traiettorie nello spazio delle fasi longitudinale sono rappresentate nelle figure 4, 5 e 6 e si nota la somiglianza con quanto visto nel caso delle equazioni alle differenze.

A questo punto si può confidentemente usare i risultati analitici per gestire l'oscillazione nello spazio delle fasi, avendo dimostrato l'equivalenza tra la situazione alle differenze e la situazione differenziale. Per ottenere un'espressione semplice dell'oscillazione della frequenza di fase è solitamente conveniente linearizzare l'equazione del moto. Si considera dunque la seguente espansione:

$$\sin(\phi_s + \Delta\phi) - \sin \phi_s = \cos \phi_s \sin \Delta\phi + \sin \phi_s \cos \Delta\phi - \sin \phi_s \approx \cos \phi_s \Delta\phi$$

Si ottiene quindi:

$$\frac{d^2 \Delta\phi}{dn^2} + (2\pi\nu_s)^2 \Delta\phi = 0$$

che è nuovamente l'equazione di un oscillatore armonico, dove sia:

$$v_s = \sqrt{-\frac{\eta \omega_{RF} \tau c^2 q V \cos \phi_s}{4\pi^2 v^2 E_s}}$$

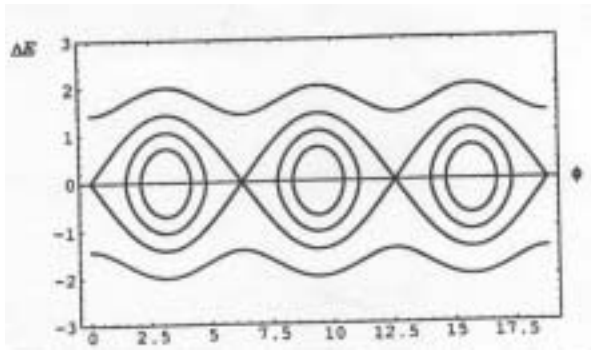


Figura 4

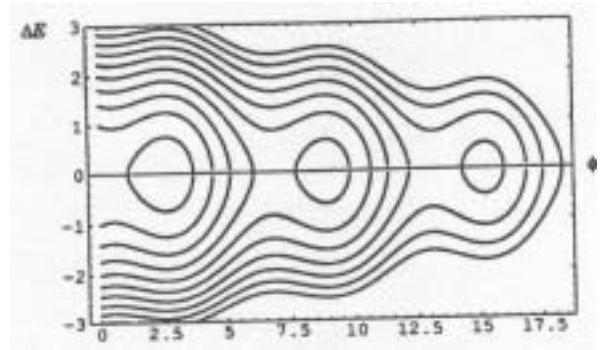


Figura 5

Si può notare come sostanzialmente si abbia:

$$v_s \div \sqrt{-\eta \cos \phi_s}$$

e quindi vede che quando  $\eta < 0$  (ovvero quando  $\gamma < \gamma_t$ ) il moto è stabile per  $\cos \phi_s > 0$  mentre, per  $\eta > 0$  (ovvero per  $\gamma > \gamma_t$ ) si deve avere  $\cos \phi_s < 0$ .

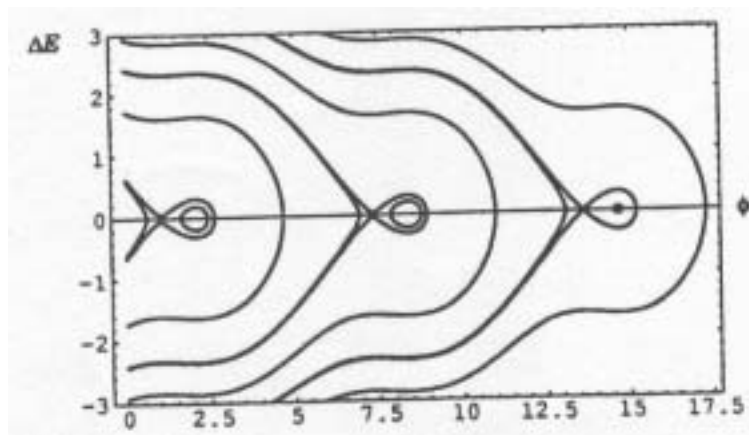


Figura 6

Siccome l'accelerazione si ha quando  $\sin \phi_s > 0$ , nel primo caso ci si piazza attorno ai  $60^\circ$  (in modo da avere  $\cos \phi_s > 0$  e anche  $\sin \phi_s > 0$ ) mentre nel secondo caso si sta attorno ai  $120^\circ$  (in modo che seno e coseno siano discordi). È dunque evidente che se durante l'accelerazione si attraversa l'energia di transizione si ha un cambio di segno e quindi bisogna saltare da  $60^\circ$  a  $120^\circ$  con quello che viene chiamato jump di fase.

Per quanto riguarda l'adiabatic damping nel caso dei sincrotroni, è innanzitutto conveniente scegliere una variabile diversa dalla variabile  $n$  utilizzata fino ad adesso: il tempo  $t$ . Le equazione (1) e (2), riscritte nel loro formato differenziale, compongono dunque il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dn} = qV \sin \phi \\ \frac{dE_s}{dn} = qV \sin \phi_s \end{cases}$$

Notando che:

$$\frac{d}{dn} = \frac{dt}{dn} \cdot \frac{d}{dt} = \tau \frac{d}{dt}$$

il sistema precedente diventa:

$$\begin{cases} \tau(E) \frac{dE}{dt} = qV \sin \phi \\ \tau(E_s) \frac{dE_s}{dt} = qV \sin \phi_s \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro si ottiene:

$$\tau(E) \frac{dE}{dt} - \tau(E_s) \frac{dE_s}{dt} = qV (\sin \phi - \sin \phi_s) \quad (5)$$

Si espanda infine  $\tau(E)$  rispetto ad  $E_s$ , ottenendo:

$$\tau(E) = \tau(E_s) + \left( \frac{d\tau}{dE} \right)_{E_s} (E - E_s)$$

Al primo ordine, dunque, la relazione (5) assume la seguente forma:

$$\frac{d}{dt} (\tau \Delta E) = qV (\sin \phi - \sin \phi_s)$$

In questo modo si è riusciti a ricostruire una relazione che sfrutta effettivamente le coordinate canoniche. Il sistema delle equazioni del moto in funzione del tempo è allora il seguente:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta\phi}{dt} = \frac{\eta \omega_{RF} c^2}{v^2 E_s} \Delta E = \lambda \Delta E \\ \frac{d}{dt} (\tau \Delta E) = \tau \left( \frac{qV \cos \phi_s}{\tau} \right) \Delta \phi = \tau \mu \Delta \phi \end{cases}$$

Gestendo ora il problema dell'adiabatic damping in maniera formale si possono ottenere le due seguenti soluzioni per l'oscillazione di fase e di energia:

$$\begin{cases} \Delta\phi = A \sqrt{\frac{\pm \lambda}{\tau \Omega_s}} \cos \left( \int \Omega_s dt + \delta_1 \right) \\ \Delta E = B \sqrt{\frac{\mp \mu}{\tau \Omega_s}} \cos \left( \int \Omega_s dt + \delta_2 \right) \end{cases}$$

dove  $\Omega_s$  non è altro che la frequenza angolare dell'oscillazione del sincrotrone.

L'area dello spazio delle fasi che contiene le particelle di un bunch è chiamata emittanza longitudinale. È sperabile che tale emittanza sia più piccola dell'area dell'intera regione stabile. Nelle coordinate  $\Delta E$ - $\Delta T$ , per un bucket con  $\phi_s$  nullo o pari a  $180^\circ$ , l'area del bucket è:

$$A = \frac{16 \left( \frac{v}{c} \right)}{\omega_{RF}} \sqrt{\frac{qVE_s}{2\pi h |\eta|}}$$

(ovviamente non vale nelle vicinanze di  $\eta=0$ ). Come già detto in precedenza, questa situazione è nota come stationary bucket in quanto la particella di riferimento non viene accelerata. Tale valore di  $\phi_s$  può essere scelto, per esempio, a livello di iniezione in un acceleratore circolare ( $\phi_s=0$  se sotto la transizione) oppure alla massima energia ( $\phi_s=180^\circ$  se sopra la transizione) In un bucket di questo tipo, l'espressione dell'emittanza longitudinale è la seguente:

$$S = \frac{\pi \left( \frac{v}{c} \right) (\Delta \hat{\phi})^2}{\omega_{RF}} \sqrt{\frac{qVE_s}{2\pi h |\eta|}}$$

Quando la fase sincrona non è né zero né  $180^\circ$ , l'area del bucket può essere ottenuta numericamente.

**Focalizzazione longitudinale: stabilità di fase per macchine circolari, adiabatic damping.**

*RF Matching*

L'importanza del matching è indiscussa e l'unico modo per effettuare il matching longitudinale non può che essere un adeguato utilizzo della cavità RF. Nelle figure 1 e 2 sono mostrate due situazioni nelle quali si possono vedere una situazione di fascio matchato e di fascio non matchato.

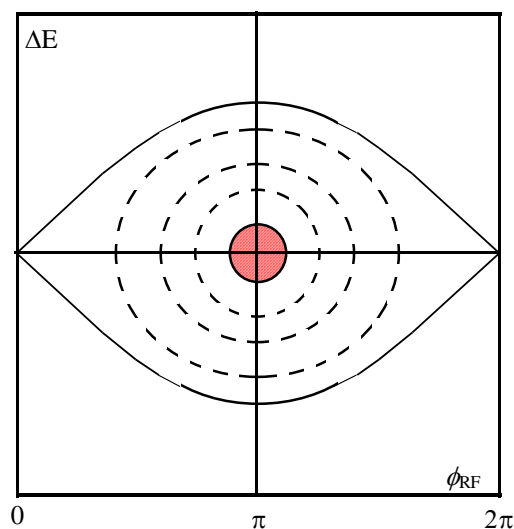


Figura 1

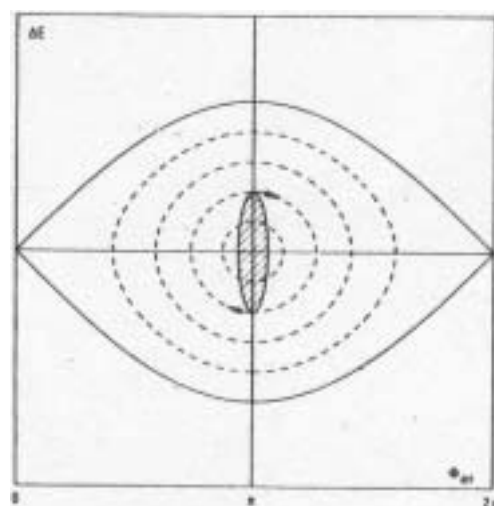


Figura 2

Nel caso in cui il bunch non sia matchato, non ci si limita ad osservare l'ellisse che ruota, ma si assiste ad un fenomeno di filamentazione, come mostrato nelle figure 3 e 4.

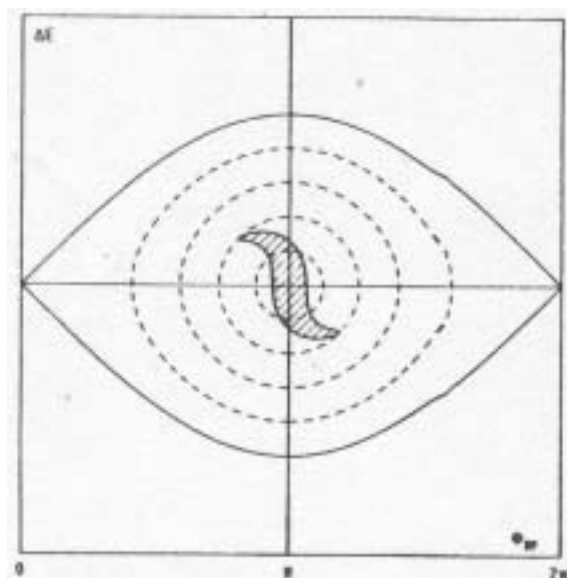


Figura 3

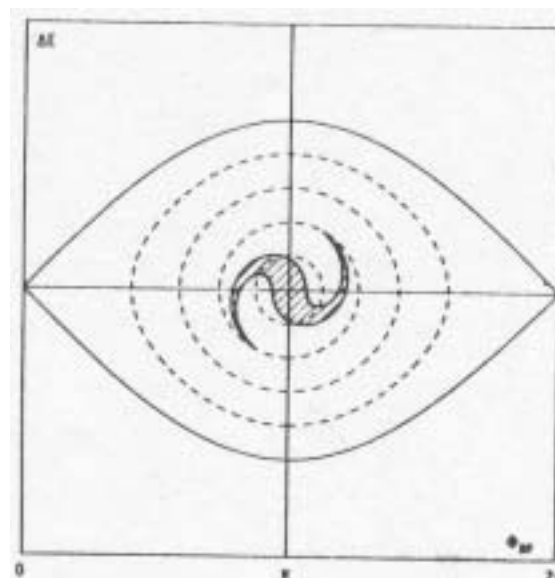


Figura 4

Il risultato complessivo è un aumento pratico dell'emittanza (che in linea di principio non cambia ma che viene considerata maggiore in quanto è necessario uno spazio maggiore per interpolare il fascio la cui forma è molto più complicata). Per eliminare il problema della filamentazione si è soliti, dunque, matchare il bucket con la cavità RF; ciò può essere fatto in tre modi differenti.

- Il metodo più classico è chiamato voltage step matching e funziona interamente sfruttando il bucket stazionario. Seguendo la sequenza di immagini 5, 6, 7 e 8 si può dunque comprendere il meccanismo che caratterizza questo primo metodo. Il bucket è inizialmente non matchato (figura 5) e gli si permette di compiere un quarto di rotazione (nel caso in questione in direzione oraria).

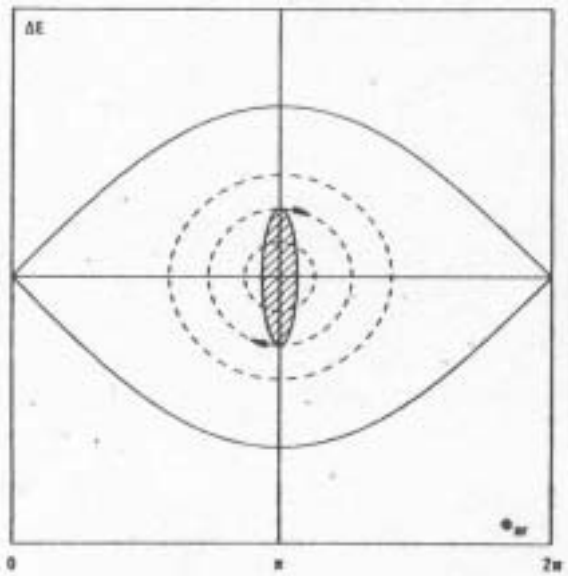


Figura 5

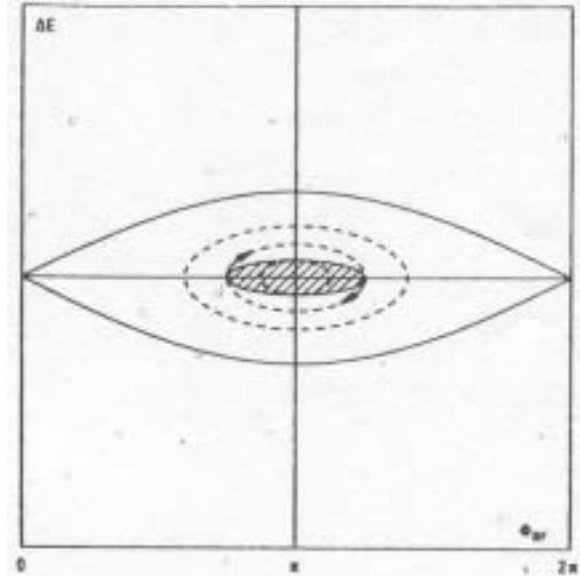


Figura 6

Il passo successivo consiste nel ridurre la tensione (voltage step) in modo da arrivare nella situazione mostrata in figura 6. Ancora una volta viene permesso al bucket di compiere un altro quarto di oscillazione lungo la sua nuova autoellisse e si ottiene quanto si può vedere in figura 7.

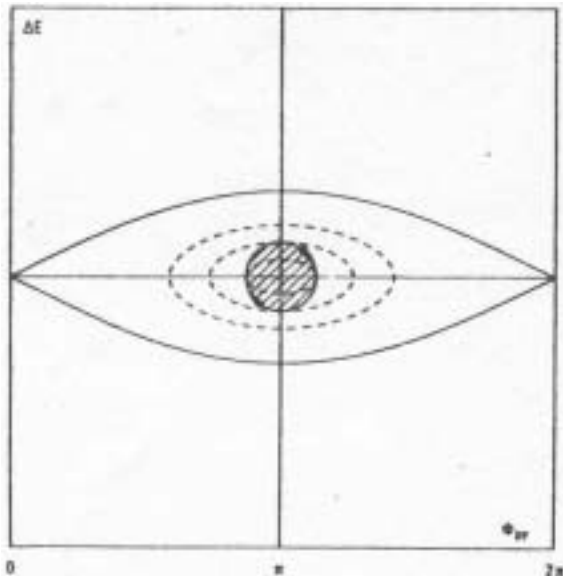


Figura 7

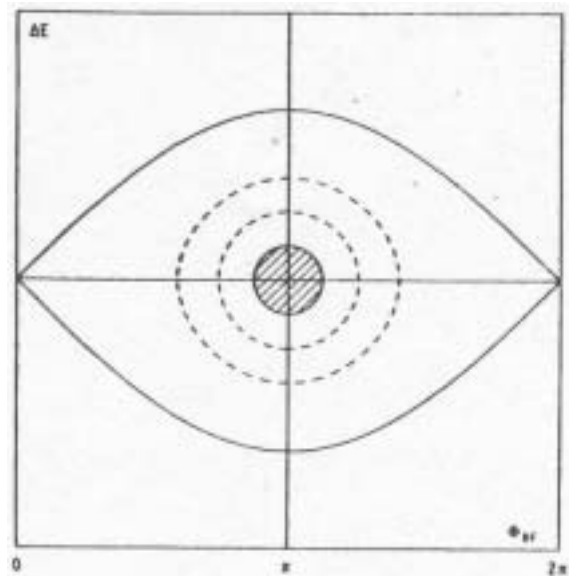


Figura 8

Infine, si torna al valore iniziale di tensione (tramite un secondo voltage step) e si ottiene il bucket matchato mostrato in figura 8. Pur rimanendo valido il meccanismo di fondo visto in queste immagini, a volte il voltage step prevede di aumentare il voltaggio per poi ridimensionarlo, invece che diminuirlo prima e riaumentarlo dopo; il limite di questo meccanismo è dunque evidente, in quanto è necessario avere una riserva di tensione che può anche essere di dimensioni non trascurabili pensando che la capacità di operare il matching va come la radice quarta della tensione stessa.

- Un secondo metodo per operare il matching è noto come Phase Jump, che si può comprendere osservando lo schema di figura 9. Anche in questo caso si inizia col permettere al bucket non matchato di ruotare, questa volta di  $45^\circ$ ; a questo punto si opera il jump di fase e si pone il fascio sulla separatrice dove questo tenderà a comprimersi. Quando il bucket raggiunge le dimensioni desiderate si opera un secondo jump di fase e si torna al centro del bucket con un fascio matchato.



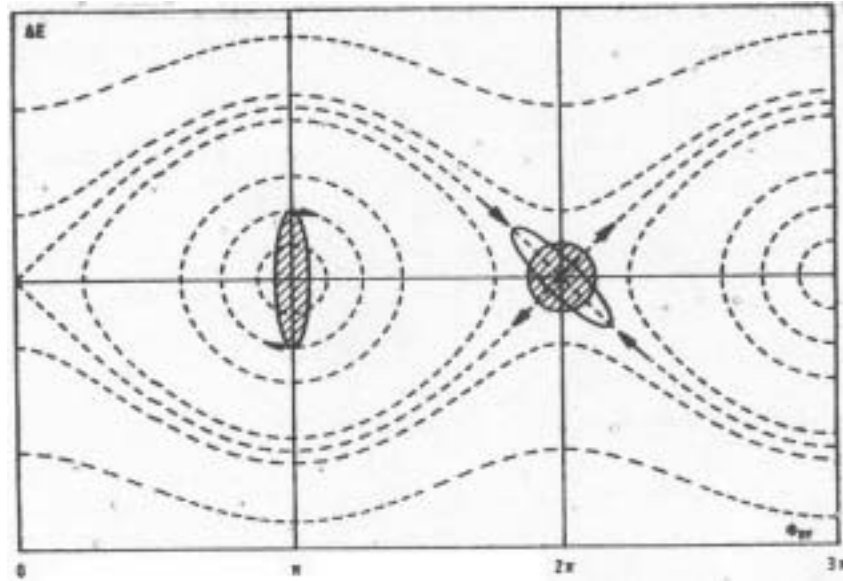


Figura 9

Questa metodica non implica nessun lavoro con la tensione ma ha come rovescio della medaglia il fatto di essere un processo non lineare.

- Il terzo metodo, detto closed-loop matching, non è altro che una applicazione del phase jump che prevede di fare un primo salto, permettere al bucket di ridursi, tornare nella posizione iniziale, controllare che il bucket sia effettivamente matchato e ripetere tutta la trafila fino a quando non si ottiene il risultato ottimale. Questa metodica, che oramai la più utilizzata, è oggi permessa dal fatto che è possibile con facilità operare il phase jump e che è altrettanto possibile conoscere con precisione se il bucket è matchato o meno.

