Indice delle lezioni

(Prof. Giglioli)

Riferimenti ai testi:

- **Richiami di termofluidodinamica applicata alle macchine** *di Ennio Macchi (Ed. Città Studi)*
- **Macchine a fluido incomprimibile** *di Corrado Casci (Ed. Masson)*
- **Compressori di gas** *di Corrado Casci (Ed. Masson)*
- **Macchine a fluido bifase** *di Corrado Casci (Ed. Masson)*

- **Turbine a gas** *di Franco Montevecchi (Ed. Città Studi)*

Definizione e classificazione delle macchine. Comportamento volumetrico dei fluidi. La legge degli stati corrispondenti. Calcolo delle proprietà termodinamiche dei fluidi. Il principio di conservazione dell'energia applicato alle macchine.

Definizione e classificazione delle macchine.

Nel corso di Macchine per allievi ingegneri vengono esaminati i criteri di progetto e le caratteristiche di funzionamento (nella loro individualità oppure in relazione ai cicli nei quali operano) di una vasta classe di componenti ingegneristici, chiamati appunto, genericamente, "macchine". Una macchina è definita come la sede di una trasformazione energetica, operante mediante uno o più fluidi in azione dinamica o cinematica; detti fluidi sono i vettori energetici della trasformazione. Nella tabella numero 1 è esposta una serie di categorie nelle quali possono essere suddivise le macchine.

Turbomacchine	*Macchine volumetriche*	*Scambiatori di calore*
Dette anche macchine a flusso continuo; tale categoria comprende pompe, compressori e turbine)	Dette anche macchine a flusso periodico; tale categoria comprende pompe, compressori ed espansori volumetrici)	Tale categoria comprende generatori di vapore e condensatori.

Tabella 1

Le macchine possono ovviamente essere definite, in generale, come macchine motrici oppure macchine operatrici a seconda che producano energia meccanica riducendo l'energia dei fluidi che utilizzano o viceversa. Quando una macchine utilizza un fluido incomprimibile prende il nome di macchina idraulica, essendo l'acqua il fluido incomprimibile maggiormente utilizzato.

Comportamento volumetrico dei fluidi.

Come si può intuire già a partire dalla definizione stessa di macchine che è stata vista in precedenza, i fluidi, ed in particolare le loro proprietà termodinamiche, sono un elemento fondamentale nella trattazione teorica delle macchine. Per ogni fluido, in stato di equilibrio, esiste un legame univoco fra pressione, volume specifico e temperatura; tale legame può essere espresso dalla generica relazione:

$$f(p, \upsilon, T) = 0$$

chiamata equazione di stato. Tale equazione può, in casi particolari, assumere semplici espressioni analitiche: nel caso dei gas perfetti assumerà infatti la seguente forma:

$$p\upsilon = \frac{R}{M}T$$

dove R sia la costante universale dei gas ed M la massa molare del fluido. Nel caso dei liquidi perfetti, invece, l'equazione di stato sarà la seguente:

$$\upsilon = \text{costante}$$

Nel caso dei gas reali si avrà poi:

$$p\upsilon = Z\frac{R}{M}T$$

dove Z sia il fattore di comprimibilità.

La legge degli stati corrispondenti.

Il fattore di comprimibilità Z presentato in precedenza è legato in generale alle variabili di stato da una funzione estremamente complessa, dipendente anche dalla natura del fluido considerato; esiste però una legge, non rigorosa ma valida con buona approssimazione per tutti i fluidi, nota come legge degli stati corrispondenti, secondo la quale il legame esistente tra il fattore di comprimibilità Z e le variabili di stato pressione e temperatura, espresse in termini ridotti, è indipendente dalla natura del fluido considerato. Temperatura e pressione ridotte sono definite nel modo seguente:

$$\begin{cases} T_{Rid} = \dfrac{T}{T_{Cr}} \\ p_{Rid} = \dfrac{p}{p_{Cr}} \end{cases}$$

L'utilità della legge degli stati corrispondenti è evidente: è sufficiente conoscere la massa molecolare ed i parametri critici di un fluido per prevederne, con buona accuratezza, il comportamento volumetrico.

Calcolo delle proprietà termodinamiche dei fluidi.