#### Estrazione dai sincrotroni: estrazione veloce ed estrazione lenta risonante.

Nella seconda parte di questo corso si analizzano alcuni aspetti della fisica degli acceleratori che caratterizzano i sincrotroni. Il primo di questi aspetti riguarda l'estrazione che è sicuramente tra gli aspetti più difficili da realizzare in un sincrotrone.

Esistono fondamentalmente due tipi di estrazioni:

- l'estrazione veloce (detta anche estrazione a singolo giro) avviene in tempi dell'ordine dei  $\mu\text{s}$  e viene solitamente utilizzata per il passaggio del fascio da una macchina all'altra, l'estrazione veloce è caratterizzata da due tipi di macchine: i kicker e i septum;
- l'estrazione lenta (detta anche estrazione risonante) è caratterizzata da tempi che variano tra i ms ed secondi ed è l'estrazione utilizzata per spedire i fasci alle aree sperimentali.

#### Kicker

Il kicker è un oggetto impulsato (non si tratta di un magnete ma di una scarica impulsiva su un circuito particolare) il cui scopo, da cui il nome, è quello di dare un kick al fascio. Facendo riferimento allo schema di figura 10, la variazione di momento imposta dal campo  $B_k$  del kicker sarà:

$$\delta p = F \delta t = qvB_k \frac{l}{v}$$

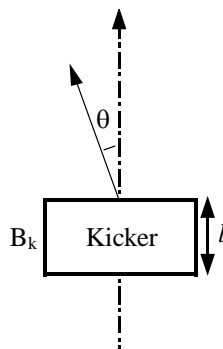


Figura 10

L'angolo  $\theta$  di cui viene deviato il fascio è legato alla variazione di momento dalla relazione seguente:

$$\vartheta_k = \frac{\delta p}{p} = \frac{qB_k l}{qB\rho} = \frac{B_k l}{B\rho}$$

Risulta dunque evidente come all'aumentare del  $B\rho$  della particella il kicker lavori con maggior profitto. Una caratteristica fondamentale del kicker deve ovviamente essere la velocità dei tempi di risalita, in quanto deve portarsi al valore ottimale di campo magnetico tra il passaggio di un bucket e l'altro (anche se a volte si lasciano alcuni posti vuoti per facilitare il lavoro del kicker) e questo significa tempi di risalita dell'ordine dei ns (proprio l'impossibilità di costruire kicker abbastanza veloci ha reso impossibile la realizzazione del ring WNR secondo le specifiche fornite in appendice NN). La variazione di campo che caratterizza un kicker è dell'ordine dei 6kgauss per secondo. A volte il kicker non fa altro che instaurare un'oscillazione di betatrone; supponendo che in una posizione  $S_1$  sia presente il kicker che dà origine ad una oscillazione di betatrone, l'ampiezza di tale oscillazione nel punto  $S_2$  sarà data dall'espressione:

$$x_2 = \sqrt{\beta_1} \sqrt{\beta_2} \sin \Delta\psi \vartheta_k$$

Con un avanzamento di fase di  $90^\circ$  si ottiene una matrice di trasferimento tale per cui si ottiene:

$$x = \beta \vartheta_k = \beta \frac{B_k l}{B\rho}$$

Il punto migliore per inserire, dunque, qualche cosa che permetta di estrarre il fascio è in prossimità del massimo dell'ampiezza, ovvero quando:

$$\begin{cases} \beta_1 = \max \\ \beta_2 = \max \\ \sin \Delta\psi = 1 \end{cases}$$

*Un esempio numerico a livello medio prevede di considerare un protone da 100 GeV che prevede un valore di  $B\rho$  di 337 Tm. Supponendo dunque di avere un kicker con un campo  $B_k$  da 0.1 T (1kGauss) e lungo 2 metri ( $l$ ) in un lattice caratterizzato da un  $\beta$  di 50 m si avrà:*

$$x = 30\text{mm}$$

*Il che significa che la distanza tra il fascio imperturbato e il fascio in uscita (ovvero la distanza tra le traiettorie in quanto il fascio è sempre uno solo) è di circa 30 mm.*

Molto spesso, qualora un singolo kicker non riesca ad estrarre il fascio, ne viene messo un secondo in fase, che fornisca a sua volta un kick in fase con quello già fornito dal primo kick.

### Setti

Una volta ottenuta una prima separazione tra le due traiettorie (quella imperturbata e quella del fascio in uscita) è necessario separare fisicamente i due fasci. Interviene in questo caso il septum.

- In figura 11 è rappresentato un setto elettrostatico, utilissimo nelle prime fasi dell'estrazione in quanto è il più piccolo oggetto che permette la separazione fisica essendo formato da alcuni fili che creano un campo massimo di 100 kV/cm.

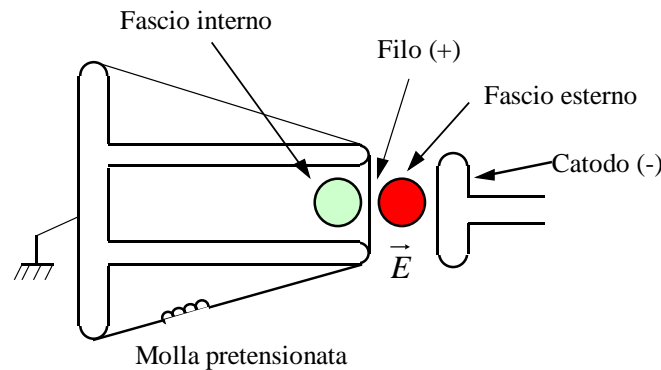


Figura 11

Il potere di questo strumento viene misurato facendo riferimento al campo magnetico equivalente al campo elettrico che effettivamente separa il fascio. Si considera dunque la relazione:

$$qE = qvB$$

da cui si ricava:

$$B_{eq} = \frac{E}{v}$$

ovvero, praticamente:

$$B_{eq} = \frac{E}{c}$$

Con valore limite di campo elettrico di cui si accennato si ottiene un campo equivalente di 1/3 di Tesla. I fili di cui è composto il setto (solitamente alimentato in corrente continua) sono spessi circa 50 μm, il che è ottimale come prima separazione fisica anche pensando al fatto che se il fascio impatta contro i fili fondendoli è necessario sostituire solamente i fili fusi e non tutto il pezzo. Complessivamente il setto elettrostatico è lungo circa 1 m. Uno strumento simile, nel senso che anch'esso è composto da una parete realizzata da fili, è lo splitter elettrostatico mostrato in figura 12, utilizzato per separare in due un fascio incidente.

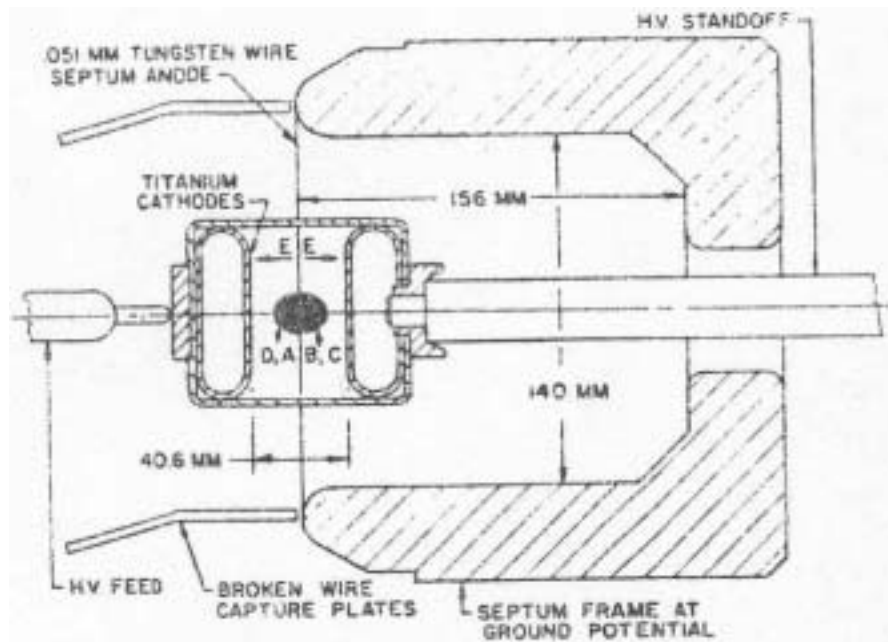


Figura 12

- Quando la separazione tra la direzione imperturbata e la direzione del fascio in uscita è sufficiente, è possibile inserire un setto un po' più spesso: il thin septum magnet (detto anche setto a corrente). Una schematizzazione di questo strumento è mostrata in figura 13 e si nota come si tratti di un normale magnete nel quale, però, uno dei poli è diventato una lamina sottile. In questo modo si forma un campo nullo all'esterno e costante all'interno; nell'ipotesi di ferro non saturo si ha:

$$\int Bdl = \mu_0 I$$

che diventa:

$$Bh = \mu_0 Jth$$

dove h è l'altezza del setto mentre t è il suo spessore.

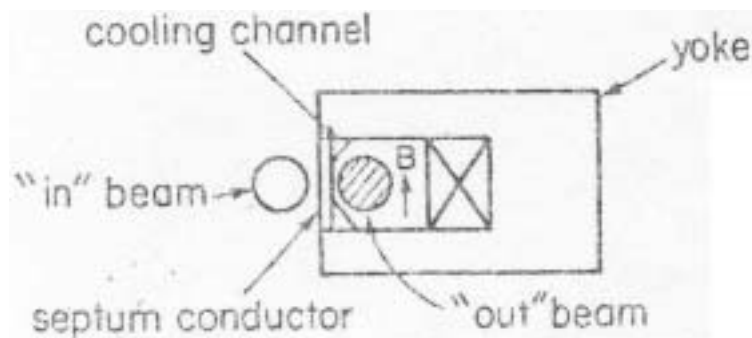


Figura 13

Dall'ultima relazione scritta si ottiene:

$$\frac{B}{t} = \mu_0 J$$

Questo tipo di setto può funzionare in due modi differenti: è infatti possibile il funzionamento in corrente continua, con valori tipici di:

$$\begin{cases} J = 1 \frac{kA}{cm^2} \\ \frac{B}{t} = 4\pi \frac{T}{m} \cong 1,3 \frac{kgauss}{cm} \end{cases}$$

che, con un valore tipico di  $t$  pari a circa 2 mm, implica un campo  $B$  di circa  $\frac{1}{4}$  di tesla, quindi molto simile al setto elettrostatico. Un secondo tipo di funzionamento è quello pulsato (con tempi caratteristici dell'ordine dei ms) caratterizzato da:

$$J = 10 \div 50 \frac{kA}{cm^2}$$

e che quindi, ancora con spessori dell'ordine dei 2 mm, permette di ottenere campi magnetici più intensi di quelli dei setti elettrostatici, raggiungendo valori tra i 2.5 e 12.5 kgauss. Uno strumento sostanzialmente identico al thin septum magnet è il thick septum magnet, che differisce solamente per quanto riguarda lo spessore del setto, che arriva fino ai 2 cm.

- Un altro tipo di setto è il Lambertson, di cui è mostrato uno schema in figura 14 e che viene utilizzato per deviare il fascio in direzione verticale.

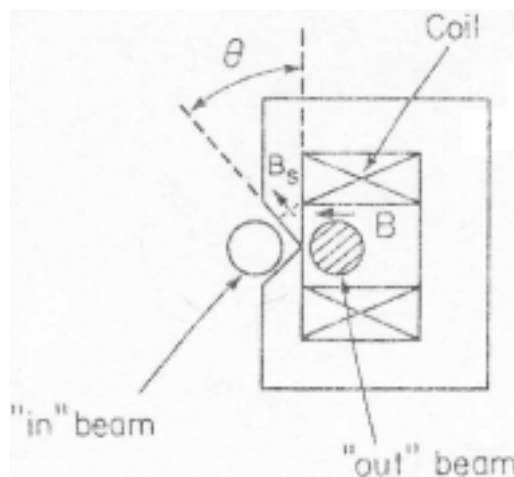


Figura 14

Nelle figure 15 e 16 sono proposte due rappresentazioni più particolareggiate del Lambertson.

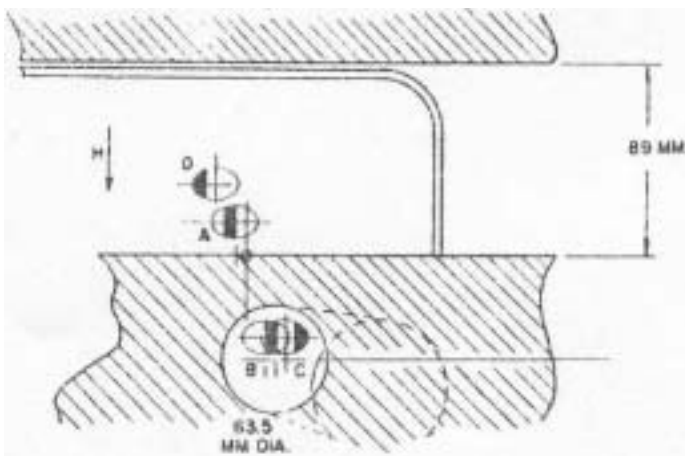


Figura 15

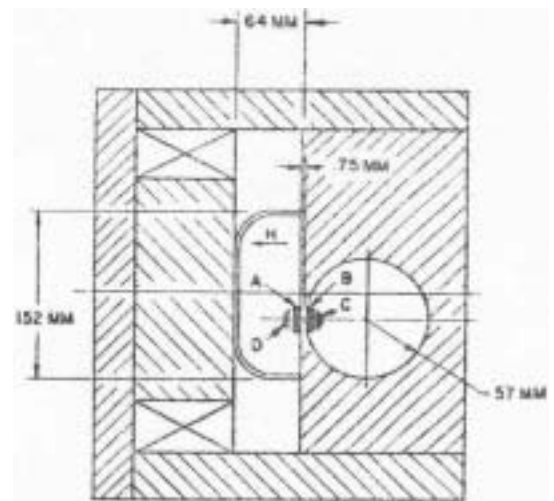


Figura 16

In figura 17 è infine mostrato uno schema del layout di estrazione di un fascio.

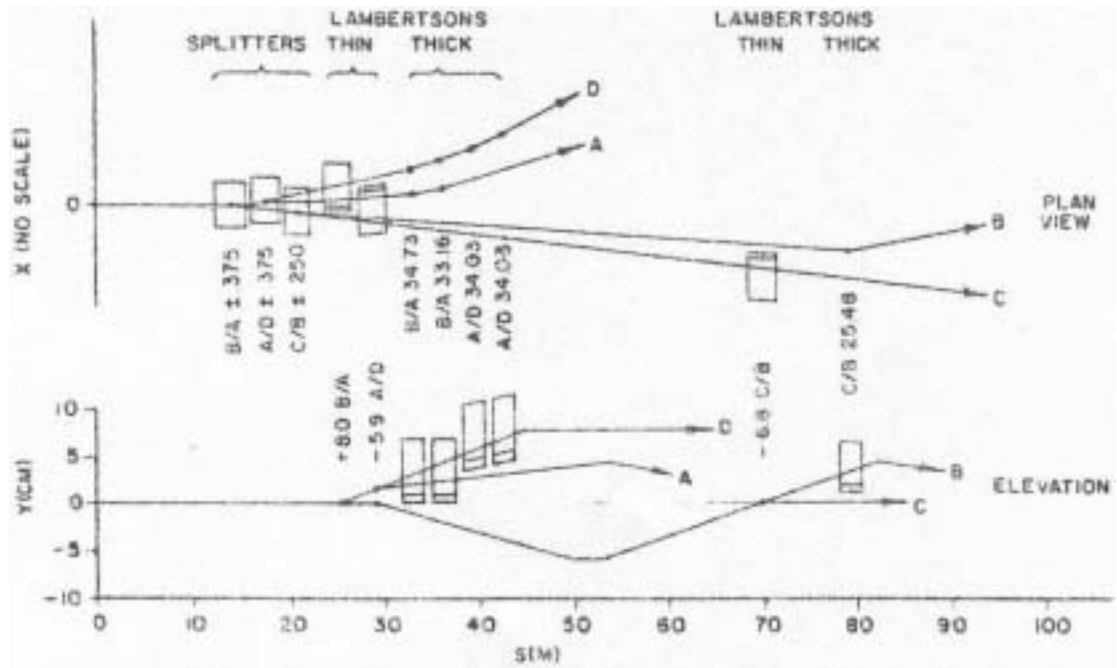


Figura 17

**Estrazione dai sincrotroni: estrazione veloce ed estrazione lenta risonante.**

*L'estrazione dall'SPS*

Dopo aver esplicitato in maniera generale gli aspetti principali dell'estrazione è possibile analizzare il caso particolare dell'estrazione dall'SPS del CERN. A questo scopo si faccia nuovamente riferimento ai dati sull'SPS disponibili sulla relativa tavola di acceleratore presentata in [appendice 8](#) e all'articolo presentato in [appendice 18](#).

### Iniezione: iniezione a single turn, multiturn e charge exchange.

L'iniezione nei sincrotroni (sempre nel piano trasverso) può avvenire seguendo tre diverse metodiche:

- l'iniezione a single turn,
- l'iniezione multiturn,
- l'iniezione a scambio di carica.

#### Iniezione single turn

L'iniezione veloce non è altro che l'operazione inversa rispetto all'estrazione veloce, semplificata dal fatto che in questo caso si ha un valore nettamente inferiore della rigidità  $B\rho$  del fascio. La sequenza dei macchinari richiesti è ovviamente inversa rispetto a quella dell'estrazione: si ha dunque un septum magnet seguito da un deflettore elettrostatico che iniettano il fascio sulla traiettoria di riferimento con una piccola divergenza che viene eliminata grazie ad un kicker posto ad un  $\Delta\mu$  pari a  $90^\circ$  più a valle.

#### Iniezione multiturn

Il secondo metodo di inserzione, denominato inserzione multiturn, è molto utile per aumentare la carica contenuta nella macchina. Secondo questa metodica, nell'arco di diversi giri, un certo numero di bunches vengono affiancati nel piano trasverso (quando si tratta di pochi giri) o in quello longitudinale (quando il numero di giri è superiore). Molto raramente, in quanto la procedura è ovviamente più complessa, si impilano diversi fasci sia nel piano trasverso che in quello longitudinale. L'impilamento dei fasci avviene secondo due diverse metodiche:

- a) il parallel stack;
- b) il rotatine stack.

In entrambi i casi si può definire un fattore di diluizione legato al fatto che diversi fasci vengono accoppiati; se dunque  $\varepsilon_i$  è l'emittanza dell' $i$ -esimo fascio degli  $n$  che vengono affiancati ed  $\varepsilon_n$  è l'autoellisse che raccoglie tutti i fasci affiancati (si faccia riferimento alla figura 1), il fattore di diluizione sarà definito nel modo seguente:

$$D = \frac{\varepsilon_n}{n\varepsilon_i}$$

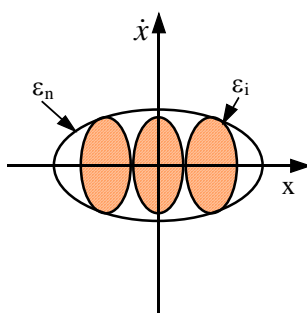


Figura 1

Il valore minimo teoricamente possibile per il fattore di diluizione  $D$  è 2. Dall'espressione del fattore di diluizione si ricava:

$$\varepsilon_n = Dn\varepsilon_i$$

da cui si comprende come il limite dell'iniezione multiturn (oltre ad essere legato all'accettazione della macchina) è dovuto alla qualità del fascio che vede aumentare la propria emittanza ad ogni fascio che viene inserito.

L'iniezione con tecnica multiturn prevede dei particolari valori del tune (ovvero delle frequenze di focalizzazione): nel caso della tecnica a rotating stack si deve avere:

$$\nu = I + \frac{1}{n} \quad \text{con } n=2,3,\dots$$

Nel caso del parallel stack si dovrà invece avere:

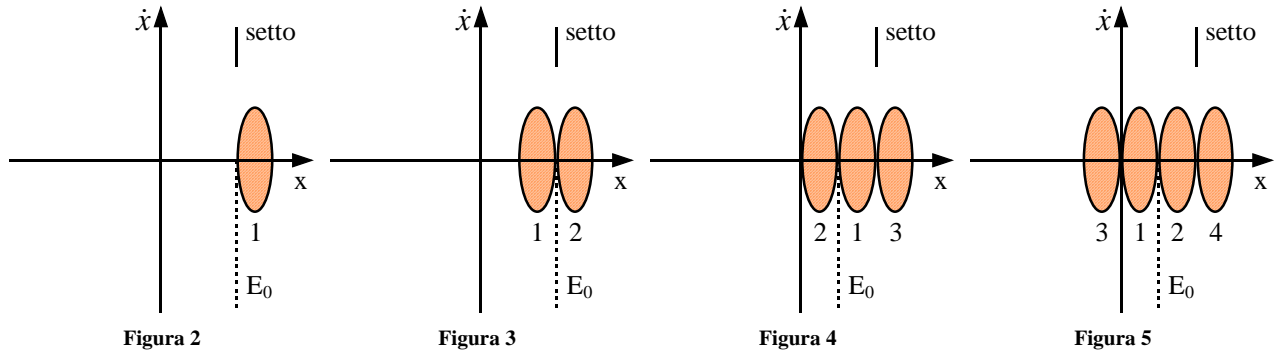
$$\nu = I + \frac{1}{2}$$

Si nota quindi che il punto di lavoro coincide con delle risonanze, situazione che si è già vista essere pericolosa. In effetti l'iniezione funziona anche spostandosi leggermente da questi punti di lavoro, è però possibile lavorare

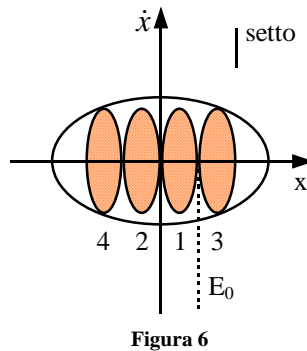
effettivamente su una risonanza contando sul fatto che l'iniezione richiede solo un numero relativamente piccolo di giri, durante i quali è sperabile che le risonanze non facciano in tempo a risultare eccessivamente dannose.

Nell'inserzione, così come nell'estrazione, è necessario deviare la traiettoria di riferimento nella zona nella quale avviene l'inserzione tramite l'utilizzo di quattro piccoli magneti (detti bumpers) in modo da portarsi più vicini al setto elettrostatico. Nel caso dell'inserzione i bumpers hanno un funzionamento abbastanza articolato in quanto spostano in maniera adeguata la traiettoria di riferimento tutte le volte che un fascio viene inserito.

Facendo dunque riferimento alla sequenza delle immagini 2, 3, 4, 5 e 6 si può analizzare il comportamento dei bumpers nel caso di inserzione multiturn in parallel stack con 4 giri (il che significa che  $D$  è maggiore o uguale a 1,57).



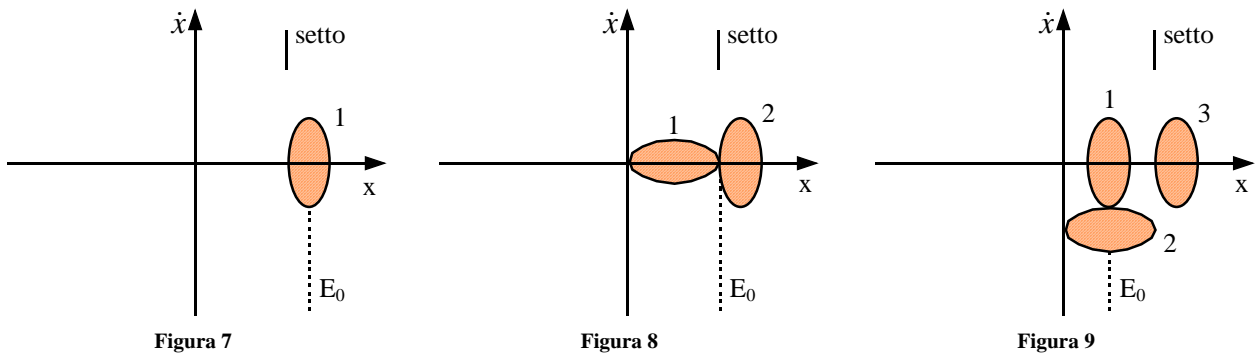
Come si nota in figura 2, al momento dell'iniezione del primo fascio il bumper mantiene la traiettoria di riferimento coincidente con la posizione del setto (la cosa non è al momento problematica in quanto all'interno della macchina non è ancora presente il fascio). Dato il tune particolare che si deve utilizzare per l'inserzione multiturn in parallel stack ( $I+1/2$ ), in un giro il fascio 1 compie una mezza oscillazione e si ritrova oltre il setto all'interno della macchina. Si è fatto dunque posto, come mostrato in figura 3, per inserire il secondo fascio. Se a questo punto il bumper lasciasse inalterata la traiettoria di riferimento, nel giro successivo si osserverebbero i fasci 1 e 2 che si scambiano di posto; per evitare ciò il bumper sposta la traiettoria di riferimento come mostrato in figura 4, in questo modo la mezza oscillazione che faranno sia il fascio 1 che il fascio 2 permetterà al fascio 1 di rimanere all'interno della macchina e al fascio 2 di saltare il setto; si sarà così fatto posto per il fascio 3. La nuova posizione della traiettoria di equilibrio permette al fascio 3 di saltare il setto e di entrare a sua volta nella macchina, come mostrato in figura 5, viene così fatto spazio al fascio numero 4.



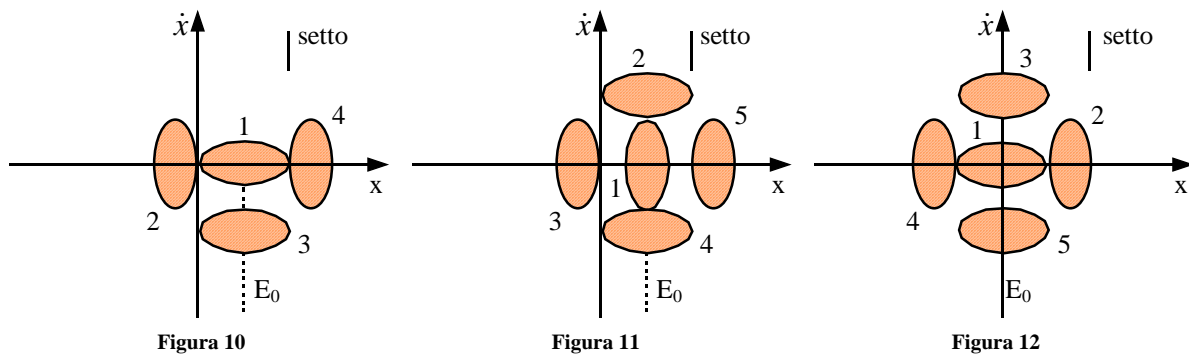
A questo punto il bumper riporta la traiettoria di equilibrio nella posizione di equilibrio, così che con l'ultima mezza oscillazione anche il fascio numero 4 attraversa il setto e si ottiene la configurazione mostrata in figura 6.

Facendo ora riferimento alla sequenza composta dalle immagini 7, 8, 9, 10, 11 e 12 si può vedere cosa succede durante un'inserzione multiturn con rotating stack. In questo caso si considerano 5 giri (e quindi si avrà  $D \geq 1,80$ ). Nella posizione di partenza (si veda il grafico di figura 7) il bumper mantiene l'orbita di equilibrio addirittura all'esterno della macchina, in prossimità del fascio numero 1 che sta per entrare.





Il tune che si utilizza per questo tipo di inserzione permette al fascio di compiere solamente  $\frac{1}{4}$  di oscillazione durante il primo giro e quindi, al secondo giro, quando il secondo fascio si presenta all'ingresso, si ha la situazione mostrata in figura 8. Per poter ora fare in modo che durante il successivo quarto di oscillazione il fascio 1 e 2 rimangano dentro la macchina facendo posto al fascio 3, il bumper sposta la traiettoria di equilibrio e si ottiene la configurazione mostrata in figura 9. Attraverso una successiva rotazione di  $\frac{1}{4}$  di oscillazione viene inserito anche il quarto fascio (figura 10) e viene fatto il posto per il quinto (figura 11). Infine, figura 12, il bumper riporta l'orbita di equilibrio nella posizione centrale e sono stati inseriti tutti e cinque i fasci.



#### Inserzione a scambio di carica

Il terzo metodo di inserzione, denominato a scambio di carica ("charge exchange") è particolarmente utile in quanto lo scambio di carica vero e proprio (lo "stripping") non può essere descritto con una formulazione hamiltoniana e quindi non bisogna sottostare al teorema di Liuville. Da un punto di vista pratico, dunque, questo significa che i singoli fasci non sono più un oggetto solido nello spazio delle fasi che possono quindi essere solamente affiancati (come accadeva nell'inserzione multiturn) ma possono essere sovrapposti; ciò significa aumentare l'intensità del fascio (a questo punto il limite all'intensità viene dato solamente dagli effetti di carica spaziale) e mantenere costante l'emittanza, in quanto, avendo introdotto  $n$  fasci di emittanza  $\epsilon_i$ , si ha un'emittanza complessiva  $\epsilon_n$  ancora uguale a  $\epsilon_i$ . Come si può dunque notare nello schema di figura 13, una coppia di bumpers devia l'orbita di equilibrio in modo che questa attraversi lo stripper (che è un sottilissimo film di carbonio); in questa situazione non è ovviamente necessaria la presenza di un setto elettrostatico; lo stripper trasforma il fascio di  $H^-$  in  $H^+$  mentre lascia inalterato il fascio di  $H^+$  già presente nella macchina.

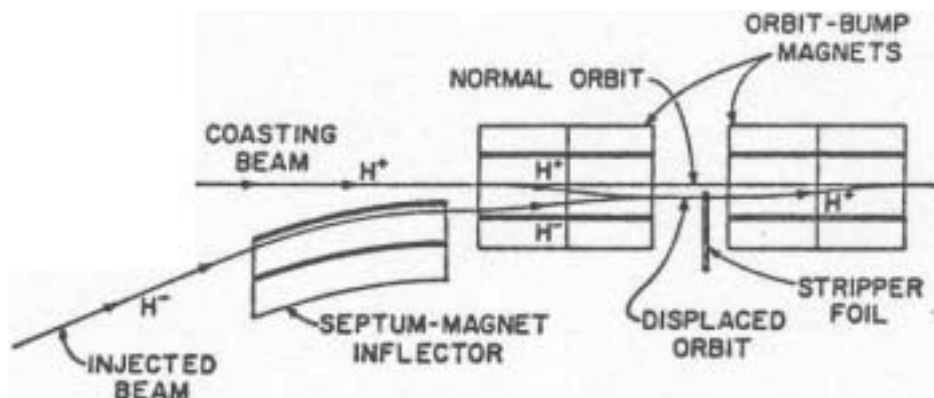


Figura 13

Alla fine dell'iniezione i bumpers vengono diseccitati e il fascio smette di attraversare lo stripper. L'iniezione a scambio di carica soffre di due fenomeni che ne limitano l'utilizzo in termini di numero di fasci sovrapponibili:

- lo scattering angolare che porta ad un leggero incremento dell'emittanza ogni volta che il fascio attraversa lo stripper;
- l'energy stragglng che porta ad un incremento dello spread di momento  $\Delta p/p$  ad ogni passaggio del fascio nello stripper;

entrambi questi effetti sono maggior evidenti nei fasci che vengono inseriti per primi, in quanto se vengono inseriti n fasci, il primo attraversa lo stripper n volte. L'iniezione tramite scambio di carica (che può ovviamente essere utilizzata una sola volta nell'intero ciclo di vita del fascio), viene solitamente utilizzata all'interfaccia tra il linac e il primo acceleratore circolare; nella macchina successiva si utilizza l'iniezione a single turn.

#### *L'iniezione nel Booster del Fermilab*

Dopo aver esplicitato in maniera generale gli aspetti principali dell'iniezione è possibile analizzare il caso particolare dell'iniezione nel Booster da 8 GeV del Fermilab. A questo scopo si faccia nuovamente riferimento sia ai dati sul Proton Linac da 200 MeV sia a quelli sul Booster disponibili sulle relativa tavola di acceleratore presentate rispettivamente in [appendice 9](#) e [10](#), nonché all'articolo presentato in [appendice 19](#). Da notare la differenza cronologica dei dati in quanto l'articolo è del 1977 mentre le tavole di reattore sono del 1980.

**Iniezione: iniezione a single turn, multiturn e charge exchange.**

*Adiabatic Bunching*

L'inserzione del fascio da un linac ad un sincrotrone deve necessariamente affrontare il problema del mismatch delle strutture pulsate delle due macchine; ricordando i dati forniti nelle tavole di reattore delle macchine del Fermilab e del CERN si può osservare come il linac sia sempre caratterizzato da una frequenza di 200 MHz mentre i sincrotroni hanno frequenze variabili e molto differenti: il Booster del Fermilab aveva una frequenza variabile tra i 30 e i 53 MHz mentre la frequenza del PSB del CERN variava tra i 2.8 e i 9.8 MHz.

Per ottenere il bunching longitudinale del fascio all'interno del sincrotrone si utilizza dunque una procedura che prende il nome di cattura adiabatica (adiabatic bunching) che viene preceduta dal debunching del fascio. Mantenendo infatti spento l'RF (in realtà una piccola tensione di controllo è sempre mantenuta) il  $\Delta p/p$  intrinseco del fascio inserito porta ad un rapido debunching del fascio, che assume dunque una struttura continua, come mostrato nella sequenza composta dalle immagini 1 e 2

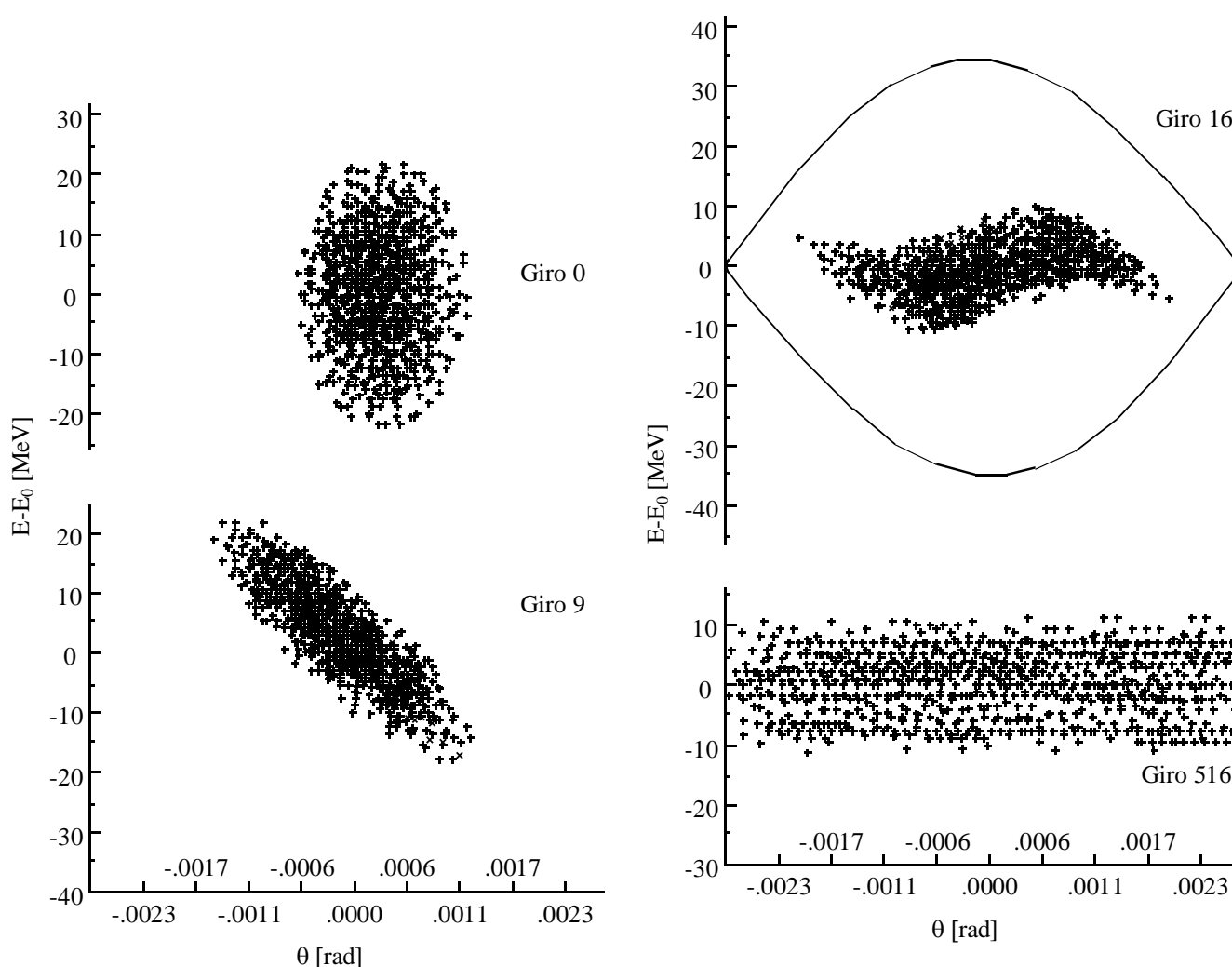


Figura 1

Figura 2

Una volta che il fascio ha assunto una forma continua prende il via l'effettiva cattura adiabatica; l'RF viene dunque acceso e con un lento tuning ed una lenta salita della tensione verso il valore massimo, si ottengono i bucket stazionari. Il processo, esemplificato nella sequenza composta dalle immagini 3 e 4, è efficiente al 100% ed il tempo necessario per portarlo a termine è abbastanza ristretto, in quanto sono necessarie circa 2 oscillazioni di sincrotrone (ovvero tra i 100 ed i 1000 giri). Il funzionamento di questa procedura si basa sul fatto che nei momenti iniziali, ovvero quando il bucket è ancora molto piccolo, le particelle che ne sono all'esterno viaggiano in direzione orizzontale (rispetto al grafico della figura 3) e quindi si portano in una posizione ideale per essere catturate quando le dimensioni del bucket saranno state incrementate.

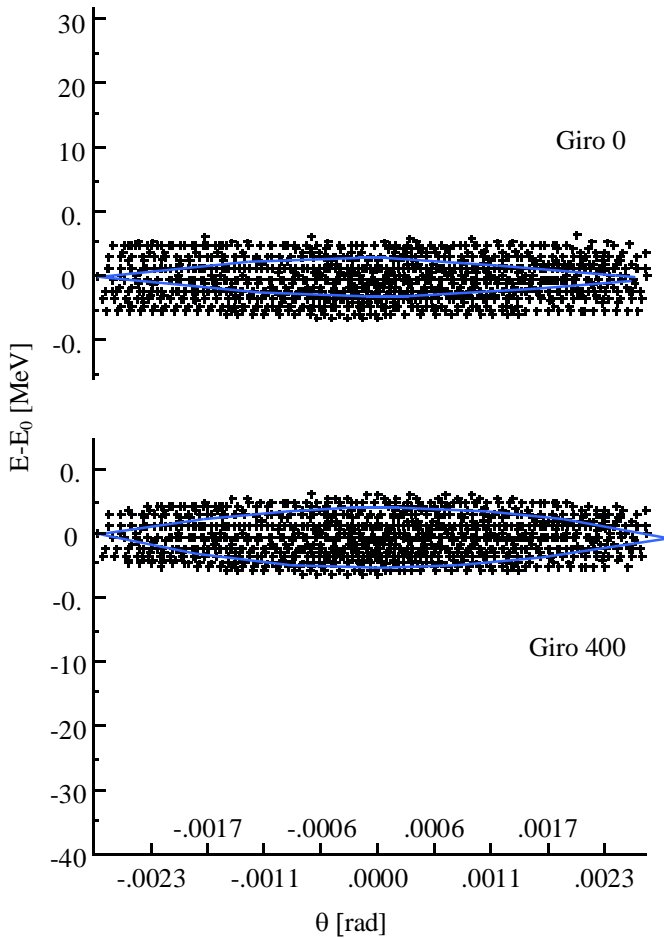


Figura 3

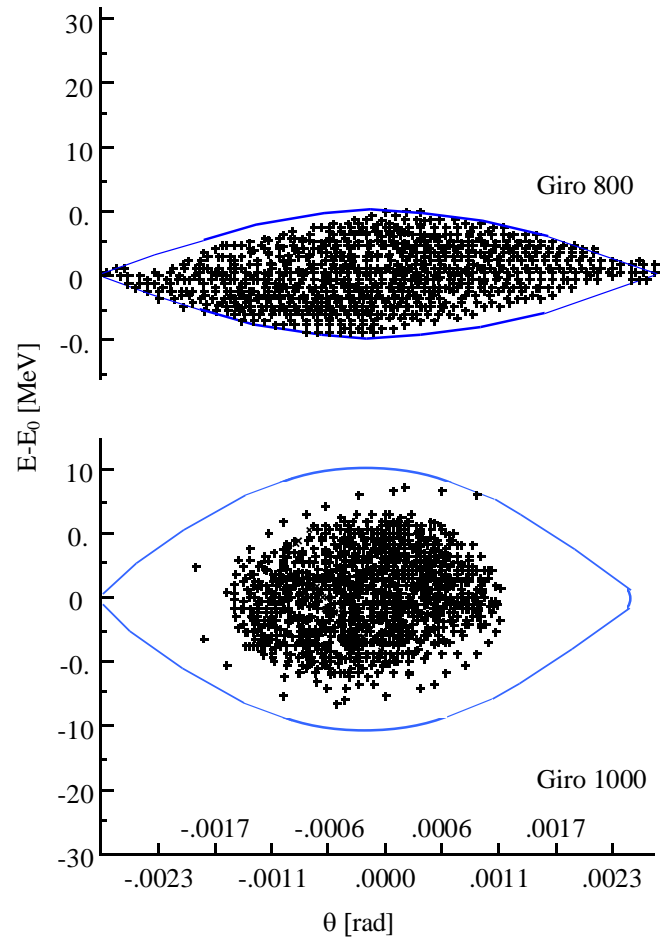


Figura 4

L'importanza della lentezza nel processo di cattura si può facilmente comprendere facendo riferimento alla sequenza composta dalle figure 5 e 6 nella quale appare evidente come la formazione immediata di un bucket caratterizzato dalla massima tensione non permetta la cattura di tutte le particelle; inoltre, come si può osservare, si ha un cospicuo effetto di filamentazione che porta, nella pratica, ad un aumento dell'emittanza.