Per quanto riguarda i gas perfetti si ricordi innanzitutto che l'energia interna, l'entalpia e i calori specifici sono funzioni della sola temperatura. I calori specifici sono poi legati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} c_p = c_v + \dfrac{R}{M} \\ c_v = \dfrac{K}{K-1} \cdot \dfrac{R}{M} \end{cases}$$

avendo posto:

$$K = \frac{c_p}{c_v}$$

Valendo poi la relazione:

$$du = c_v dT$$

si ricava che la differenza di energia interna fra due punti può essere calcolata dalla relazione:

$$u_B - u_A = \int_{T_A}^{T_B} c_v dT = \bar{c}_v (T_B - T_A) \tag{1}$$

dove sia:

$$\bar{c}_v = \frac{\int_{T_A}^{T_B} c_v dT}{T_B - T_A}$$

Per quanto riguarda l'entalpia si ha invece:

$$dh = c_p dT$$

dalla quale ovviamente si ricava che la differenza di entalpia fra due punti si ottiene dalla relazione:

$$h_B - h_A = \int_{T_A}^{T_B} c_p dT = \bar{c}_p (T_B - T_A)$$

con:

$$\bar{c}_p = \frac{\int_{T_A}^{T_B} c_p dT}{T_B - T_A}$$

L'entropia è invece una funzione sia della temperatura che della pressione, vale infatti la relazione:

$$Tds = dh - \upsilon dp \tag{2}$$

dalla quale si ricava:

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{\upsilon}{T} dp$$

Nell'ambito dei gas perfetti valgono poi le due seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \upsilon = \dfrac{RT}{Mp} \\ dh = c_p dT \end{cases}$$

che, combinate con l'ultima relazione scritta permettono di ottenere la seguente espressione:

$$ds = \frac{c_p dT}{T} - \frac{R}{M} \cdot \frac{dp}{p}$$

dalla quale si ricava, passando dall'espressione differenziale all'integrale:

$$s_B - s_A = \int_A^B \frac{c_p dT}{T} - \frac{R}{M} \ln \frac{p_B}{p_A} = \bar{\bar{c}}_p \ln \frac{T_B}{T_A} - \frac{R}{M} \ln \frac{p_B}{p_A}$$

dove sia:

$$\bar{\bar{c}}_p = \frac{\int_{T_A}^{T_B} c_p dT}{\ln \frac{T_B}{T_A}}$$

Quest'ultima relazione differisce numericamente dalla media aritmetica che si è vista in precedenza solo quando la differenza di temperatura è grande.
Nel caso dei liquidi perfetti tutte le trasformazioni sono anche isocore; non ha dunque senso differenziare il c_p dal c_v e quindi si definisce un unico calore specifico (che si può identificare come quello a volume specifico costante):

$$c_L = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_\upsilon = \frac{du}{dT}$$

Dalla relazione caratteristica dei liquidi perfetti vista in precedenza si deduce che:

$$d\upsilon = 0$$

Come conseguenza dell'ultima espressione scritta la relazione

$$Tds = du + pd\upsilon$$

assume la seguente forma:

$$Tds = du \tag{3}$$

Si arriva dunque ad osservare che una trasformazione isoenergetica è anche una trasformazione isoentropica e viceversa. Per quanto riguarda, invece, la variazione di entalpia, si sfrutta la relazione (2) ottenendo:

$$dh = Tds + \upsilon dp$$

ovvero, facendo riferimento alla relazione (3):

$$dh = du + \upsilon dp$$

Considerando delle differenze finite si avrà allora, ricordando che il volume rimane costante:

$$h_B - h_A = u_B - u_A + \upsilon(p_B - p_A)$$

Sfruttando dunque la relazione (1) e ricordando che c_p e c_v sono coincidenti si ottiene:

$$h_B - h_A = \bar{c}_L (T_B - T_A) + \upsilon(p_B - p_A)$$

dove si è utilizzato il c_L medio del liquido.
Per quanto riguarda, infine, i gas reali, si deve osservare che il comportamento di questi ultimi si gestisce facendo riferimento a degli scostamenti relativi ai valori dei gas perfetti; si avranno dunque relazioni del tipo:

$$\begin{cases} h(T,p) = h_0(T) + \Delta h(T,p) \\ c_p(T,p) = c_p^0(T) + \Delta c_p(T,p) \\ s(T,p) = s_0(T,p) + \Delta s(T,p) \end{cases}$$

dove i termini h_0, c_p^0 ed s_0 fanno riferimento ai gas perfetti. Si noti inoltre che, nel caso dei gas perfetti, h e c_p dipendono solo dalla temperatura mentre nel caso dei gas reali bisogna anche tener conto della dipendenza dalla pressione. Gli scostamenti che appaiono nel sistema precedente sono definiti nel modo seguente:

$$\begin{cases} \Delta h = \left\{ \int_0^p \left[\upsilon - \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial T} \right)_p T \right] dp \right\}_T \\ \Delta c_p = \left[- \int_0^p \left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial T^2} \right)_p dp \right]_T \\ \Delta s = \left\{ \int_0^p \left[\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial T} \right)_p - \frac{R}{M} \cdot \frac{1}{p} \right] dp \right\}_T \end{cases}$$

da cui si deduce che gli scostamenti dipendono dal comportamento volumetrico. Qualora il fluido in questione sia un gas ideale si può ricavare, dalla relazione caratteristica di questo tipo di fluidi:

$$\upsilon = \frac{RT}{Mp}$$

e quindi, sostituendo tale relazione nelle espressioni degli scostamenti riportate nell'ultimo sistema scritto, si ricava, come era logico aspettarsi, scostamenti nulli. Rifacendosi alla legge degli stati corrispondenti, si potrebbe dimostrare che, purché i fluidi siano in condizioni critiche, gli scostamenti sono uguali per tutti i fluidi.