### **Elettrosincrotroni: perdita di energia per radiazione, radiation damping.**

Come è già stato precisato in precedenza, le macchine che accelerano protoni e quelle che accelerano elettroni si differenziano, tra le altre cose, per la rilevanza del fenomeno dell'emissione di luce di sincrotrone che caratterizza questo secondo tipo di acceleratori. Il fenomeno classico dell'irraggiamento di una carica accelerata non si traduce però, semplicemente, in una perdita di energia, con la conseguente necessità di un extra-lavoro della cavità RF per compensarla, ma agisce in maniera più estesa nel complicare la trattazione.

#### *Elettrosincrotroni*

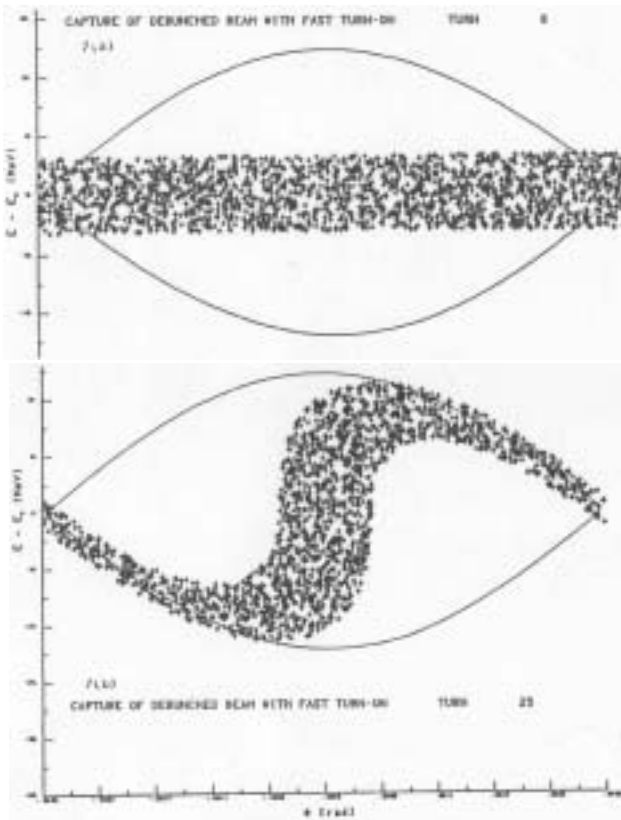
Una conseguenza importante della presenza della radiazione di sincrotrone è la cessazione della possibilità di utilizzare gli hamiltoniani per descrivere il comportamento della particella, il che significa la mancanza di validità del teorema di Liouville. Il processo radiativo può dunque essere descritto solamente attraverso metodi statistici; inoltre, siccome l'emissione è un fenomeno quantistico, la determinazione di una situazione di equilibrio è resa maggiormente complicata dalla contemporanea presenza di fenomeni di damping e di antidamping dovuti entrambi alla radiazione stessa. L'effetto di antidamping è facilmente intuibile: siccome infatti l'emissione di fotoni è un fenomeno statistico e l'energia dei fotoni emessi non è fissa, è possibile che un elettrone in viaggio sulla sua orbita di riferimento emetta improvvisamente un fotone molto energetico, come conseguenza l'orbita di riferimento che gli competerebbe si sposta in maniera significativa mentre l'elettrone stesso è ancora posizionato sulla vecchia orbita di equilibrio: la naturale conseguenza è l'originarsi di una vistosa oscillazione dell'elettrone. L'effetto di damping si può comprendere pensando che un elettrone che emette un fotone deve anche perdere una adeguata quantità di moto, generalmente in una direzione che non sarà perfettamente parallela alla sua orbita di equilibrio; nel passaggio nella successiva cavità RF, questa

compenserà la quantità di moto persa, ma questa sarà diretta parallelamente all'orbita di equilibrio: l'effetto complessivo è dunque quello di una graduale riduzione della divergenza delle particelle.

*Descrizione del moto verticale in presenza di radiazione*

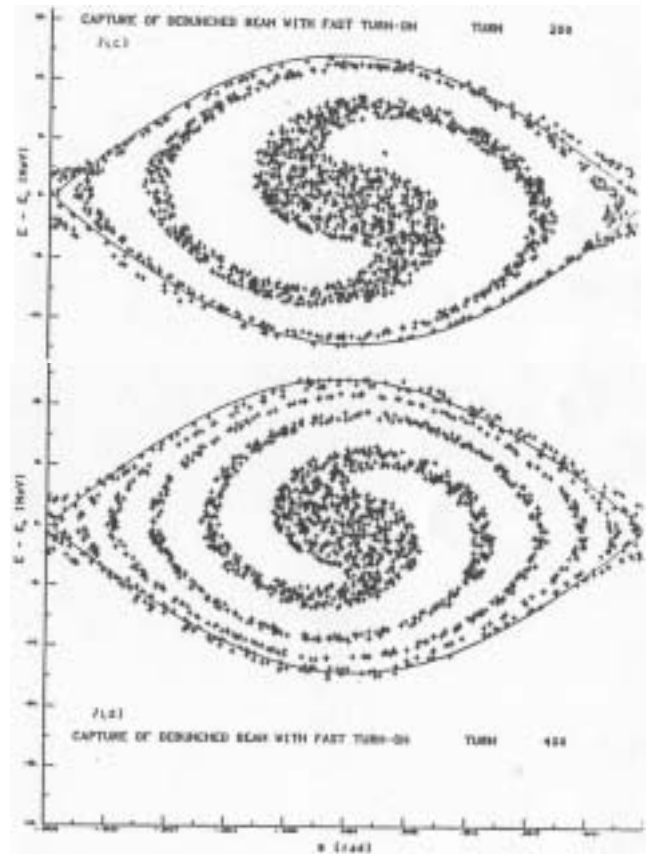
Per avere un'idea generale della situazione conviene fare alcune drastiche semplificazioni:

- si suppone dunque che la perdita di energia sia un processo continuo (mentre nella realtà questa avviene solamente all'interno dei magneti di bending);
- si impone che tutta l'energia persa venga emessa nella direzione della velocità della particella e che quindi non abbia una distribuzione angolare (che invece esiste e si ha un angolo  $\alpha$  inversamente proporzionale a  $\gamma$ );
- si ignora l'effetto quantico dell'emissione;
- si fa riferimento alla smooth approximation.



(a) Giro 0  
(b) Giro 25

Figura 5



(a) Giro 200  
(b) Giro 400

Figura 6

Partendo dunque dalla seguente relazione relativistica:

$$p^2 c^2 = T^2 + 2TE_0$$

e ricordando che:

$$dp = \frac{E}{pc^2} dT$$

si ricava:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{v} \cdot \frac{dT}{dt}$$

Se, come si è appunto ipotizzato, la potenza irradiata viene emessa solamente nella direzione della velocità, si avrà:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{1}{v} \cdot \frac{dT}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{v}$$

dove  $dT/dt$  è, appunto, la potenza irradiata  $P_\gamma$ . Siccome la velocità  $v$  è pressoché costante ed uguale alla velocità della luce, l'equazione del moto assiale sarà:

$$f_z = \frac{dp_z}{dt} = -\frac{P_\gamma}{c^2} \cdot \frac{dz}{dt} - m\omega^2 z$$

dove il primo termine del secondo membro si riferisce alla radiazione, mentre il secondo termine si riferisce all'oscillazione di betatrone. Assumendo ora, al primo ordine, che la potenza irradiata coincida con la potenza irradiata dalla particella sincrona (ovvero che  $P_\gamma$  coincida con  $P_{\gamma s}$ ) si avrà:

$$f_z = \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = m\ddot{z} + m\dot{z} = -\frac{P_{\gamma s}}{c^2} \dot{z} - m\omega^2 z$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left( \frac{P_{\gamma s}}{E} + \frac{\dot{E}}{E} \right) \frac{dz}{dt} + \omega^2 z = 0$$

nella quale il termine di damping è il secondo all'interno della parentesi e quello proporzionale ad  $\omega^2$ . La soluzione sarà dunque:

$$z(t) \cong e^{-\frac{1}{2} \int \left( \frac{P_{\gamma s}}{E} + \frac{\dot{E}}{E} \right) dt} \cos(\omega t + \varphi)$$

Nel caso non ci sia potenza irradiata (ovvero  $P_{\gamma s}$  sia nulla) si avrà:

$$z(t) \cong e^{-\frac{1}{2} \int \frac{\dot{E}}{E} dt} \cos(\omega t + \varphi) \cong e^{-\frac{1}{2} \log E} \cos(\omega t + \varphi) \cong E^{-\frac{1}{2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

e quindi si ritorna al damping classico dovuto all'oscillazione di betatrone che deriva dall'accelerazione.

Nel caso invece in cui non ci sia accelerazione (ovvero nel caso in cui la variazione di  $E$  sia nulla) l'RF si limita a compensare l'energia persa per radiazione e si avrà:

$$z(t) = e^{-\frac{1}{2} \frac{P_{\gamma s}}{E} t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Siccome poi si sta facendo riferimento alla particella di riferimento,  $P_{\gamma s}$  ed  $E$  sono costanti e quindi si potrà scrivere:

$$z(t) \cong e^{-\alpha_z t}$$

dove si sono così definiti il damping rate ( $\alpha_z$ ) e il damping time ( $\tau_z$ ) definiti nel modo seguente:

$$\begin{cases} \alpha_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_\gamma}{E} \\ \tau_z = \frac{1}{\alpha_z} = \frac{2E}{P_\gamma} \end{cases}$$

In modo del tutto analogo è possibile ricavare le costanti di damping anche per gli altri due spazi delle fasi:

$$\begin{cases} \alpha_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_\gamma}{E} \left( \frac{1}{v_x^2} - 1 \right) \\ \alpha_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_\gamma}{E} \left( 4 - \frac{1}{v_x^2} \right) \end{cases}$$

Da notare la dipendenza da  $v_x$ , introdotta dall'utilizzo della smooth approximation.

Se si tiene ora conto della distribuzione angolare dell'energia emessa (che prima era stata considerata nulla), l'approccio statistico che ne consegue porta ad espressioni come la seguente:

$$\frac{1}{\langle z^2 \rangle} \cdot \frac{d\langle z^2 \rangle}{dt} = -2\alpha_z$$

le cui soluzioni avranno la seguente forma:

$$\langle z^2 \rangle = e^{-2\alpha_z t}$$

Espressioni simili si avranno per gli altri spazi delle fasi.

Definendo ora il numero di partizione  $J$  come segue:

$$\begin{cases} \alpha_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_\gamma}{E} J_x \\ \alpha_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_\gamma}{E} J_z \\ \alpha_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_\gamma}{E} J_s \end{cases}$$

si dimostrare l'esistenza di una relazione generale, nota come teorema di Robinson (si faccia riferimento a "An Introduction to the Physics of High-Energy Accelerators" di Donald A. Edwards e M.J. Syphers. John Wiley & Sons, 1993, New York, pagina 276) secondo la quale:

$$J_x + J_z + J_s = 4$$

Per macchine aventi un piano mediano di simmetria si può definire il termine:

$$\tilde{D} = \frac{\left\langle \frac{D}{p^2} \left( \frac{1}{p} + 2 \frac{G}{\beta} \right) \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{p^2} \right\rangle}$$

che è quindi legato alla funzione di dispersione D (altrove indicata con  $\eta$ ) ed al gradiente G della cella; si avrà in genere:

$$\begin{cases} J_x = 1 - \tilde{D} \\ J_z = 1 \\ J_s = 2 + \tilde{D} \end{cases}$$

In presenza di magneti combinati (come nel PS del CERN e nei primi elettrosincrotroni) esiste un effetto di antidamping nel piano orizzontale, essendo:

$$\tilde{D} \cong 2$$

Nel caso di funzioni separate, si può imporre:

$$\tilde{D} < 1$$

sfruttando un apposito design del lattice. Gli effetti di antidamping possono essere ridotti riducendo il raggio dell'orbita di riferimento oppure inserendo dei magneti di wiggler (come nel PS e nel LEP del CERN) per cambiare il numero di partizione. In generale, siccome  $J_x > J_z$ , nelle macchine per elettroni il fascio si presenta sotto forma di un nastro.

Per quanto riguarda gli effetti quantistici, questi hanno sempre un effetto di antidamping, il che pone dei valori limite per l'emittanza nello spazio delle fasi. Il fascio è generalmente gaussiano in tutte le dimensioni (trasversali e longitudinale) con valori limite che, ponendo  $J_s=2$  e  $J_x=J_z=1$ , sono dati dall'r.m.s. dello spread di energia:

$$\sigma_E^2 = \frac{55}{64\sqrt{3}} \cdot \frac{\hbar}{m^3 c^5} \cdot \frac{E^2}{R} \approx \frac{1}{J_s}$$

dall'r.m.s. della dimensione orizzontale del fascio dovuto all'oscillazione di betatrone:

$$\varepsilon_{xrms} = \frac{\sigma_{x\beta}^2}{\beta} = 2\sigma_E^2 \frac{R}{v^3} \approx \frac{1}{J_x}$$

e dall'r.m.s. delle dimensioni orizzontali complessive del fascio:

$$\sigma_{xtot} = \sqrt{\sigma_{x\beta}^2 + \eta^2 \sigma_E^2}$$

dove  $\eta$  sia la funzione di dispersione. Siccome, in buona approssimazione, per gli storage ring di elettroni esistono le due seguenti relazioni:

$$\begin{cases} E^2 = R \\ v = \sqrt{R} \end{cases}$$

ne seguono i seguenti ordini di grandezza:

$$\begin{cases} \sigma_E \cong 10^{-3} \\ \sigma_x \cong 2mm \\ \sigma_z \cong \frac{1}{10}mm \end{cases}$$

dove si assume che l'accoppiamento tra x e z sia dovuto solamente ad imperfezioni. Si noti che teoricamente dovrebbe essere:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_z} \cong \frac{1}{\gamma^2}$$

un leggero accoppiamento tra la direzione assiale e quella radiale è però sempre presente a causa di errori di allineamento dei magneti e nei quadrupoli. Nelle macchine per elettroni i valori di  $\sigma$  vengono utilizzati per stabilire le aperture che, trattandosi di trattazioni in 6 dimensioni, si aggirano tra i  $7\sigma$  e gli  $11\sigma$ .

#### *Iniezione ed estrazione per gli elettrosincrotroni*

La mancanza di validità del teorema di Liouville diventa un punto di forza per quanto riguarda l'iniezione e l'estrazione. Per quanto riguarda l'estrazione, questa non comporta particolari problemi in quanto le energie sono inferiori rispetto a quelle tipiche dei sincrotroni per protoni (si pensi ai 50 GeV del LEP contro 1 TeV del Tevatron) ed inoltre le macchine sono più grosse (il che comporta maggiore spazio per i macchinari). Per quanto riguarda l'iniezione, la tecnica multiturn beneficia in maniera pesante dell'effetto di damping nel piano trasverso: inserendo dunque il fascio fuori dal centro, in circa 100 giri si osserva il fascio migrare naturalmente verso l'orbita di equilibrio. La radiazione di sincrotrone impone però delle modifiche al sistema accelerante in quanto questo deve supplire alla perdita di energia irraggiata durante il giro. L'energia irraggiata può anche essere molto significativa: nel caso di LEP I (che sfruttava cavità normal conduttive) a fronte di un'energia massima di 50 GeV si perdevano 330 MeV, nel caso di LEP II (che sfruttava cavità superconduttive) i 100 GeV raggiunti comportavano una perdita di 3 GeV.

*Alcuni parametri significativi relativi alla macchina del LEP, supponendo che sia  $J_x=J_z=1$  e  $J_s=2$ , saranno i seguenti:*

$$\begin{cases} E = 55GeV \\ \rho = 3100m \\ \tau_0 = 89\mu s \\ E_r = 260MeV/turn \\ v_s = 0.1 \end{cases}$$

*Si ricava, dunque:*

$$\begin{cases} \tau_s \cong \frac{E}{P_\gamma} = \frac{E}{\frac{E_r}{\tau_0}} = 18ms = 200turns \\ \tau_x = \tau_z \cong 2\tau_s = 36ms = 400turns \end{cases}$$

*Alcuni dati relativi ad LHC sono invece i seguenti:*

$$\begin{cases} E = 7.7TeV \\ \rho = 2670m \\ \tau_0 = 89\mu s \\ E_r = 10.2keV/turn \\ P_\gamma = 8.7keV/beam \end{cases}$$

*Si ricava, in questo caso:*



$$\begin{cases} \tau_s \cong \frac{E}{P_\gamma} = \frac{E}{\frac{E_r}{\tau_0}} = 18.6h \\ \tau_x = \tau_z \cong 2\tau_s \end{cases}$$

Come si può vedere, nel caso di LHC la perdita di energia per radiazione è assolutamente ridicola, la potenza complessiva persa va però a riscaldare i magneti superconduttori, e questo è il motivo per cui la radiazione di sincrotrone viene minimizzata anche in LHC.

### Colliders: luminosità, calcolo della luminosità per le macchine.

#### Luminosità

Uno dei più importanti parametri di qualità di un collider è la sua luminosità. La definizione di questa grandezza può essere data pensando ad un target fisso sul quale viene fatto incidere un fascio (si faccia dunque riferimento alla situazione mostrata in figura 7). Supposto che il fascio abbia un'intensità di  $N_1$  particelle al secondo (pps) e che il target abbia una densità di  $n_2$  atomi per  $\text{cm}^3$  ed uno spessore  $l$ , il rate di eventi sarà esprimibile nel modo seguente:

$$R = \frac{dN}{dt} \cong N_1 n_2 l$$

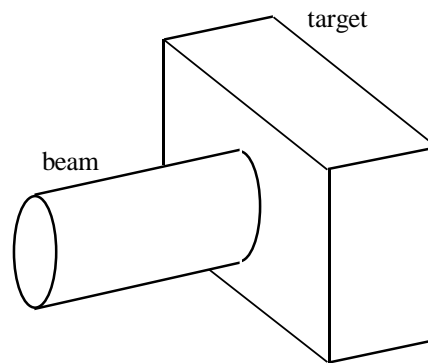


Figura 7

Il rate di eventi cresce dunque con la densità e lo spessore del target e con la densità del fascio. La costante di proporzionalità deve dimensionalmente essere pari a  $\text{cm}^{-2}$  e prende il nome di sezione d'urto  $\sigma$ ; si avrà dunque:

$$R = \frac{dN}{dt} = \sigma N_1 n_2 l$$

L'unità di misura per la sezione d'urto (che dipende dal tipo di reazione, dal tipo di fascio e dal tipo di target) è il barn:

$$1b = 10^{-24} \text{cm}^2$$

Solitamente l'espressione relativa al rate si scrive nel modo seguente:

$$R = \frac{dN}{dt} = \sigma L$$

dove  $L$  (che ovviamente si misura in  $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ ) prende il nome di luminosità. Nel caso di un target fisso la luminosità sarà dunque:

$$L = N_1 n_2 l$$

Nel caso di un fascio di protoni che incide su un bersaglio di idrogeno liquido, essendo:

$$\begin{cases} N_1 = 10^{13} \text{ pps} \\ n_2 = 4.3 \cdot 10^{22} \frac{\text{atomi}}{\text{cm}^3} \\ l = 10 \text{cm} \end{cases}$$

si avrà:

$$L \cong 4 \cdot 10^{36} \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

*Luminosità nei collider*

Nel caso dei collider ad anello singolo (quindi quelli realizzati per macchine  $e^+e^-$  oppure  $p\bar{p}$ ) detto  $n_b$  il numero dei bunch che circolano nella macchina, il numero di intersezioni sarà, ovviamente,  $2n_b$ . Si supponga dunque che i fasci circolanti abbiano una sezione ed una densità costante sia lungo  $x$  ( $w_x$ ) che lungo  $y$  ( $w_y$ ) e che gli ioni siano distribuiti uniformemente all'interno dei singoli fasci. Detti dunque  $N_{1b}$  ed  $N_{2b}$  il numero di particelle per bunch (normalmente il numero degli  $e^+$  è sempre minore del numero degli  $e^-$  così come gli antiprotoni sono sempre meno dei protoni) il rate di eventi sarà, per ogni zona di interazione:

$$R = \frac{dN}{dt} = \sigma N_{1b} \left( \frac{N_{2b}}{\pi w_x w_y} \right) n_b f$$

dove  $f$  è la frequenza di rivoluzione mentre  $\pi w_x w_y$  è l'area frontale del bunch ellittico. La definizione di luminosità per questi collider è allora:

$$L = \frac{N_{1b} N_{2b} n_b f}{\pi w_x w_y}$$

oppure, usando l'espressione della corrente, che sarà:

$$I = N_b n_b f e$$

si ottiene:

$$L = \frac{I_1 I_2}{e^2 n_b f \pi w_x w_y}$$

Se la sezione dei due fasci è differente si dovranno utilizzare relazioni come la seguente:

$$w_x = \sqrt{\frac{w_{1x}^2 + w_{2x}^2}{2}}$$

Appare dunque evidente che se uno è molto più grande dell'altra, la seconda perde di importanza. Valori tipici per la luminosità dei collider sono nell'ordine di  $10^{34}$ , quindi la loro luminosità è molto più bassa rispetto alle macchine a targhetta fissa. In figura 8 è rappresentata la storia della luminosità dei collider, in figura 9 è invece mostrato un grafico dal quale si evince l'importanza della luminosità, in quanto con l'aumentare dell'energia le sezioni d'urto diminuiscono e quindi è necessario innalzare la luminosità per poter vedere un numero soddisfacente di eventi.

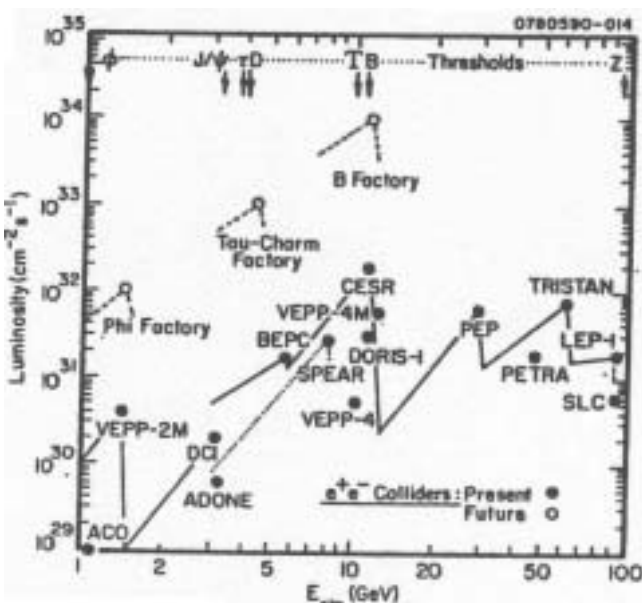


Figura 8

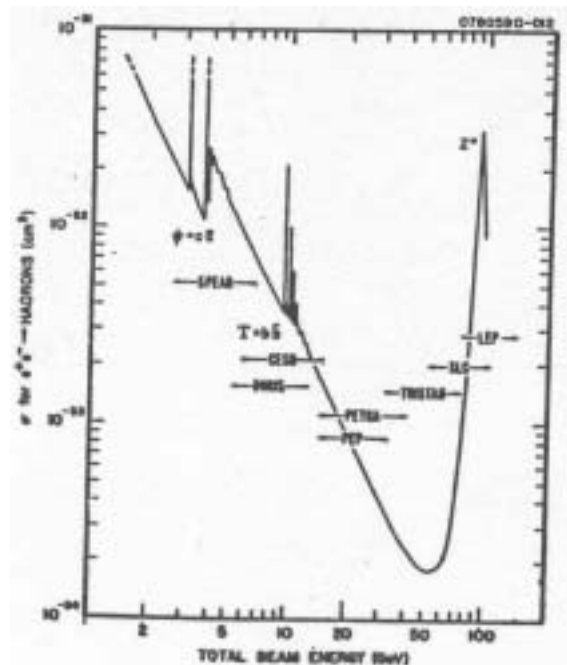


Figura 9

I valori di luminosità dei principali collider possono essere ricavati dalle tabelle riportate nelle [appendici 14](#) e [15](#).

**Colliders: luminosità, calcolo della luminosità per le macchine.**

*Luminosità nei collider*

Sebbene ne siano stati realizzati finora solamente due esemplari (in attesa di LHC) esistono anche collider composti da due anelli; il primo esemplare costruito era ISR, situato al CERN (si veda in figura 1 lo schema della macchina con i suoi iniettori), che era in grado di lavorare con protoni (reazioni pp) fino a 30 GeV.

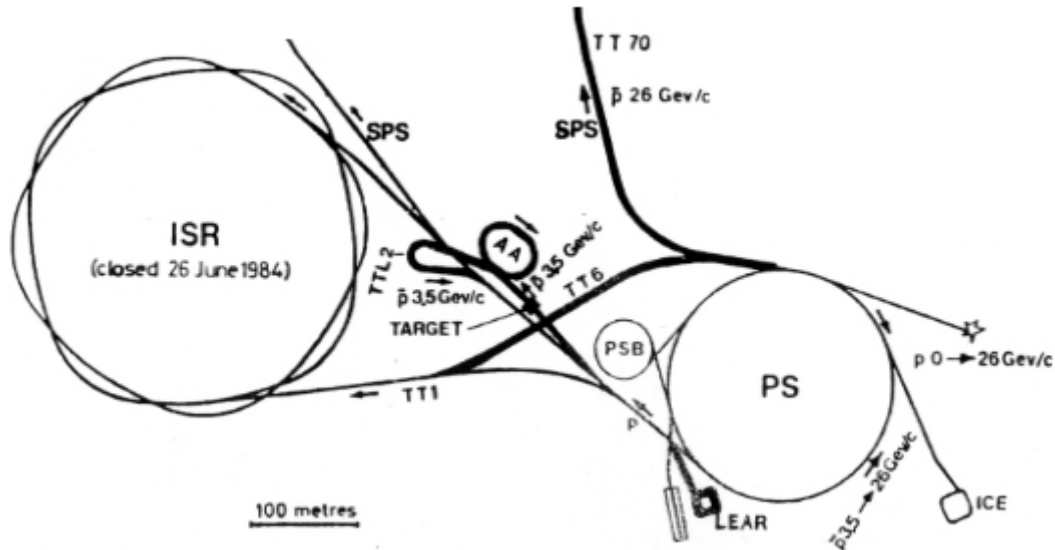


Figura 1

Questa macchina ha raggiunto valori record sia per quanto riguarda l'intensità (40 mA) sia per quanto riguarda la durata del fascio (150 giorni); le sue caratteristiche principali erano l'elevatissimo angolo di crossing (trattandosi di due anelli quasi quadrati che si intersecavano) che era pari a 15°, e il fatto che il fascio fosse debunchato. In figura 2 è schematizzato il punto di intersezione tra due fasci.

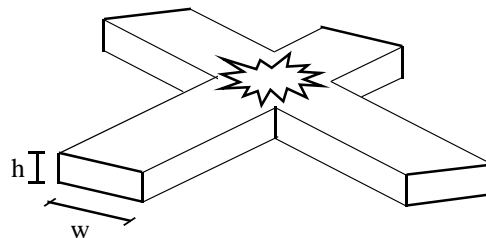


Figura 2

Assumendo che la velocità  $v$  sia in effetti la velocità  $c$  della luce si avrà la seguente espressione della luminosità:

$$L = \frac{I_1 I_2}{ce^2 h t g \frac{\theta}{2}}$$

dove  $\theta$  sia l'angolo di crossing. Con i valori caratteristici di ISR la luminosità era pari a  $0.5 \cdot 10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ .

Un altro collider composto da due anelli è HERA, nel quale vengono fatti collidere elettroni da 30 GeV con protoni da 820 GeV; siccome i due fasci sono nettamente differenti la formula per la luminosità è piuttosto complessa ed è:

$$L = \frac{I_p I_e}{e^2 \pi \sqrt{w_x^2 + l_p^2} g^2 w_y}$$

dove  $w_x$  è la larghezza del fascio,  $w_y$  la sua altezza,  $l_p$  è la lunghezza del bunch di protoni mentre  $\theta$  è la metà dell'angolo di crossing. La luminosità ottenuta con HERA è di  $14 \cdot 10^{30} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Si noti che, in questa macchina, i fasci sono bunched (circa 210 bunch) e l'angolo di crossing è molto piccolo, dell'ordine dei 20 mrad.

### Formula generale per la luminosità

Tutte le formule della luminosità viste fino ad ora presupponevano che la distribuzione delle particelle sulla sezione del fascio fosse uniforme e che i due fasci avessero la medesima sezione. Ovviamente entrambe queste condizioni non sono generalmente verificate al momento della collisione di due fasci, che hanno solitamente emittanze differenti e che contengono particelle distribuite al loro interno in maniera non uniforme. Le formule prima citate rimangono comunque valide a condizione di sostituire le dimensioni del fascio con le sue dimensioni effettive, che effettivamente dipendono dalla sua distribuzione interna. Per due fasci uguali le dimensioni effettive del fascio saranno  $2\sigma_{x,y}$  dove  $\sigma_{x,y}$  rappresenta la distribuzione r.m.s. del fascio. A seconda che si usi la corrente circolante o, più frequentemente, il numero di particelle, l'espressione della luminosità diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \frac{I_1 I_2}{n_b f 4\pi e^2 \sigma_x \sigma_y} \\ L = \frac{N_{1b} N_{2b} n_b f}{4\pi \sigma_x \sigma_y} \end{array} \right.$$

Quando i due fasci sono differenti le dimensioni effettive r.m.s. saranno del tipo seguente:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_{1x}^2 + \sigma_{2x}^2}$$

In realtà, per distribuzioni ragionevoli (gaussiana, uniforme, parabolica, cosinusoide, triangolare, gaussiana troncata) le dimensioni r.m.s. del fascio sono abbastanza indipendenti dalla distribuzione stessa.

### Longevità del fascio

Siccome la sopravvivenza della luminosità è minata da diverse cause, il suo decadimento non è perfettamente esponenziale; per semplicità, però, si farà riferimento ad una espressione esponenziale del tipo:

$$L = L_0 e^{-t/\tau_L}$$

dove  $L_0$  prende il nome di luminosità di picco e  $\tau_L$  viene chiamata tempo di vita del fascio. Ai fini della fisica il parametro più significativo è, però, sicuramente, la luminosità integrata (che si misurerà in barn<sup>-1</sup>) esprimibile come:

$$L_I(T) = L_0 \tau_L \left( 1 - e^{-T/\tau_L} \right)$$

che, ovviamente, fa riferimento ad un periodo T. La massimizzazione della luminosità integrata è uno degli obiettivi principali da raggiungere in un collider; per fare questo bisogna però tenere in considerazione un discreto numero di parametri come il tempo di caricamento della macchina (che è uno dei parametri essenziali), il tempo necessario per il tuning, il tempo di vita del fascio e la sua disposizione. Alcuni effetti che influenzano in maniera significativa il tempo di vita del fascio sono i seguenti:

- eventuali scattering con gas residui nelle camere a vuoto;
- intrabeam scattering (dovuti al fatto che il fascio non è in realtà un oggetto rigido ma può essere equiparato ad una terna di oscillatori armonici);
- beam-beam scattering (è sicuramente il parametro più importante);
- radiazione di sincrotrone.

### Controllo della luminosità

Per definire la sezione d'urto di una certa reazione è essenziale conoscere in maniera perfetta la luminosità della macchina; la luminosità non può però essere controllata a livello di macchina, bensì a livello di rivelatore, un modo per riuscire a controllarla prevede di monitorare una reazione perfettamente nota (ad esempio lo scattering elastico), l'accuratezza del controllo si aggira, con questo metodo, tra il 3 ed il 10%. Con la medesima accuratezza è dunque possibile avere delle informazioni anche sulle dimensioni r.m.s. del fascio.

Un secondo metodo per controllare la luminosità prevede la scansione del fascio, dalla quale la luminosità appare avere un andamento gaussiano lungo la direzione della scansione; la larghezza caratteristica (h) della distribuzione che si trova è legata all'area A ed al valore di picco  $L_0$  dalla seguente relazione:

$$h = \frac{A}{L_0}$$

### Macchine sporche e macchine pulite

Gli acceleratori per elettroni e per protoni differiscono, oltre che per tutti i motivi fino a qui visti, anche per un effetto legato alla struttura stessa delle particelle in gioco: i protoni, infatti, sono particelle composite, costituite di quark e di gluoni, a differenza degli elettroni che sono particelle elementari. Come conseguenza, quando due protoni collidono,

l'energia loro fornita viene suddivisa tra tutti i componenti dei due protoni, dando origine ad uno sciame di eventi tale da suggerire, per gli acceleratori di protoni, il termine di macchine sporche.

*Per avere un'idea si può considerare che LHC, che permetterà a due fasci di protoni da 7.7 TeV di collidere tra di loro con una luminosità di  $2 \times 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ , avrà una sezione d'urto complessiva (ovvero relativa a tutti gli eventi di carattere nucleare) di circa 100 mbarn (ai quali bisogna aggiungere 40 mbarn relativi ai soli scattering elastici), il che comporterà la bellezza di  $2 \times 10^9$  eventi al secondo.*

Le macchine per elettroni, invece, sono dette macchine pulite in quanto, essendo solamente due le particelle in azione, si può scegliere una particolare reazione in base all'energia che si assegna ai due fasci che collidono. Per poter fare la stessa fisica, dunque, le macchine per protoni e le macchine per elettroni devono differire di almeno un fattore 10.

### LHC

Nella primavera del 2006 verrà ultimato, nell'anello sotterraneo che fino al 2000 ha ospitato il LEP, il più grande collider a due anelli per protoni mai realizzato: il Large Hadron Collider (LHC). I parametri fondamentali di questa macchina sono raccolti nella tabella 1, tratta, come gran parte delle seguenti informazioni, dal Conceptual Design Report pubblicato dal CERN.

Energy	[TeV]	7.0
Dipole field	[T]	8.4
Coil aperture	[mm]	56
Distance between apertures	[mm]	194
Luminosity	$[\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}]$	$10^{34}$
Beam-beam parameter		0.0034
Injection energy	[GeV]	450
Circulating current/beam	[A]	0.54
Bunch spacing	[ns]	25
Particles per bunch		$10^{11}$
Stored beam energy	[MJ]	334
Normalized transverse emittance	$[\mu\text{m} \cdot \text{rad}]$	3.75
r.m.s. bunch length	[m]	0.075
$\beta$ -values at I.P. in collision	[m]	0.5
Full crossing angle	$[\mu\text{rad}]$	200
Beam lifetime	[h]	22
Luminosity lifetime	[h]	10
Energy loss per turn	[keV]	6.7
Critical photon energy	[eV]	44.1
Total radiated power per beam	[kW]	3.6

Tabella 1

In figura 3 è invece riportato il layout schematico di LHC, dal quale si può osservare come la macchina è unica, nel senso che non c'è simmetria (anche l'apparente simmetria relativa ai siti degli esperimenti ALICE e LHC-B è falsata dal fatto che quello che per uno è l'anello interno per l'altro è l'anello esterno).

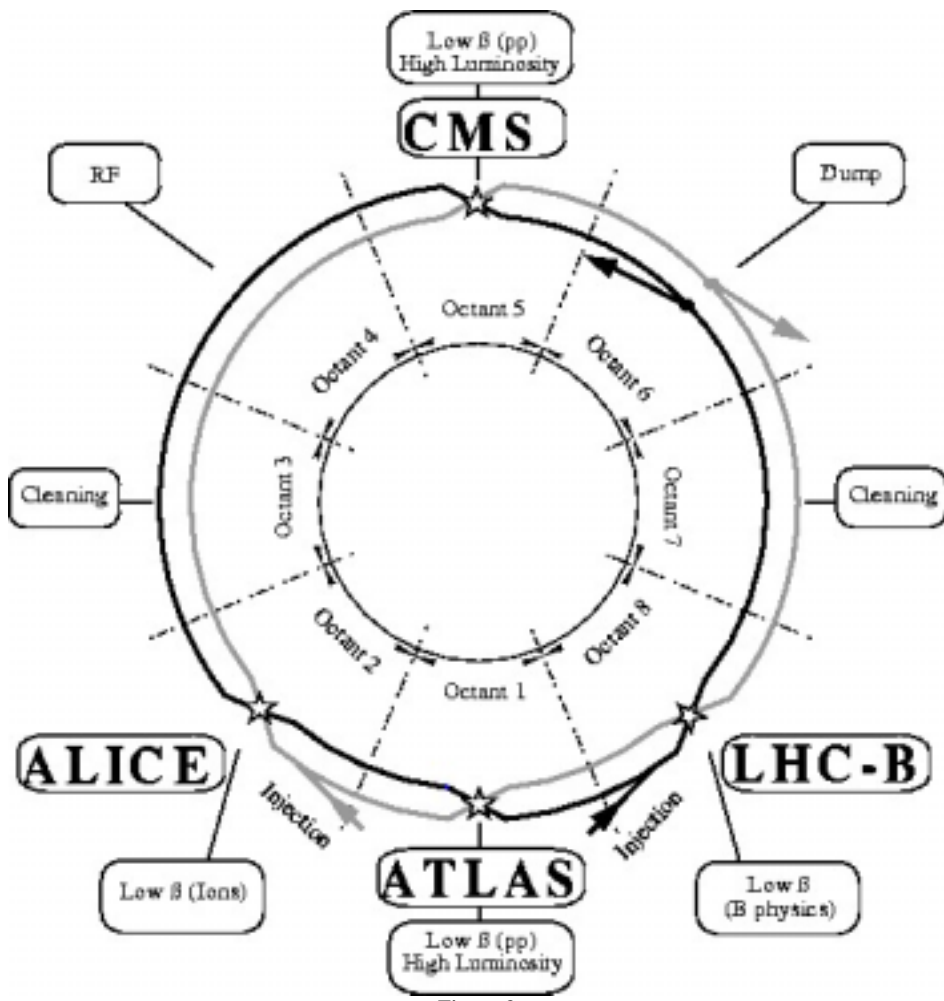


Figura 3

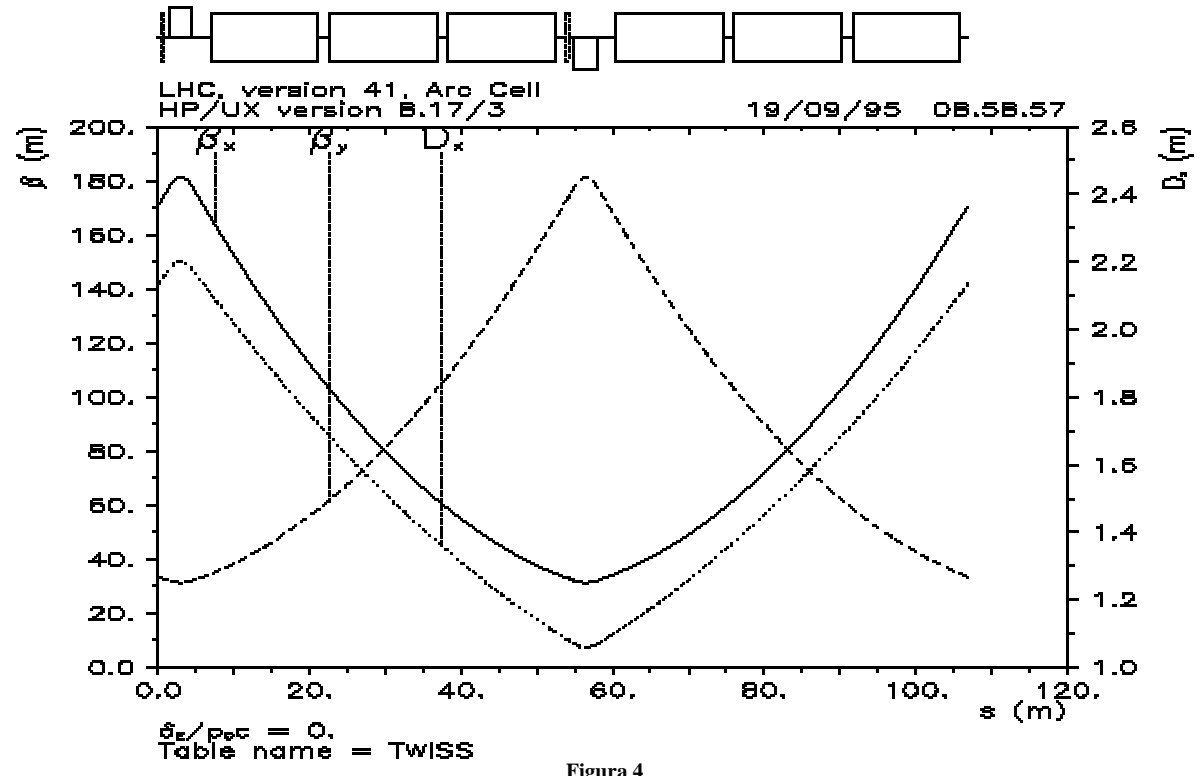


Figura 4

In tabella 2 sono riportati i dati principali relativi al lattice della macchina, mentre in figura 4 è riportato l'andamento delle funzioni di ottica nella cella standard.

Parameter	Symbol	Unit	450 GeV/c	7000 GeV/c
Machine circumference	$2\pi R$	[m]	26658.883	
Number of arcs (pseudo-periodicity)			8	
Symmetry			Mirror/IP1-IP5	
Super-periodicity			1	
Lattice type			FODO, 2-in-1	
Ring separation		[mm]	194	
Number of lattice cells per arc			23	
Number of insertions			8	
Number of experimental insertions			4	
Free space for detectors (IP1/IP5)		[m]	$\pm 23$	
Free space for detectors (IP2/IP8)		[m]	$\pm 21$	
Total crossing angle at IP	$\phi$	[ $\mu$ rad]	200	
Guide field	$B$	[T]	0.539	8.386
Bending radius	$\rho$	[m]	2784.32	
$\gamma$ transition			53.7	
Momentum compaction	$\alpha$		0.0003473	
Maximum $\beta$ -value at injection		[m]	622	
Horizontal betatron tune	$Q_x$		63.28	
Vertical betatron tune	$Q_y$		63.31	
Length of the lattice cell	$2L$	[m]	106.92	
Nominal phase advance/cell	$\mu$	[degree]	90	
Maximum $\beta$ -value (cell)		[m]	182.7	
Maximum dispersion (cell)		[m]	2.15	
Transverse beam size ( $1\sigma$ ) in arc		[mm]	1.20	0.303
$\beta$ at IP	$\beta^*$	[m]	6.0	0.50
Transverse beam size ( $1\sigma$ ) at IP		[ $\mu$ m]		15.9
Transverse beam divergence at IP		[ $\mu$ rad]		31.7
Maximum $\beta$ -value in exp. insertion		[m]	450	4423

Tabella 2

Nelle figure 5 e 6 le funzioni dell'ottica sono riportate, rispettivamente, per la collisione e per l'inserzione.