Il principio di conservazione dell'energia applicato alle macchine.

Si consideri ora il sistema aperto schematizzato in figura 1 nel quale si vede un condotto di ammissione che porta il fluido ad una macchina all'interno della quale avviene uno scambio di potenza termica Q e di potenza meccanica N. Il fluido viene poi scaricato attraverso un condotto di scarico.

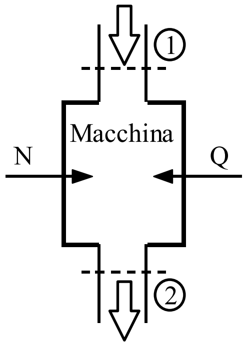

Figura 1

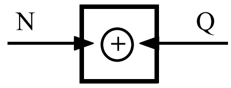

Figura 2

È innanzitutto essenziale specificare quale sia la convenzione di segno scelta: ove non venga diversamente specificato si farà sempre riferimento alla convenzione, mostrata in figura 2, nella quale viene considerato positivo il lavoro (o il calore) entrante nel sistema. Si supponga poi che sia possibile sfruttare la trattazione monodimensionale secondo la quale ad ogni sezione dei condotti o della macchina sarà possibile associare un'unica velocità, corrispondente con la velocità media relativa al profilo di velocità che si dovrebbe invece considerare con un'analisi più accurata. Si ipotizza, inoltre, la totale assenza di reazioni chimiche o nucleari, nonché di campi elettrici od elettromagnetici; si suppone, infine, che l'unico campo di accelerazione sia quello gravitazionale. Il principio di conservazione dell'energia, applicato al volume compreso tra le superfici 1 e 2 di figura 1, afferma che la somma delle potenze entranti nel sistema eguaglia la somma delle potenze uscenti, a meno di eventuali accumuli di energia; esso potrà dunque essere formulato come segue:

$$\dot{m}_1(e_1) + L_1 + Q + N = \dot{m}_2(e_2) + L_2 + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho e dV$$

dove e sia l'energia per unità di massa di fluido, L sia il lavoro per unità di tempo compiuto dal fluido a monte sul fluido a valle mentre la derivata tiene conto di eventuali accumuli di potenza. L'energia per unità di massa di fluido può solitamente essere espressa come somma di un termine di energia interna, un termine cinetico ed uno gravitazionale:

$$e = u + \frac{v^2}{2} + gz$$

Il lavoro per unità di tempo compiuto dal fluido a monte sul fluido a valle (potenza relativa al lavoro di pulsione) può invece essere espresso nel modo seguente:

$$L = pvA$$

mentre la portata massica assume la seguente forma:

$$\dot{m} = \rho v A$$

Nella maggior parte dei casi si considereranno macchine che presentino un moto stazionario del fluido e questo permetterà di trascurare il termine di accumulo. Inoltre, per la conservazione della massa si avrà:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

Dividendo allora il tutto per la portata massica si ricava:

$$u_1 + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{Q}{\dot{m}} + \frac{N}{\dot{m}} = u_2 + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2}$$

Si definiscono poi nel modo seguente il calore e il lavoro entranti nel sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{Q}{\dot{m}} = Q_e \\ \dfrac{N}{\dot{m}} = L_e \end{cases}$$

Siccome si è in presenza di un sistema aperto, conviene introdurre la variabile di stato entalpia, definita come:

$$h = u + \frac{p}{\rho}$$

così che si possa arrivare alla seguente relazione:

$$h_1 + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + Q_e + L_e = h_2 + gz_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

Da quest'ultima si deduce allora la seguente espressione del lavoro scambiato:

$$L_e = h_2 - h_1 + g(z_2 - z_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} - Q_e \tag{4}$$

In questa relazione si riconoscono termini termici (l'entalpia e il calore) e termini meccanici (l'energia potenziale gravitazionale e il termine cinetico); è però possibile modificarla in modo che contenga solamente termini meccanici; per fare questo si sfrutta la seguente relazione:

$$dh = Tds + \upsilon dp \tag{5}$$

Ricordando poi che

$$ds = ds_e + ds_i$$

dove ds_e è relativa alla fornitura di calore dall'esterno mentre ds_i è relativa alle irreversibilità interne, si sostituisce quest'ultima espressione nella relazione (5) e, integrando, si giunge ad avere:

$$h_2 - h_1 = Q_e + L_w + \int_1^2 \upsilon dp$$

dove L_w è il lavoro delle forze dissipative. La relazione (4) si potrà allora riscrivere nel modo seguente:

$$L_e = \int_1^2 \upsilon dp + L_w + g(z_2 - z_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

e, come si può notare, sono presenti solo termini meccanici.

Il principio di conservazione dell'energia applicato alle macchine. Il principio di conservazione dell'energia nel sistema di riferimento relativo.

Il principio di conservazione dell'energia applicato alle macchine.

Nella lezione precedente si era giunti ad individuare due espressioni che rappresentavano il lavoro scambiato; nella prima erano presenti sia termini di tipo meccanico che termini di tipo termico mentre nella seconda erano presenti solo termini di tipo meccanico. Quest'ultima relazione, applicata al caso di fluidi incomprimibili, si trasformerà nel modo seguente:

$$L_e = \upsilon(p_2 - p_1) + L_w + g(z_2 - z_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

Si ricordi ora la relazione termodinamica secondo la quale:

$$du = Tds - pd\upsilon$$

nel caso in cui, come si è accennato, il volume sia costante, si avrà, ovviamente:

$$du = Tds$$

che, integrata, permette di scrivere che:

$$u_2 - u_1 = Q_e + L_w$$

Molto spesso, inoltre, si imporrà che non venga introdotto nessun calore e quindi l'espressione appena scritta si riduce ulteriormente fino ad ottenere:

$$u_2 - u_1 = L_w$$

ovvero:

$$c_v(T_2 - T_1) = L_w$$

In questo modo, dunque, il lavoro può essere espresso nel modo seguente:

$$L_e = \upsilon(p_2 - p_1) + c_v(T_2 - T_1) + g(z_2 - z_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

Come breve esempio si consideri il principio di conservazione dell'energia applicato al compressore mostrato in figura 1.

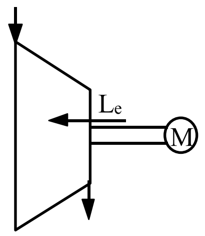

Figura 1

Innanzitutto si deve tener ben presente il fatto che i compressori sono macchine adiabatiche in quanto il fluido scorre al loro interno molto velocemente e quindi non c'è il tempo materiale perché possano avvenire scambi energetici; tenendo poi conto del fatto che un compressore viene solitamente progettato in modo da rendere trascurabile la differenza nelle energie cinetiche e che le dimensioni ridotte del macchinario non rendono percepibile la variazione di energia potenziale gravitazionale, si avrà, molto semplicemente:

$$L_e = h_2 - h_1$$

dove L_e è il lavoro fornito al compressore dal motore.

Il principio di conservazione dell'energia nel sistema di riferimento relativo.

Come si è in precedenza accennato, un'importante categoria di macchine è rappresentata dalle cosiddette turbomacchine; tali macchine, come mostrato schematicamente in figura 2, sono costituite da elementi fissi, chiamati statorici, e da elementi mobili, chiamati rotorici: l'insieme di un elemento statorico e di un elemento rotorico prende il nome di stadio della macchina.

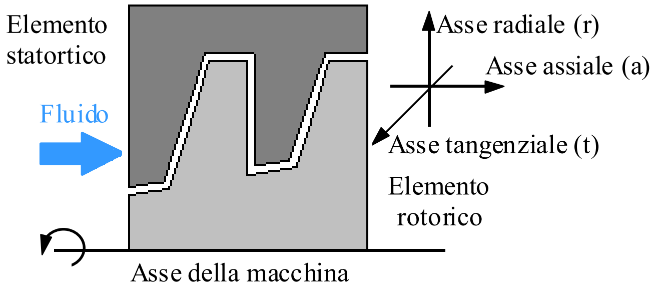

Figura 2

Il profilo delle varie palettature condiziona la direzione della vena fluida; con riferimento alla figura 3 si nota che il fluido entra nello statore con una velocità $\mathbf{v_0}$ mentre vi esce con una velocità $\mathbf{v_1}$ diretta come la tangente geometrica delle palette.

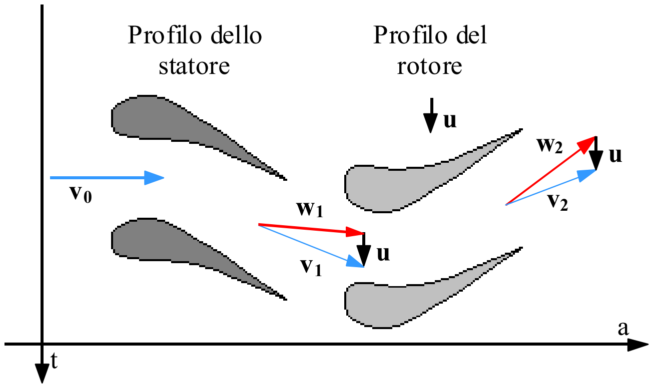

Figura 3

La vena fluida che esce dallo statore investe poi il rotore, che sta ruotando con una velocità angolare che si può per semplicità supporre costante e pari ad $\boldsymbol{\omega}$. Ovviamente, nella posizione media, la palettatura rotorica ha una velocità tangenziale espressa come:

$$\vec{u} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Detta dunque $\mathbf{w_1}$ la velocità relativa con la quale un osservatore solidale con la palettatura rotorica vede arrivare la vena fluida in uscita dallo statore, vale la seguente relazione vettoriale:

$$\vec{v_1} = \vec{u} + \vec{w_1} \tag{1}$$

Questa relazione implica la necessità di realizzare un triangolo delle velocità per esplicitare la velocità $\mathbf{w_1}$ e poi realizzare la palettatura rotorica in modo da minimizzare l'impatto della vena fluida contro il rotore, ovvero significa fare in modo che le palette del rotore siano allineate con una tangente geometrica coincidente con la direzione della velocità $\mathbf{w_1}$ stessa (come appunto mostrato in figura 3). Complessivamente si potranno costruire due triangoli delle velocità, uno a monte ed uno a valle del rotore. Si torni quindi a fare riferimento alla relazione di conservazione dell'energia sfruttando però il punto di vista dell'osservatore solidale con la palettatura rotorica; si otterrà:

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2} + gz_1 - \frac{u_1^2}{2} + Q_e = h_2 + \frac{w_2^2}{2} + gz_2 - \frac{u_2^2}{2}$$

Si nota ovviamente che non c'è un termine di lavoro perché l'osservatore è solidale con il rotore che quindi per lui è fermo. I termini legati al quadrato della velocità $\mathbf{u}$ vanno a comporre il potenziale centrifugo. Da questa relazione è possibile ricavare il salto entalpico nel modo seguente:

$$h_2 - h_1 = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + Q_e$$

Tale salto entalpico sarà ovviamente il medesimo che si riscontra nel caso di un'analisi fatta da un osservatore assoluto (in quanto l'entalpia non dipende dal tipo di osservatore) e quindi è possibile sostituire questa espressione del salto entalpico nella relazione che esprimeva il lavoro scambiato, ottenendo:

$$L_e = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

Da questa relazione si deduce che il lavoro meccanico è completamente definito una volta che si conoscono i due triangoli delle velocità che appaiono in figura 3. L'ultima relazione scritta prende il nome di lavoro euleriano della macchina. Dalla figura 2 si può però notare che, mentre la velocità **u** avrà solo una componente tangenziale, le velocità **v** e **w** avranno tutte e tre le componenti, ovvero si avrà:

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{u_t} \\ \vec{v} = \vec{v_a} + \vec{v_r} + \vec{v_t} \\ \vec{w} = \vec{w_a} + \vec{w_r} + \vec{w_t} \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{cases} u^2 = u_t^2 \\ v^2 = v_a^2 + v_r^2 + v_t^2 \\ w^2 = w_a^2 + w_r^2 + w_t^2 \end{cases}$$

Il lavoro euleriano può allora essere espresso nella seguente forma espansa:

$$L_e = \frac{w_{1a}^2 + w_{1r}^2 + w_{1t}^2 - w_{2a}^2 - w_{2r}^2 - w_{2t}^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{v_{2a}^2 + v_{2r}^2 + v_{2t}^2 - v_{1a}^2 - v_{1r}^2 - v_{1t}^2}{2}$$

Sfruttando la relazione (1) in riferimento alle componenti dei vari vettori si avrà inoltre:

$$\begin{cases} v_a = w_a \\ v_r = w_r \\ v_t = u_t + w_t \end{cases}$$

Dall'ultima espressione di questo sistema si ricava:

$$w_t = v_t - u_t$$

e quindi:

$$w_t^2 = v_t^2 - 2v_t u_t + u_t^2$$

Dopo queste osservazioni il lavoro euleriano può dunque essere espresso nel modo seguente:

$$L_e = \frac{v_{1a}^2 + v_{1r}^2 + v_{1t}^2 - 2v_{1t}u_1 + u_1^2 - v_{2a}^2 - v_{2r}^2 - v_{2t}^2 + 2v_{2t}u_2 - u_2^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} +$$

$$+ \frac{v_{2a}^2 + v_{2r}^2 + v_{2t}^2 - v_{1a}^2 - v_{1r}^2 - v_{1t}^2}{2}$$

ovvero, semplificando quanto è possibile

$$L_e = \frac{-2v_{1t}u_1 + 2v_{2t}u_2}{2} = v_{2t}u_2 - v_{1t}u_1$$

Si è quindi trovata un'espressione molto semplice per esprimere il lavoro euleriano, che diventa ancora più semplice nel caso delle macchine assiali, nelle quali, essendo:

$$r_1 = r_2$$

si avrà:

$$u_1 = u_2 = u$$

In questa situazione, dunque, il lavoro euleriano presenterà una espressione ancora più semplice:

$$L_e = u(v_{2t} - v_{1t})$$

Solitamente, infine, il triangolo delle velocità a monte e il triangolo delle velocità a valle della girante vengono rappresentati afferenti ad un unico polo, come mostrato in figura 4, detti allora α_1 ed α_2 gli angoli formati dall'asse tangenziale con le velocità assolute e β_1 e β_2 gli angoli formati dall'asse tangenziale con le velocità relative, l'espressione del lavoro euleriano può essere riscritta come segue:

$$L_e = u_2 v_2 \cos\alpha_2 - u_1 v_1 \cos\alpha_1$$

oppure, nel caso delle macchine assiali:

$$L_e = u(v_2 \cos\alpha_2 - v_1 \cos\alpha_1)$$

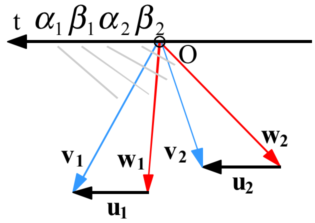

Figura 4

È importante specificare che se, avendo scelto la convenzione delle macchine operatrici, si trova un lavoro negativo, significa che la macchina in questione è una macchina motrice.

Forze e momenti esercitati dal fluido sulle pareti di una macchina.

Forze e momenti esercitati dal fluido sulle pareti di una macchina.

Lo scambio di lavoro tra il fluido e la macchina avviene tramite l'azione meccanica esercitata dal fluido sulle pareti mobili della macchina; è dunque importante andare a valutare la risultante **R** delle forze esercitate dal fluido, che sarà:

$$\vec{R} = \int_S p\underline{n}dS + \int_S \tau\underline{t}dS$$

dove il primo integrale (relativo alla superficie S della pala stessa) rappresenta lo sforzo normale alla pala (essendo p la forza elementare normale alla pala ed **n** il versore normale alla pala) mentre il secondo integrale rappresenta lo sforzo tangenziale alla pala (essendo τ lo sforzo elementare tangenziale alla pala e **t** il versore tangenziale alla pala). Il momento rispetto all'asse di rotazione vale invece:

$$\vec{C} = \int_S p\underline{n} \wedge \underline{r}dS + \int_S \tau\underline{t} \wedge \underline{r}dS$$

Per risolvere le due relazioni scritte sarebbe necessario conoscere, punto per punto, lo stato termodinamico e fluidodinamico del fluido nonché la geometria della pala stessa; siccome queste informazioni non sono comunemente note si fa riferimento alla figura 1 e si sfrutta una relazione che si basa sulle due superfici ideali di ingresso e uscita nel volume V di controllo.

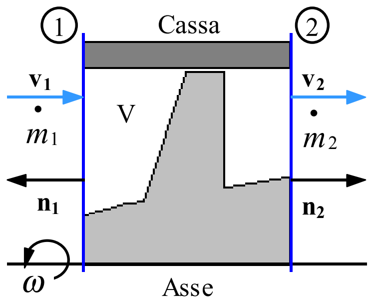

Figura 1

Dal teorema della quantità di moto, applicato al volume di controllo, discende

$$\vec{R} = \int_{S_1} \vec{v_1} d\dot{m}_1 - \int_{S_2} \vec{v_2} d\dot{m}_2 + \int_{S_1} - p_1\underline{n}_1 dS_1 + \int_{S_2} - p_2\underline{n}_2 dS_2 + \int_{S_1} - \tau_1\underline{t}_1 dS_1 + \int_{S_2} - \tau_2\underline{t}_2 dS_2 + \vec{G} - \frac{\partial}{\partial t}\int_V v dm$$

dove i primi due termini si riferiscono alle quantità di moto entranti e uscenti dal sistema, G indica la forza peso e la derivata si riferisce al possibile accumulo di quantità di moto nel volume. Ipotizzando che la macchina operi in regime permanente si può trascurare la derivata; trascurando inoltre anche l'azione del peso ci si riduce alla seguente relazione:

$$\vec{R} = \int_{S_1} \vec{v_1} d\dot{m}_1 - \int_{S_2} \vec{v_2} d\dot{m}_2 + \int_{S_1} - p_1\underline{n}_1 dS_1 + \int_{S_2} - p_2\underline{n}_2 dS_2 + \int_{S_1} - \tau_1\underline{t}_1 dS_1 + \int_{S_2} - \tau_2\underline{t}_2 dS_2$$

Scegliendo le due superfici estreme abbastanza lontane dalla palettatura della macchina, si può ipotizzare che la distribuzione di velocità nelle sezioni S_1 ed S_2 sia sufficientemente uniforme da trascurare i due integrali relativi agli sforzi tangenziali (sforzi viscosi); si avrà dunque:

$$\vec{R} = \int_{S_1} \vec{v_1} d\dot{m}_1 - \int_{S_2} \vec{v_2} d\dot{m}_2 + \int_{S_1} - p_1\underline{n}_1 dS_1 + \int_{S_2} - p_2\underline{n}_2 dS_2$$