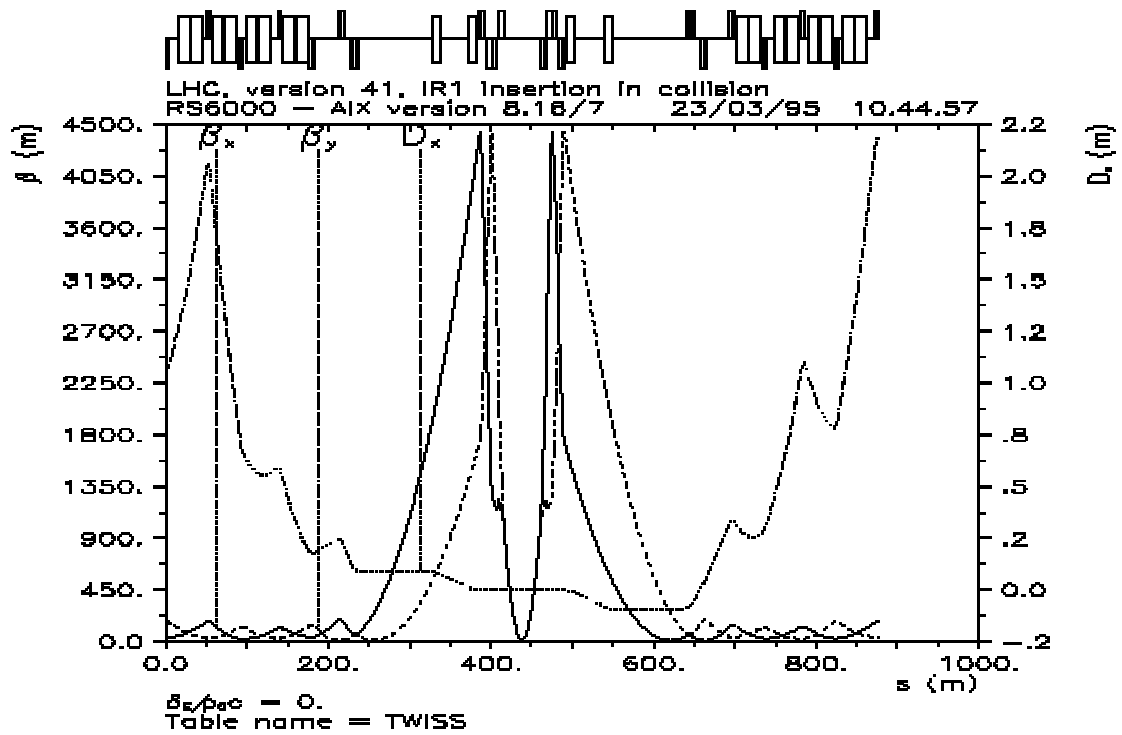


Figura 5

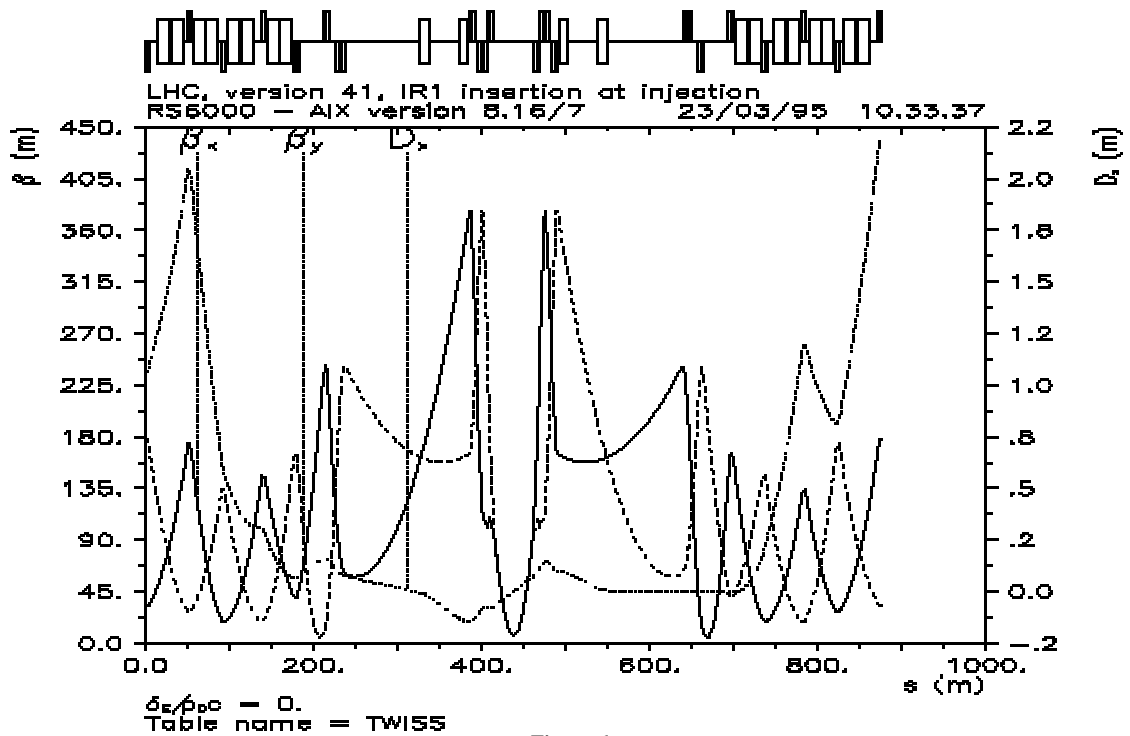


Figura 6

La realizzazione di LHC comporterà, ovviamente, anche un decisivo adeguamento delle strutture già esistenti, soprattutto della catena di acceleratori che funzionerà come iniettore per il nuovo collider. Il sistema RF del PS, per esempio, verrà modificato in modo da rendere maggiormente sincronizzata l'intera catena degli acceleratori. In figura 7 è mostrato lo schema dei bunch che verrà utilizzato per il riempimento della macchina. La disposizione dei bunches in uno dei due anelli di LHC è rappresentata dalla seguente formula:

$$3564 = 12 \times 297 = [(81b + 8e) \times 3 + 30e] \times 11 + [(81b + 8e) \times 2 + 119e]$$

dove b indica la presenza dei bunch mentre e indica il vuoto.



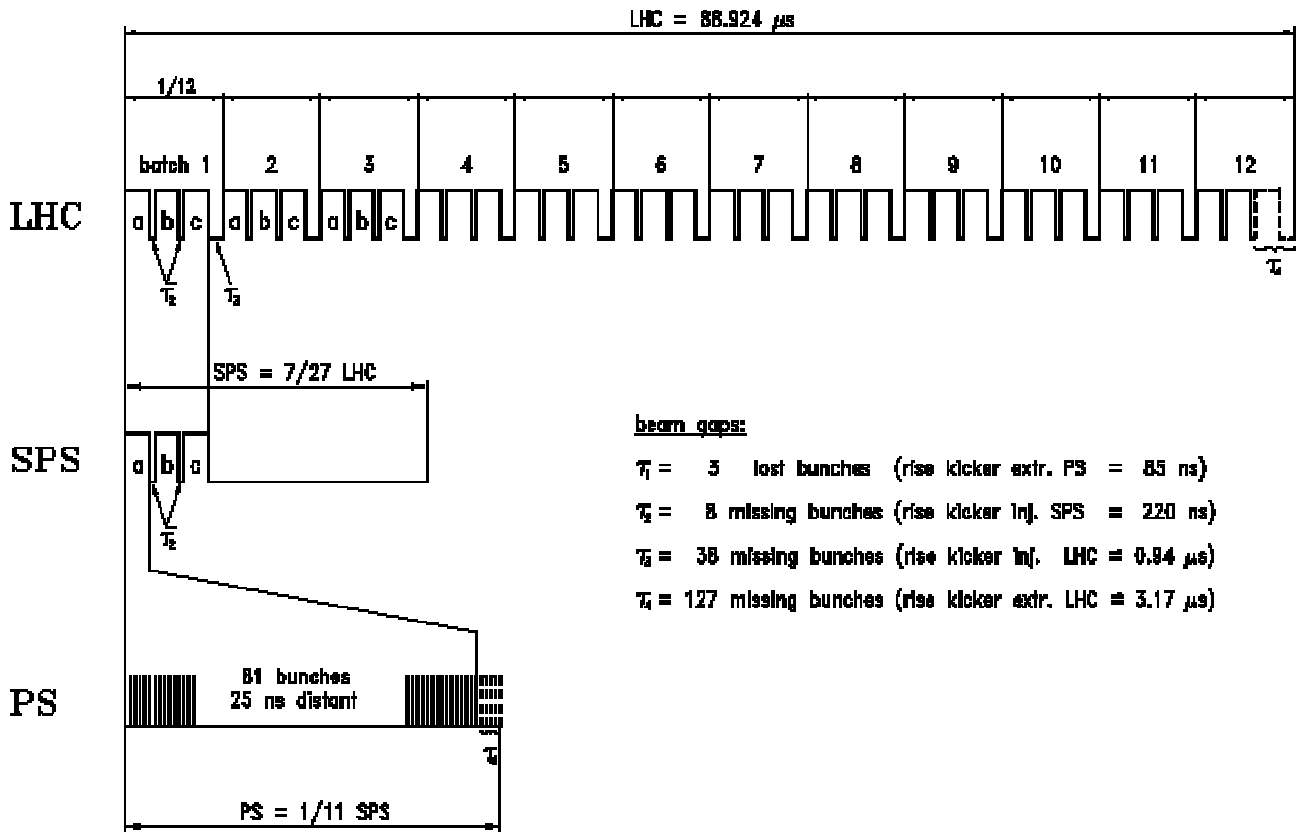


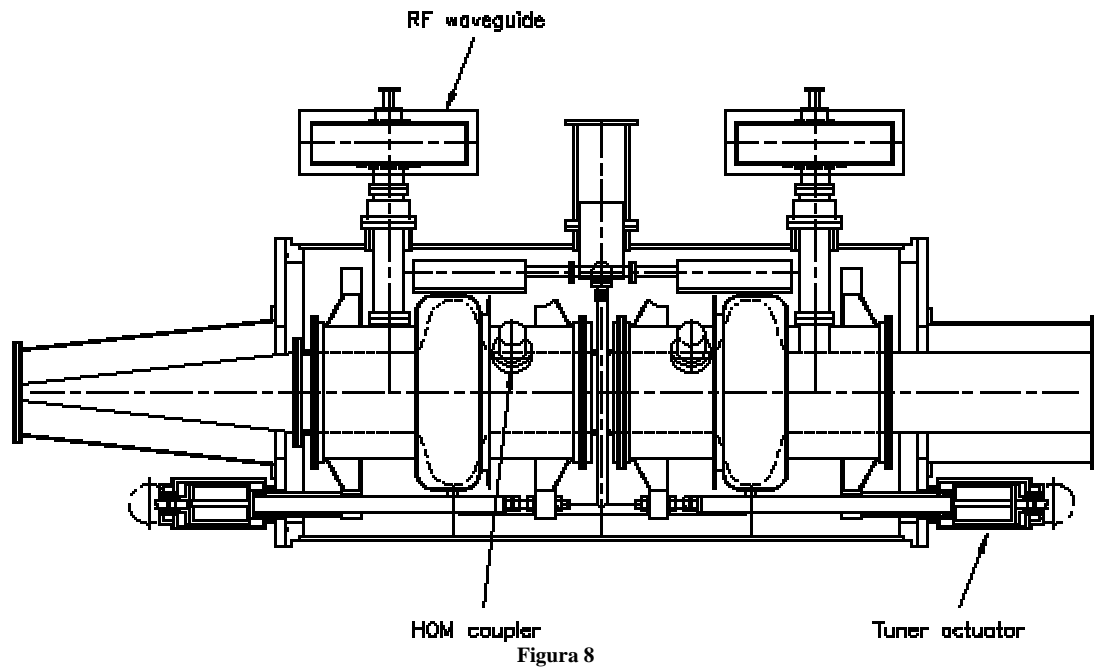
Figura 7

I parametri principali relativi al sistema RF sono listati nella tabella 3.

	Unit	Injection 450 GeV	Collision 7 TeV
Frequency	[MHz]	400.789	400.790
Harmonic number		35640	35640
RF voltage	[MV]	8	16
Energy gain/turn (20 min ramping)	[keV]		485
Synchrotron frequency	[Hz]	62	21
Bucket area	[eV.s]	1.46	8.7
Bunch area ( $2\sigma$ )	[eV.s]	1	2.5
r.m.s bunch length (1/4 full bunch length)	[m]	0.13	0.075
r.m.s energy spread (1/4 full $\Delta p/p$ )		$4.5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-2}$
Synchrotron radiation energy loss/turn	[keV]		7
Longitudinal damping time	[h]		12.5
Intensity per bunch		$1.05 \cdot 10^{11}$	$1.05 \cdot 10^{11}$
Intensity per beam	[A]	0.53	0.53
RF component of beam current (per beam)	[A]	0.93	1.15
Intrabeam scattering growth time:			
Horizontal	[h]	45	100
Longitudinal	[h]	33	60

Tabella 3

È significativo sottolineare che l'emittanza longitudinale dei bunch di protoni viene fatta salire (per filamentazione) da 1 eVs all'iniezione fino a 2,5 eVs in modo da rendere meno evidenti gli effetti di intrabeam scattering. Una rappresentazione grafica di una cavità RF superconduttiva è mostrata in figura 8.



In tale figura si possono notare gli HOM coupler, che servono per eliminare le interferenze tra il fascio e la camera, con lo stesso proposito le aperture caratteristiche delle cavità vengono fatte molto grosse. In una seconda fase della sua esistenza, LHC verrà utilizzato anche per accelerare ioni di Piombo (il layout di iniezione sarà allora quello riportato in figura 9); i parametri principali legati a questo utilizzo della macchina sono riportati nella tabella 4.

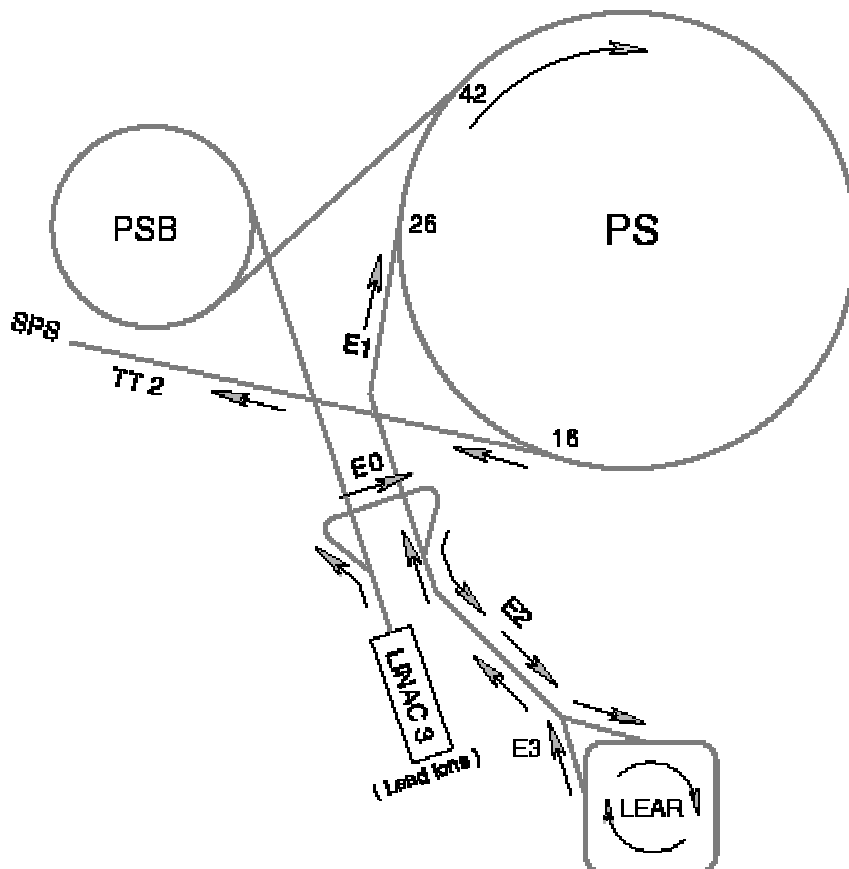


Figura 9

Gli ioni di Piombo, come si può vedere, saranno realizzati, per stripping successivi, a partire dal LEAR, che attualmente è la sorgente di antiprotoni ma che verrà riadattato per l'occasione. Il ciclo di iniezione sfrutterà 152 cicli del PS e 12 dell'SPS per un tempo complessivo di iniezione in LHC di 9.8 minuti.

Energy per charge	$E/Q$	[TeV/charge]	7	
Energy per nucleon	$E/A$	[TeV/u]	2.76	
Centre-of-mass energy	$E_{cm}$	[TeV]	1148	
Dipole field	$B_{max}$	[T]	8.386	
Transverse normalized emittance	$\epsilon^*$	[ $\mu m$ ]	1.5	
$\beta$ at IP (coll.)	$\beta^*$	[m]	0.5	
r.m.s beam radius at IP	$\sigma^*$	[ $\mu m$ ]	15	
Crossing angle (per beam)		[ $\mu rad$ ]	$\leq 100$	
Longitudinal emittance (inj.)	$\epsilon_l$	[eV.s/charge]	1	
Longitudinal emittance (coll.)	$\epsilon_l$	[eV.s/charge]	2.5	
r.m.s bunch length (coll.)	$\sigma_s$	[cm]	7.5	
r.m.s energy spread (coll.)	$\sigma_{E/E}$	$10^{-3}$	0.114	
Bunch spacing	$l_b$	[ns]	124.75	
Bunch harmonic number	$h_b$	Not integer	(712.8)	
Number of bunches per ring	$n_b$		608	
Filling time per LHC ring		[min]	9.8	
Number of ions per bunch	$N_b$	$10^7$	6.3	9.4
Number of ions per beam	$N$	$10^{10}$	3.5	5.2
Ion intensity per beam		[mA]	5.2	7.8
Initial luminosity per bunch	$L_0^b$	[ $10^{24} cm^{-2}s^{-1}$ ]	1.4	3.2
Initial total luminosity	$L_0$	[ $10^{27} cm^{-2}s^{-1}$ ]	0.85	1.95
IBS emittance growth (inj.)		[h]	7.6	5.1
IBS emittance growth (coll.)		[h]	14.6	9.8
Luminosity lifetime		[h]	10	6.7

Tabella 4

L'aspetto più ricco di complicazioni nella realizzazione di LHC sarà senza dubbio quello legato ai magneti superconduttivi. Fin dall'inizio del progetto si è subito pensato di utilizzare magneti che contenessero entrambe le pipeline nelle quali circolano i protoni, questo permette un'ovvia diminuzione dell'ingombro (cruciale in quanto tutto deve stare dentro il tunnel nel quale c'era il LEP) ma le complicazioni progettuali sono ovviamente state moltiplicate da questa scelta. La sezione di un magnete superconduttivo è mostrata in figura 10. In figura 11 è invece mostrato uno spaccato del magnete; da tale immagine si possono vedere i correttori per gli effetti sestupolari e decapolari, che hanno dovuto essere realizzati come parte integrante del magnete stesso.

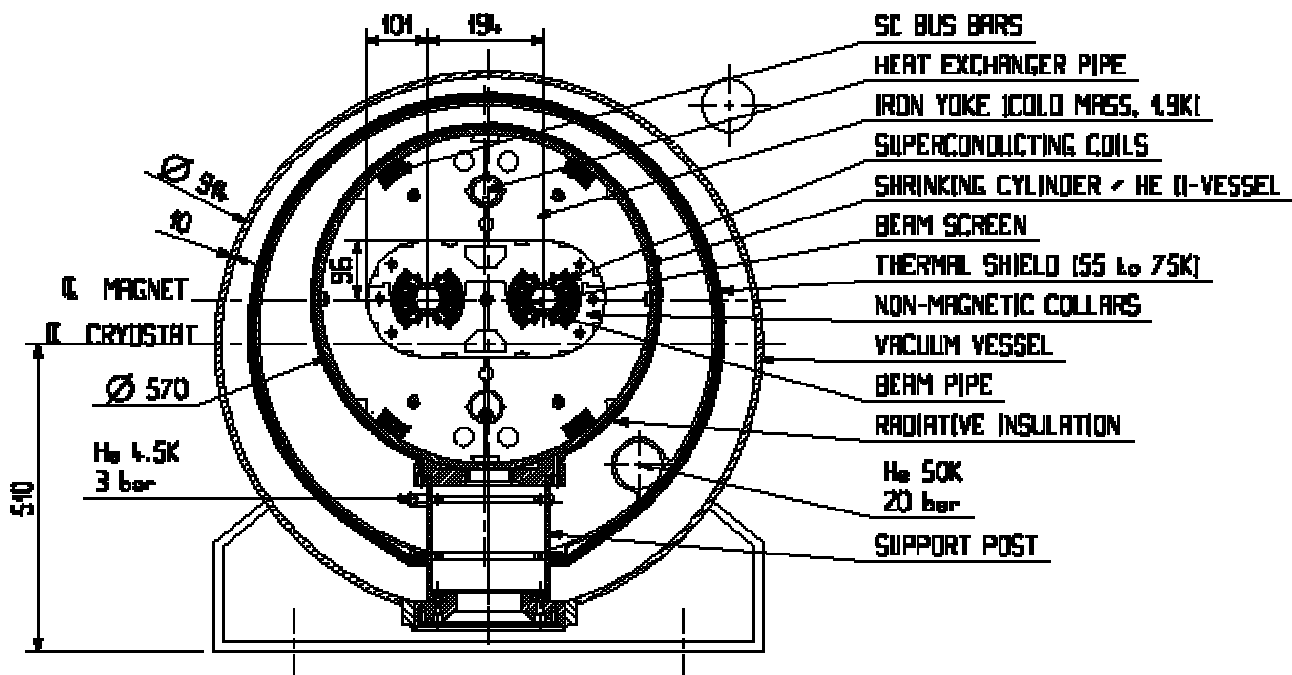


Figura 10

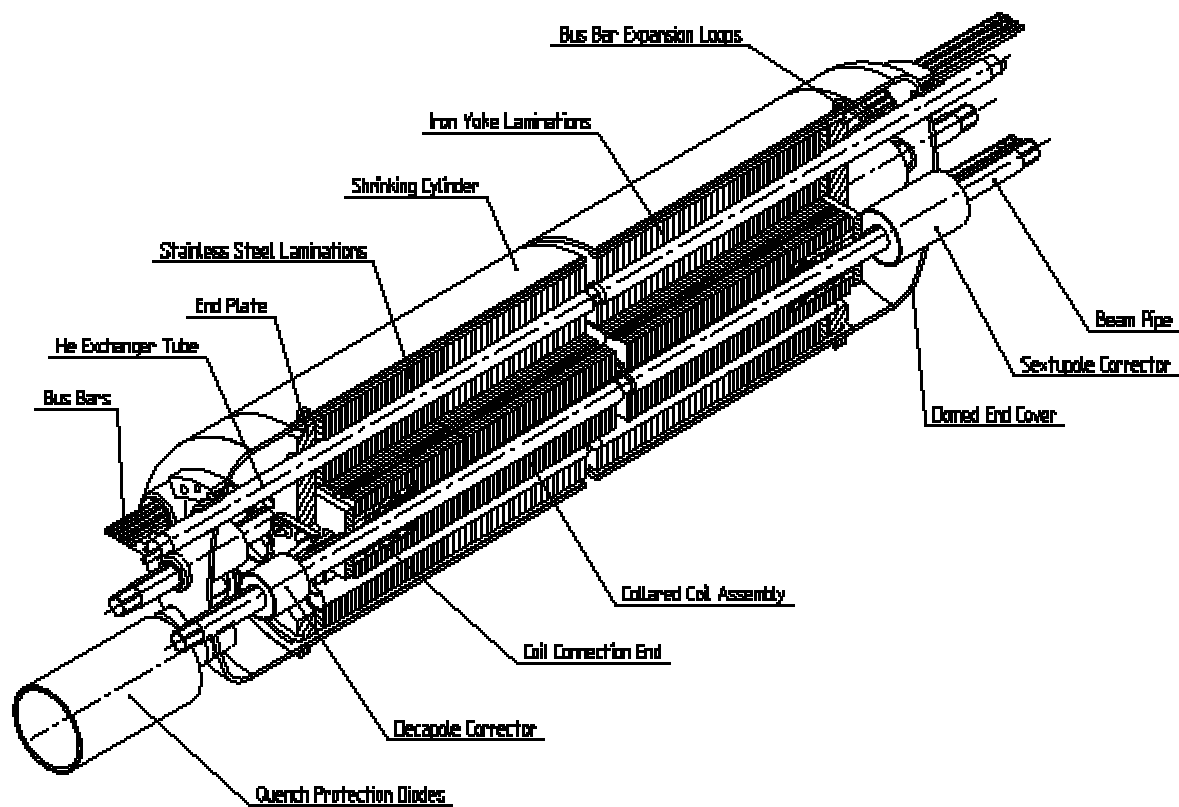


Figura 11

**Colliders: luminosità, calcolo della luminosità per le macchine.**

*I magneti di LHC*

L'aspetto più complesso dell'intero progetto di LHC è senza dubbio legato alla realizzazione dei magneti superconduttori. Il grande vantaggio prestazionale legato alla scelta di utilizzare magneti superconduttori e i benefici legati alla scelta della configurazione "2 in 1" (ovvero con entrambi i fasci che attraversano un singolo magnete) hanno come rovescio della medaglia la complessità legata alla necessità di una progettazione integrata. Una sezione della massa fredda del magnete è mostrata in figura 1.

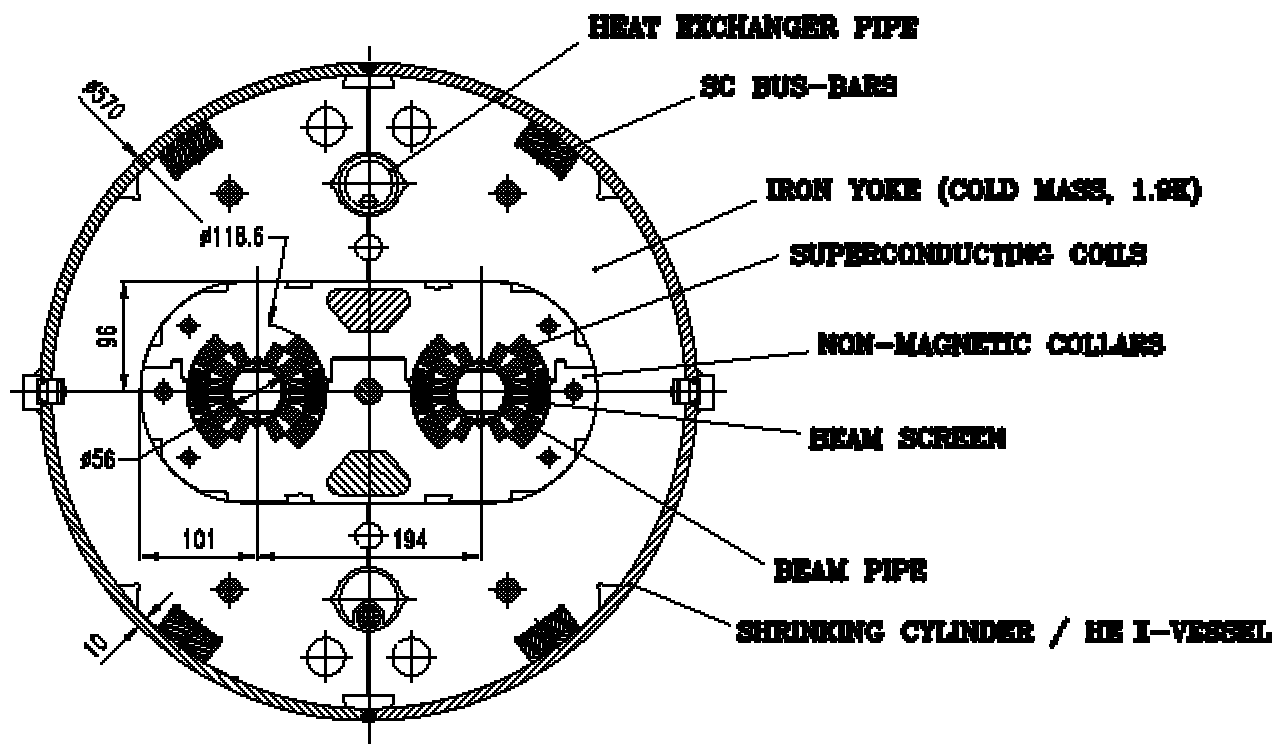


Figura 1

I magneti verranno realizzati nella forma denominata "cosθ magnet" così denominata per il fatto che disponendo sui bordi del beam pipe una distribuzione di conduttori a cosθ si ottiene, all'interno del beam pipe stesso, un campo teoricamente uniforme. Di fatto, ovviamente, sui bordi del beam pipe è possibile realizzare solamente una distribuzione uniforme. Tutte le distribuzioni di conduttori, come già visto in precedenza, danno origine ad un campo magnetico del tipo:

$$B = B_0 + Qx + Sx^2 + Ox^3 + \dots$$

dove Q, S, O, etc... rappresentano, rispettivamente, i termini di quadrupolo, sestupolo, ottupolo, etc... Per ottenere un campo rigorosamente uniforme è dunque necessario riuscire ad eliminare tutti i termini che non siano  $B_0$  (tenendo per esempio conto che i termini di quadrupolo possono essere eliminati semplicemente per simmetria). Tenendo conto anche dei problemi relativi all'effettiva duttilità dei conduttori, per ottenere il campo migliore, i conduttori devono essere posizionati come mostrato in figura 2; con la quale si riesce ad eliminare gli effetti di sestupolo e di ottupolo (è significativo osservare che degli effetti di sestupolo e di ottupolo si formano comunque alle estremità dei magneti, motivo per cui il design integrato del magnete stesso prevede dei correttori per questi effetti). Il risultato di tale combinazione (che in realtà è stata leggermente modificata nel progetto definitivo) è, dal punto di vista delle linee di campo, quello mostrato in figura 3.

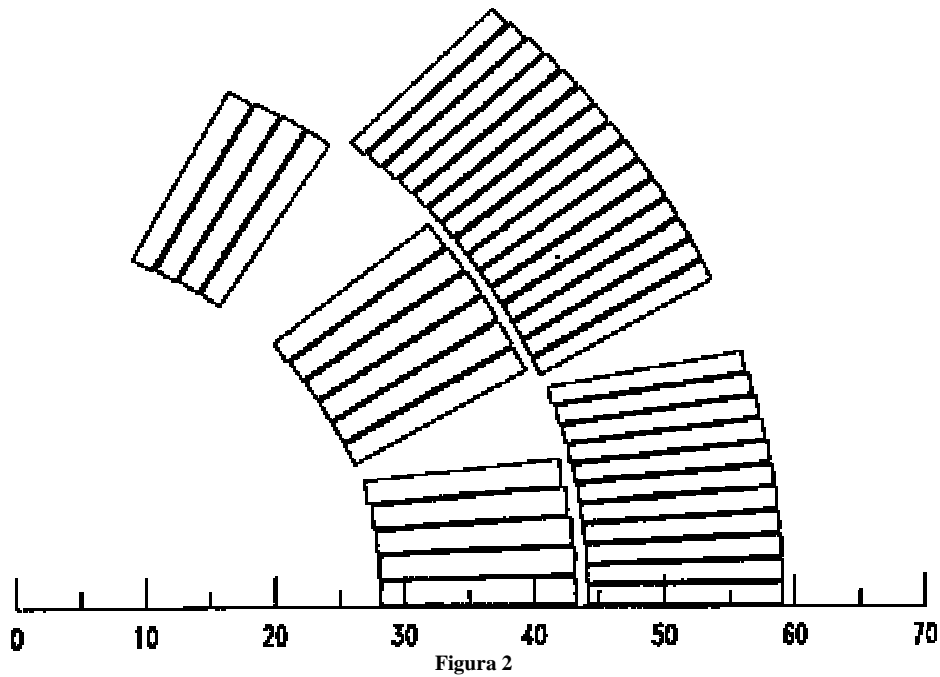


Figura 2

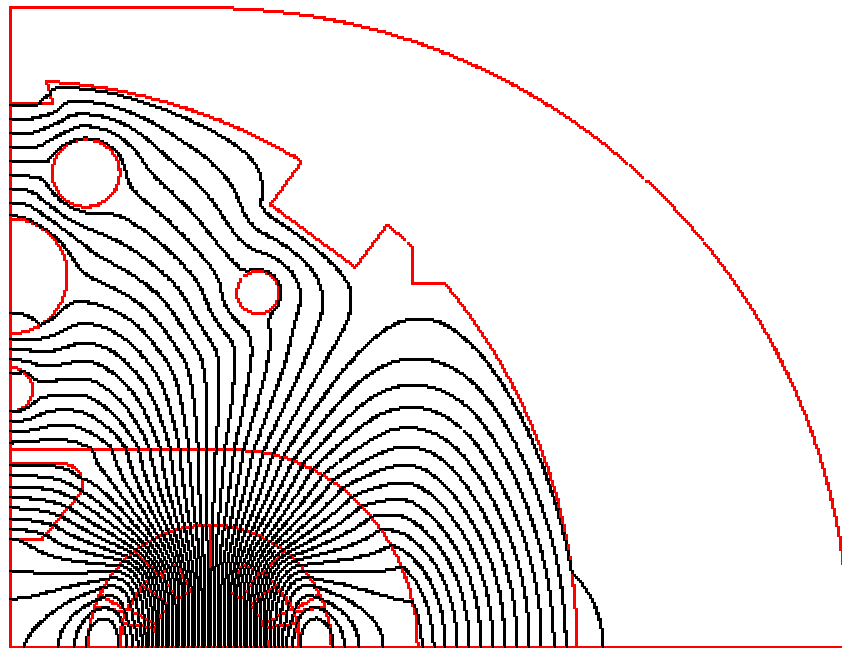


Figura 3

**Limiti dei sincrotroni e colliders: apertura dinamica, carica spaziale, tune shift, effetto fasci-fascio, decadimento della luminosità.**

*Apertura dinamica*

Gli effetti maggiormente deleteri sulle performance di un acceleratore sono quelli che causano i cosiddetti “incoherent tune-shift” ovvero quei fenomeni che si rendono responsabili di un tune-shift particolare per ogni particella, che, in più, può anche non essere fisso. In queste situazioni il fascio (rappresentato nello spazio delle fasi tramite un’area) rischia di attraversare delle risonanze andando così incontro ad effetti di incremento della risonanza oppure di perdita di fascio. Le cause principali degli incoherent tune-shift sono diverse.

Tra queste un posto di rilievo è occupato dai campi non lineari. A fianco delle parti lineari dei campi (dipolo e quadrupolo) ci sono infatti dei termini aggiuntivi di multiplo (sestupolo, ottupolo, etc...) dovuti al cattivo allineamento di alcuni componenti o ad imperfezioni di costruzione. Come risultato si osservano dei tune  $\nu_H$  e  $\nu_V$  che dipendono dall’ampiezza di betatrone (per esempio i termini di ottupolo portano ad un  $\nu_H$  proporzionale al quadrato dell’ampiezza).

Una significativa causa di incoherent tune-shift che è già stata citata è la cromaticità; in questo caso si tratta di un effetto del primo ordine (al quale comunque concorrono anche effetti di ordini superiori) che porta ad un tune-shift del tipo:

$$\Delta v = \xi \frac{\delta p}{p}$$

dovuto alla dipendenza dal momento del potere focalizzante del quadrupolo. Questo effetto può essere parzialmente corretto con i sestupoli, bisogna comunque prestare particolare attenzione per non introdurre accoppiamenti radiali-assiali e conseguenti effetti di ordini superiori.

Tutti gli effetti che possono portare ad incoherent tune-shift vengono tenuti in considerazione quando si costruisce l'apertura dinamica, definita come lo spazio fisico nel piano x,y nel quale la singola particella è stabile per un numero infinito di giri, tenuto conto di tutte le imperfezioni possibili (cattivi allineamenti e non linearità del campo); ovviamente la situazione ideale sarebbe quella nella quale l'apertura dinamica sia praticamente identica all'apertura fisica, quasi sempre, però, l'apertura dinamica è molto più piccola.

#### L'effetto di carica spaziale

Uno degli effetti limitanti più significativi è quello legato all'effetto di carica spaziale. Si consideri dunque un fascio continuo, di raggio a, con una densità di carica costante  $\rho$  ed una macchina gestita tramite la smooth approximation (quindi con raggio R e focusing  $\nu$ ). Essendo:

$$\begin{cases} \text{div}E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot}B = \mu_0 J \end{cases}$$

con:

$$\begin{cases} \rho = \frac{Ne}{2\pi R \pi a^2} \\ J = \rho v \end{cases}$$

si otterrà, ignorando la curvatura del percorso (ovvero considerando  $a \ll R$ ):

$$\begin{cases} E_r = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \\ B_\phi = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot \frac{v}{c^2} r \end{cases}$$

nel caso in cui  $r \leq a$ . L'andamento di  $E_x$  è schematizzato in figura 4.

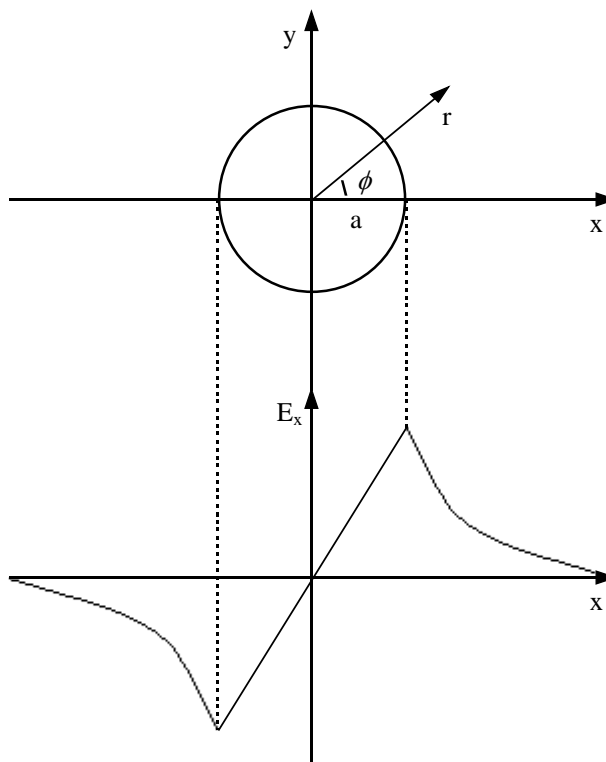


Figura 4

La forza repulsiva che si viene a creare sarà allora la seguente:

$$\Delta F_r = qE_r + v_s B_\phi = \frac{e\rho}{2\varepsilon_0} (1 - \beta^2) r$$

Da questa relazione segue che, quando la velocità tende alla velocità della luce, l'effetto di carica spaziale diventa assolutamente irrilevante e quindi questo effetto riguarda solamente i sincrotroni per protoni con  $\beta \ll 1$  (i grandi sincrotroni come LHC, dunque, vengono penalizzati a causa degli effetti di carica spaziale, solo per quanto riguarda le macchine che li precedono e che fungono da loro iniettori).

Senza effetto di carica spaziale la forza repulsiva è espressa dalla relazione:

$$F_r = -m\omega^2 v^2 r$$

e quindi si ottiene:

$$F_r + \Delta F_r = -m\omega^2 v^2 r + \frac{e\rho}{2\varepsilon_0} (1 - \beta^2) r = -m\omega^2 (v + \Delta v)^2 r$$

Al primo ordine si avrà dunque:

$$\Delta v = \frac{-r_p RN}{2\pi v a^2 \beta^2 \gamma^3}$$

dove sia:

$$r_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{mc^2}$$

detto raggio classico del protone (anche se non ha alcun significato fisico). Tenendo conto del matching, ovvero della relazione:

$$a = \sqrt{\varepsilon \frac{R}{v}}$$

e dell'espressione dell'emittanza normalizzata:

$$\varepsilon_N = \beta\gamma\varepsilon = \beta\gamma \frac{v}{R} a^2$$

si ottiene:

$$\Delta v = \frac{-r_p N}{2\pi\varepsilon_N} \cdot \frac{1}{\beta\gamma^2}$$

A causa della dipendenza da  $1/\beta\gamma^2$  l'effetto di carica spaziale sarà significativo al momento dell'iniezione.

Il tune shift appena calcolato è coerente, ovvero viene applicato a tutte le particelle del fascio, grazie alle forze di tipo lineare dovute alla distribuzione di carica uniforme. Nella realtà, però, si deve ovviamente fare riferimento a situazioni nelle quali la distribuzione di carica non sia uniforme (tipicamente è gaussiana), inoltre si deve tenere in considerazione il bunching e le interazioni dei fasci con i tubi a vuoti e con i poli dei magneti dovuti ad effetti di carica immagine. Tenendo conto di tutti questi effetti e del fatto che la forma ellittica del fascio implica un tune-shift differente nel piano verticale (solitamente maggiore) rispetto a quello del piano orizzontale, è stata costruita una relazione generale che prende il nome di tune-shift di Laslett:

$$\Delta v_y = \frac{r_p NR}{v_y 2\pi\sigma_y (\sigma_x + \sigma_y)} \cdot \frac{1}{\beta^2 \gamma^3} \cdot \frac{1}{BF}$$

dove  $\Delta v_y$  è il massimo tune-shift (quello dunque relativo alle particelle prossime al centro del bunch), B è un fattore di bunching (solitamente dell'ordine di 0.5) ed F è un fattore di carica immagine relativa ai tubi a vuoto ed ai poli (solitamente pari ad 1.5). Il valore sperimentale massimo di  $\Delta v$  che garantisce una accelerazione stabile è 0.2 (anche se alcune macchine lavorano anche con un  $\Delta v$  di 0.5) che porta all'attraversamento inevitabile delle risonanze relative al terzo ed al quarto di intero.

Per aumentare la corrente media dai valori attuali (di circa 1  $\mu\text{A}$ ) fino a circa 100  $\mu\text{A}$  (limite richiesto dalle Kaon factories) sono necessari due step:

- innalzamento del repetition rate (da 1 Hz fino a 50 Hz)
- l'aumento dell'energia a livello di immissione.

Quest'ultimo step è comprensibile osservando la tabella 1 che riporta i valori di  $\beta\gamma^2$  per diverse energie di iniezione.