In condizioni di monodimensionalità le velocità possono essere considerate delle costanti e ciò rende più semplici i primi due integrali; se, infine, come detto, si è in regime stazionario, varrà senza dubbio la seguente relazione:

$$\dot{m}_1 = \int_{S_1} d\dot{m}_1 = \int_{S_2} d\dot{m}_2 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

e quindi, risolvendo gli integrali, l'espressione della risultante sarà la seguente:

$$\vec{R} = \dot{m}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) - p_1\underline{n}_1 S_1 - p_2\underline{n}_2 S_2$$

Si nota dunque come sia possibile arrivare ad esprimere la risultante **R** dalla semplice conoscenza dello stato del fluido nelle sezioni di ingresso e di uscita che sono totalmente arbitrarie.

Per quanto riguarda invece il momento esercitato dal fluido rispetto all'asse di rotazione è necessario usare la legge del momento della quantità di moto che permette di ottenere la seguente relazione:

$$\vec{C} = \int_{S_1} \vec{v_1} \wedge \underline{r} d\dot{m}_1 - \int_{S_2} \vec{v_2} \wedge \underline{r} d\dot{m}_2 + \int_{S_1} - p_1 \underline{n}_1 \wedge \underline{r} dS_1 + \int_{S_2} - p_2 \underline{n}_2 \wedge \underline{r} dS_2 + \int_{S_1} - \tau_1 \underline{t}_1 \wedge \underline{r} dS_1 +$$

$$+ \int_{S_2} - \tau_2 \underline{t}_2 \wedge \underline{r} dS_2 + \int_V \vec{g} \wedge \underline{r} dm - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \vec{v} \wedge \underline{r} dm$$

Sfruttando allora la medesima serie di semplificazioni vista in precedenza si ottiene:

$$\vec{C} = \int_{S_1} \vec{v_1} \wedge \underline{r} d\dot{m}_1 - \int_{S_2} \vec{v_2} \wedge \underline{r} d\dot{m}_2 + \int_{S_1} - p_1 \underline{n}_1 \wedge \underline{r} dS_1 + \int_{S_2} - p_2 \underline{n}_2 \wedge \underline{r} dS_2$$

Inoltre, per questioni di simmetria, è possibile semplificare ulteriormente eliminando anche il contributo dovuto alle azioni normali (pressione) e quindi si ricava:

$$\vec{C} = \int_{S_1} \vec{v_1} \wedge \underline{r} d\dot{m}_1 - \int_{S_2} \vec{v_2} \wedge \underline{r} d\dot{m}_2$$

Sfruttando nuovamente le ipotesi di moto permanente e di monodimensionalità, si possono risolvere facilmente i due integrali; inoltre, esprimendo la relazione vettoriale in forma scalare, si ottiene:

$$C = \dot{m}\left(v_{1t} r_1 - v_{2t} r_2\right)$$

Si può ora ottenere la potenza dell'albero moltiplicando il momento trovato per la velocità angolare:

$$P = \omega C$$

e quindi il lavoro per unità di massa scambiato con l'esterno viene espresso come:

$$L_e = \frac{\omega C}{\dot{m}} = r_1 \omega v_{1t} - r_2 \omega v_{2t} = u_1 v_{1t} - u_2 v_{2t}$$

Si è così ottenuta, nuovamente, l'espressione del lavoro euleriano trovata nella lezione precedente (i segni differenti dipendono semplicemente da convenzioni differenti).

Moto in condotti a sezione variabile.

Moto in condotti a sezione variabile.

Si faccia ora riferimento alla figura 1 nella quale vediamo una sezione assial-simmetrica di un condotto a sezione variabile e si suppongano verificate le seguenti ipotesi:

- il moto sia permanente,
- il condotto sia adiabatico,
- le trasformazioni siano reversibili,
- il moto sia monodimensionale,
- il fluido sia un gas perfetto con calore specifico costante con la temperatura e nel quale la forza peso sia trascurabile.

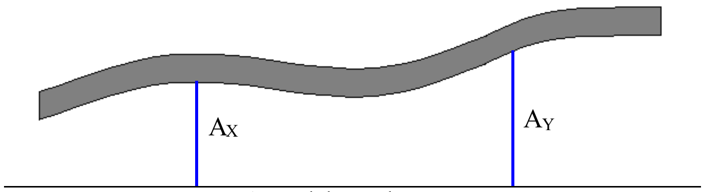

Figura 1

Fatte tutte queste ipotesi è possibile considerare le due sezioni A_X e A_Y mostrate in figura e applicare la conservazione dell'energia per il fluido che le attraversa: si avrà la seguente relazione:

$$h_X + \frac{v_X^2}{2} = h_Y + \frac{v_Y^2}{2}$$

Definendo allora l'entalpia totale come somma di un'entalpia statica e di un'energia cinetica:

$$H = h + \frac{v^2}{2} \tag{1}$$

si può parlare, combinando le ultime due relazioni scritte, di conservazione dell'entalpia totale.