Energia (MeV)	$\beta\gamma^2$
50	.331
200	.687
500	1.162

**Tabella 1**

È dunque evidente che al crescere dell'energia il termine  $\beta\gamma^2$  cala e quindi il tune-shift diminuisce.

### Beam-beam tune-shift

Si considerino ora due bunch identici, a sezione circolare, con distribuzione di carica gaussiana ( $\sigma$ ) e con una distribuzione longitudinale uniforme di N particelle per la lunghezza  $l$  del bunch, in modo che si possa parlare di una densità lineare  $m=N/l$  (si noti comunque che si otterrebbero gli stessi risultati anche con una distribuzione longitudinale anch'essa gaussiana ovvero tale per cui  $l=4\sigma_l$ ). La densità di carica trasversale sarà:

$$\rho(r) = \frac{ne}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

Sfruttando ora il teorema di Gauss e la legge di Ampere ed assumendo che al centro del bunch sia  $\sigma \ll l$  si ricava:

$$\begin{cases} E_r(r) = \frac{1}{2\pi r \epsilon_0} \int_0^r 2\pi r \rho(r) dr \\ B_\phi(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \int_0^r 2\pi r \rho(r) v dr \end{cases}$$

La particella agente sulla particella test sarà:

$$F(r) = q(E + v \wedge B) = \frac{ne^2}{2\pi r \epsilon_0} \left(1 \pm \beta^2\right) \left(1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right)$$

dove il segno - è per le particelle di un bunch mentre il segno + è per le particelle dell'altro bunch. Ne segue che, ignorando il caso in cui  $1-\beta^2$  tende a zero, si formano delle forze tra un bunch e l'altro (bunch-bunch) che sono repulsive nel caso di fasci pp ed attrattive per fasci  $e^+e^-$ , non lineari e che quindi creano un incoherent tune-shift. Il tune shift lineare (per particelle con  $r \ll \sigma$ ) sarà:

$$\Delta\nu = \xi = \frac{Nr_0}{4\pi\epsilon_N}$$

dove  $\epsilon_N$  è l'emittanza normalizzata mentre  $r_0$  è il raggio classico, ovvero un termine che vale  $2.8 \cdot 10^{-15}$  m per gli elettroni e  $1.5 \cdot 10^{-18}$  m per i protoni; si noti la completa indipendenza dall'energia e dal  $\beta^*$  (all'interazione) ovvero dalle dimensioni del fascio.

Considerando dunque due fasci circolari con raggio r.m.s.  $\sigma$  ed N particelle per bunch, la luminosità è:

$$L = \frac{N^2 k f}{4\pi\sigma^2}$$

dove N è il numero di particelle per bunch per fascio, k è il numero di bunch per fascio. Esprimendo l'emittanza normalizzata r.m.s. come:

$$\epsilon_N = \gamma \frac{\sigma^2}{\beta^*}$$

e il parametro di attraversamento legato al beam-beam tune-shift come:

$$\xi = \frac{Nr_0}{4\pi\epsilon_N}$$

dove  $r_0$  è il solito raggio classico, si ottiene:

$$L = f\gamma \frac{Nk}{r_0\beta^*} \xi$$

Valori accettabili per  $\xi$  sono 0.005 per collider di protoni e 0.05 per collider di elettroni.

Dalle formule relative alla luminosità appare evidente che, per aumentarne il valore si può aumentare il numero dei bunch (possibile solo nel caso dei collider per protoni) oppure diminuire il valore di  $\beta^*$ ; quest'ultima strategia è limitata dagli effetti di aromaticità e dalla vicinanza dei quadrupoli alla zona di interazione.

**Limiti dei sincrotroni e colliders: apertura dinamica, carica spaziale, tune shift, effetto fasci-fascio, decadimento della luminosità. Leggi di scala per sincrotroni e colliders.**

*Decadimento della luminosità.*

Le principali cause di decadimento della vita media della luminosità, il cui valore accettabile medio è dell'ordine della giornata, sono legate, in ogni macchina, a differenti fenomeni:

- $\overline{Sp\overline{pS}}$ , il collisore di protoni e antiprotoni del CERN, doveva fare i conti principalmente con il beam-beam tune shift (che incrementava l'emittanza traversa) e l'intrabeam scattering;
- il LEP vedeva diminuire la vita media della luminosità a causa dello scattering tra fascio e gas residuo;
- LHC, infine, avrà negli eventi nucleari (con un  $\sigma_{tot}$  di oltre 100 mbarn) la causa principale.

Nel seguente estratto dal primo rapporto sulla realizzazione di LHC si parla delle performance della macchina nella versione protone-protone (si ricordi che inizialmente il progetto prevedeva la coesistenza di LEP ed LHC nel medesimo tunnel, scelta che permetteva di far funzionare la nuova macchina anche come collisore tra protoni ed antiprotoni).

**Specific assumption for pp performance**

*A part from the beam energy, the most important parameter of a particle collider is its luminosity  $L$ , given by*

$$L = \frac{N^2 k f}{4\pi\sigma^2}$$

*Here  $N$  is the number of particles per bunch,  $k$  is the number of bunches in each beam,  $f$  is the revolution frequency and  $\sigma$  is the r.m.s. beam radius at the interaction point. It is convenient to introduce the invariant emittance  $\varepsilon_n$  defined by:*

$$\varepsilon_n = \frac{\gamma\sigma^2}{\beta^*}$$

*where  $\beta^*$  is the value of the betatron function at the crossing point and  $\gamma$  is the energy divided by the rest energy of particles. The luminosity can then be written*

$$L = \frac{N^2 k f \gamma}{4\pi\varepsilon_n \beta^*}$$

*The most fundamental limitation to the performance of a collider comes from the beam-beam interaction. In the LHC, this effect has two components, the head-on interaction which occurs at the wanted interaction points and therefore cannot be avoided, and the long range interactions which occur on either side of the interaction regions in the portion of the beam pipe which is common to both beams. The importance of these effects is determined by the beam-beam tune shift parameter  $\xi$*

$$\xi = \frac{Nr_p}{4\pi\varepsilon_n}$$

*where  $r_p$  is the classical proton radius.*

*The head-on interaction excites high-order betatron resonances and produces a tune shift which is close to  $\xi$  for the beam central particle but is only a small fraction of  $\xi$  for particles with large betatron amplitudes. Systematic studies based on three and six interactions per turn in the CERN  $\overline{Sp\overline{pS}}$  and on twelve interactions per turn in the Fermilab Tevatron have shown that, for  $\xi$  of the order of 0.002 to 0.006, useful beam lifetimes of the order of 50 hours can be obtained provided betatron resonances of order 12 or less are avoided. Inspection of the tune diagram shows that this is possible if the total tune spread in the beam remains below 0.02. In the LHC the tune spread is produced by a combination of the head-on collisions, the long range beam-beam interactions and the machine lattice non-linearities.*

*The long range interactions depend on the bunch spacing  $b$  and on the length over which the two beams travel in the same pipe. In the LHC these are 4.5 m and close to 90 m respectively, and in order to avoid the 40 unwanted bunch collisions which would otherwise occur around each interaction region the two beams are made to cross at a small angle. This angle  $\phi$  is limited by the allowed excursions of the beam trajectories in the quadrupole triplet near to the interaction point, and must be larger than the divergence of the beam envelope in the interaction region, namely*

$$\phi \geq n \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\gamma\beta^*}}$$

*if the beam envelope is defined at  $n\sigma$ .*

For a given emittance this relation imposes a lower limit on the value of  $\beta^*$  which can be used. The crossing angle provides a transverse separation of the beam trajectories of the order of 6 to 7  $\sigma$ , which is sufficient to prevent particle collisions but not to suppress the long-range electromagnetic interactions between bunches. The result of these multiple interactions is a global tune shift and a tune spread.

Assuming a contribution of the lattice non-linearities to the tune spread smaller than 0.005, as assured by the lattice design, the permissible total beam-beam tune spread  $\Delta Q$  is 0.015. This quantity has to be shared by the different interaction regions, and it determines the ultimate performance of the collider.

Using the expression above for  $\xi$ , the luminosity become

$$L = \frac{Nkf\gamma\xi}{r_p\beta^*}$$

where  $Nkf$  is the beam current divided by the elementary charge.

The beam current might be limited by the increasing difficulties of controlling the particle losses in the superconducting magnets and of dumping the beams, as well as by the heat load on the cryogenic system due to the synchrotron radiation. The stored energy in the beam  $U$  and the synchrotron radiation power  $P_s$  are given by the following expressions

$$\begin{cases} U = ENk \\ P_s = \frac{Z_0 e^2 c Nkf \gamma^4}{3\rho} \end{cases}$$

where  $E$  is the particle energy,  $Z_0$  is the impedance of free space,  $c$  the velocity of light,  $e$  the elementary charge and  $\rho$  the bending radius.

### Results for pp performance

In order to optimize the performance of the LHC an assumption has to be made on the number and type of interaction regions simultaneously active. The nominal LHC parameter set is based on three identical regions each providing a free space of 40 m in between the quadrupoles of the final focusing triplets. Using the nominal gradient of the LHC quadrupoles of 250 Tm<sup>-1</sup> it is possible to obtain a value of  $\beta^*$  as low as 0.5 m in these insertions while maintaining acceptable maximum values of the betatron functions in the final focusing triplet of about 4 km. The bunch spacing which has been adopted after discussions with the experimenters is  $b=4.5$  m, or 15 ns in time units, and the number of particles per bunch is  $10^{11}$ , well below any known single-bunch current limitation. Together with the assumed transverse emittance of  $\varepsilon_n=3.75 \cdot 10^{-6}$  m these beam parameters can be simultaneously provided by the existing CERN injectors, once upgraded for this purpose.  $\xi=0.0032$  is well within the range of values observed in presently operating machines, and with  $\phi=200$   $\mu$ rad the total beam-beam tune spread for the three interaction regions just reaches the maximum permissible value of 0.015.

The 4.5 m bunch spacing corresponds to a maximum number of 5940 bunches in the LHC. This is one of the magic numbers permitted by the LHC, SPS and PS circumference ratios, (27/7)/11/1. The rise times of the injection kickers and of the dump kicker require some spacing between the bunch trains, which are injected one after the other, this reduces the number of bunches by about 20%. The total beam current  $I=0.85$  A results in a stored energy per beam of 583 MJ and in a synchrotron radiation power for the two beams  $P_s=17.5$  kW. The beam-halo cleaning system, the beam dumping and the cryogenic system have been designed for these values. A summary of our assumptions and the resulting LHC nominal performance is shown in Table 1.

The highest luminosity  $L$  is obtained at the nominal maximum energy  $E$ . Operating the LHC at a lower energy  $E'$  would result in a luminosity  $L'=L(E'/E)^2$ . This is because the beam cross section increase like  $E/E'$  and simultaneously  $\beta^*$  has to be increased in the same proportion to allow the use of a constant crossing angle, which is limited by the geometry of the insertion.

With the nominal luminosity of  $1.65 \cdot 10^{34}$  cm<sup>-2</sup>s<sup>-1</sup> the average number of inelastic non-diffractive events per crossing  $\langle n \rangle = L\Sigma/kf$  is equal to 19 for a cross section  $\Sigma$  of 60 mb. For those experiments which cannot operate with such a high value of  $\langle n \rangle$  the luminosity can be reduced by increasing  $\beta^*$  at the relevant interaction points from the nominal value of 0.5 m up to 15 m. In this way  $\langle n \rangle$  can be adjusted from 19 to less than 1.

Max. energy	[E] for B=10T	7.7 TeV
Luminosity	[L]	$1.65 \cdot 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$
Number of bunches	[k]	4725
Bunch spacing	[b],[ $\Delta t$ ]	4.5 m, 15 ns
Number of interaction points	[ $k_x$ ]	3
$\beta$ values at interaction points	[ $\beta^*$ ]	0.5 m
Normalized emittance	[ $\epsilon_n = \sigma^2 \gamma / \beta$ ]	3.75 $\mu\text{m}$
r.m.s. beam radius at crossing point	[ $\sigma$ ]	15 $\mu\text{m}$
Bunch length	[ $\sigma_s$ ]	0.075 m
Energy spread	[ $\sigma_E/E$ ]	$1.05 \cdot 10^{-4}$
Full crossing angle	[ $\phi$ ]	200 $\mu\text{rad}$
Particles per bunch	[N]	$10^{11}$
Beam-beam tune shift parameter	[ $\xi$ ]	0.0032
Circulating current	[I]	0.85 A
Stored beam energy	[U]	583 MJ
Synchrotron radiation power	[ $P_s$ ]	17.5 kW

**Tabella 1**

A substantial increase in luminosity is conceivable for special experiments that can cope with a higher rate of events. For instance in the case of a single experiment the number of protons per bunch can be multiplied by 3 to reach the same head-on beam-beam tune shift as before but in only one interaction region. Provided the bunch spacing is increased by the same factor, namely from 15 to 45 ns, the beam current is unchanged in the LHC as well as in the injectors, and therefore the nominal emittance is preserved. As a result of these changes which do not require any major modification to the machine design the maximum luminosity increases threefold to  $5 \cdot 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ . In addition, with a single experiment the betatron function at the interaction point can be decreased to  $\beta^*=0.3 \text{ m}$  without violating the beam-beam limit due to the long-range interactions with a crossing angle  $\phi=230 \mu\text{rad}$ ; however in order to maintain acceptable maximum values of the betatron functions in the final focusing triplet the free magnetic length between quadrupoles has to be reduced from 40 to 20 m. With these modifications to the insertion and to the experimental layout the maximum luminosity reaches  $7.8 \cdot 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$  with an average number of events per crossing of 264.

### Operational procedures

#### a) Luminosity lifetime

The main cause of luminosity decay during a physics period is the beam-beam collisions themselves. The initial characteristic decay-time of the beam intensity, due to this effect, is

$$\tau = \frac{N_0}{L \Sigma k_x}$$

where  $N_0$  is the initial total number of particles in the beam, and the total cross section  $\Sigma$  is assumed to be  $1 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$  at 7.7 TeV.

Other causes of beam loss are the scattering of particles on the residual gas and the beam-beam effect. With the residual gas densities expected at the start-up of the LHC the effect of scattering on the residual gas can be ignored. The beam-beam effect is known, from experience with the Sp pS collider, to produce a diffusion of particles into the far tails of the transverse distributions. The diffusion rate cannot be predicted accurately since it is extremely sensitive to machine imperfections. In the SPS it is responsible for a beam lifetime (inverse decay rate) of the order of 30 to 50 hours.

The luminosity is also influenced by the evolution of the transverse emittances. These tend to increase owing to intrabeam scattering, but in the LHC this effect is more than compensated by synchrotron radiation damping, so that a net decrease of the emittances should occur during a physics period.

For simplicity, we suppose in the following that synchrotron radiation damping just compensates the influence of the beam-beam effect and of intrabeam scattering, leaving only the beam-beam collisions as a source of luminosity decay. Under these conditions the initial characteristic decay-time of the intensity in each beam is  $\tau=26.5$  hours using three active interaction regions. The luminosity half-life is:

$$t_{1/2} = (\sqrt{2} - 1)\tau = 11 \text{ hours}$$

b) Filling time

Although the time it takes to fill the LHC by transferring twelve batches of protons from twelve successive SPS cycles into each of the two channel is less than 7 minutes, the total filling time will be considerably longer. After the old beams have been dumped, the currents in the magnetic systems have to be lowered to the injection values. This takes 20 minutes and will be followed by a programmed check of the main systems (about 10 minutes) and then by fine tuning of the transfer and capture processes using pilot beams of low intensity (20 to 30 minutes) After the final transfer have been made, the beams will be accelerated from 450 GeV to 7.7 TeV in approximately 20 minutes. Another 20 to 30 minutes will probably be needed for fine tuning of the beams in collision and the setting up of the physics detectors. In total, these operations will take about 2 hours.

The optimum duration of a physics period depends both on the luminosity lifetime and on the time it takes to refill the machine. With a filling time of 2 hours the ratio of the average to the initial luminosity is a maximum if the physics period lasts 7.3 hours. In this case  $\langle L \rangle / L$  reaches a value of 0.62, and a refilling of the LHC two to three times per 24 hours is required.

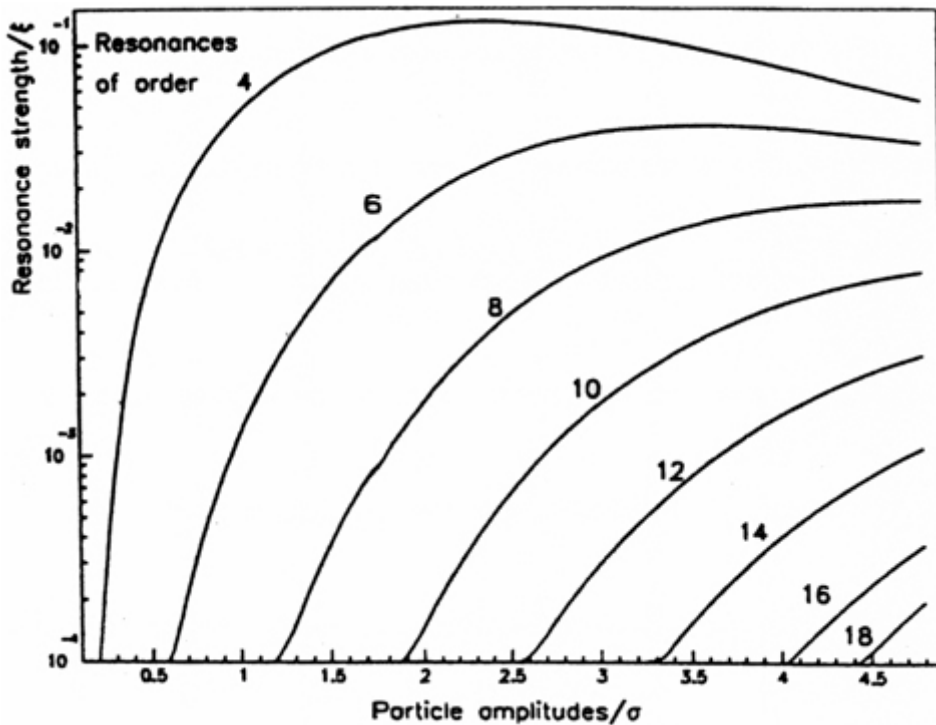


Fig. 1 Strength of high order beam-beam induced resonances as a function of the particle amplitude normalized to the r.m.s. radius of the opposing beam.

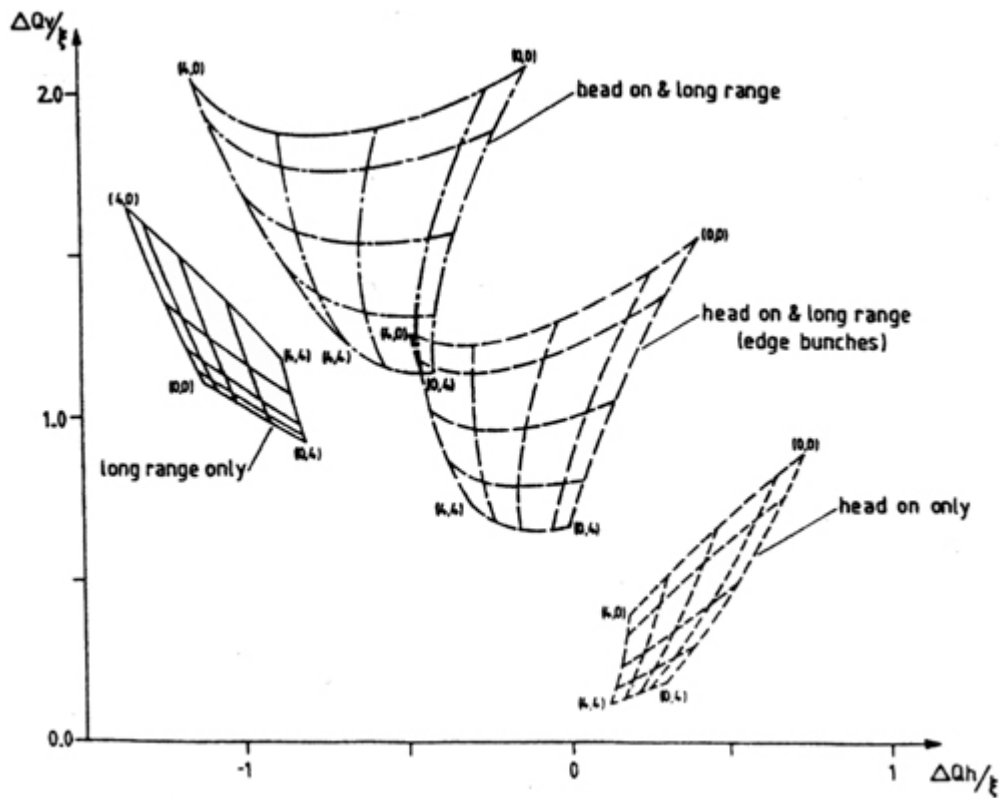


Fig.2 Beam-beam induced tune shifts per interaction normalized to  $\xi$  for particles with horizontal, vertical amplitudes  $(x, y)$ ,  $N=10^{11}$ ,  $\Delta t=15$  ns,  $\phi=200$   $\mu$ rad,  $\varepsilon_n=3.75 \cdot 10^{-6}$  m.

*Leggi di scala*

In conclusione del corso viene presentato, in [appendice 20](#), un articolo che riprende alcune considerazioni fondamentali relativi al design di un collider ed introduce le leggi di scala.