$$H_X = H_Y$$

Così come è stata definita l'entalpia totale è possibile definire anche la temperatura totale come somma di una temperatura statica e di un termine cinetico; a partire dalla relazione (1) si ottiene dunque:

$$H - h = \frac{v^2}{2}$$

e quindi la relazione termodinamica

$$dh = c_p dt$$

può essere riscritta come:

$$H - h = c_p (T - t)$$

ovvero:

$$\frac{v^2}{2} = c_p (T - t)$$

Si ricava dunque:

$$T = t + \frac{v^2}{2c_p}$$

che può essere riscritta nel modo seguente:

$$T = t\left(1 + \frac{v^2}{2c_p t}\right)$$

Essendo poi, per i gas perfetti

$$c_P = \frac{K}{K-1} R$$

si ottiene:

$$\frac{T}{t} = 1 + \frac{K-1}{2} \cdot \frac{v^2}{KRt} \qquad (2)$$

Da questo momento in poi con R si intenderà la costante dei gas divisa per la massa molare. Si ricordi dunque la seguente espressione del quadrato della velocità del suono:

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2$$

che, applicata al caso dei gas perfetti si trasforma nel modo seguente:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = KRt$$

Si ricordi inoltre la definizione del numero di Mach:

$$M = \frac{v}{a}$$

Facendo dunque riferimento all'espressione del quadrato della velocità del suono per i gas perfetti e alla definizione del numero di Mach si può riscrivere la relazione (2) nel modo seguente:

$$\frac{T}{t} = 1 + \frac{K-1}{2} M^2$$

Si è dunque trovato il legame tra la temperatura totale e la temperatura statica (l'importanza della temperatura totale è comprensibile pensando che un oggetto che entra nell'atmosfera terrestre risente ovviamente della temperatura totale e non di quella statica).
Aver richiesto la reversibilità delle trasformazioni implica la possibilità di parlare di isoentropia e quindi è possibile considerare la seguente relazione:

$$\frac{P}{p} = \left(\frac{T}{t}\right)^{\frac{K}{K-1}}$$

dalla quale si ricava, combinando le ultime due relazioni:

$$\frac{P}{p} = \left(1 + \frac{K-1}{2} M^2\right)^{\frac{K}{K-1}}$$

Si è così introdotta anche la pressione statica (detta anche pressione di ristagno) e la pressione totale e si nota che esiste un legame univoco fra il numero di Mach ed i rapporti fra le grandezze termodinamiche locali ed in condizioni di ristagno.
Si applichi ora la condizione di continuità, rappresentata dalla seguente relazione:

$$\rho v A = \dot{m} = \text{costante}$$

che, moltiplicata e divisa per i termini a, a_0 e ρ_0, permette di arrivare alla seguente relazione:

$$\dot{m} = \rho v A \frac{\rho_0}{\rho_0} \cdot \frac{a}{a} \cdot \frac{a_0}{a_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{v}{a} \cdot \frac{a}{a_0} (\rho_0 a_0 A)$$

ovvero:

$$\frac{\dot{m}}{\rho_0 a_0 A} = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{v}{a} \cdot \frac{a}{a_0} \qquad (3)$$

Per quanto si è detto in precedenza osserviamo come sia:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{a_0} = \dfrac{\sqrt{KRt}}{\sqrt{KRT}} = \left(\dfrac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \dfrac{K-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \dfrac{v}{a} = M \end{cases}$$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricava, inoltre, che:

$$\rho = \frac{p}{Rt}$$

ma anche, ovviamente:

$$\rho_0 = \frac{P}{RT}$$

e quindi:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{pT}{Pt} = \left(1 + \frac{K-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{K-1}}$$

La relazione (3) può dunque essere riscritta nel modo seguente:

$$\frac{\dot{m}}{\rho_0 a_0 A} = M\left(1 + \frac{K-1}{2} M^2\right)^{-\frac{K+1}{2(K-1)}}$$

Il grafico di quest'ultima relazione è quello mostrato in figura 2 dal quale si comprende che:

- note le condizioni di ristagno (ρ_0, a_0) per ogni valore di M resta individuata l'area di passaggio richiesta per far passare la portata assegnata;
- note le condizioni di ristagno, per ogni coppia di portata ed area di passaggio, si hanno due possibili soluzioni dell'equazione di continuità: una per moto subsonico e l'altra per moto supersonico;
- note le condizioni di ristagno t e p, la funzione espressa dall'ultima relazione scritta ammette un massimo, esiste cioè un limite alla portata che può passare da un'area A e tale limite è raggiunto per M unitario, cioè per condizioni soniche (dette anche critiche).

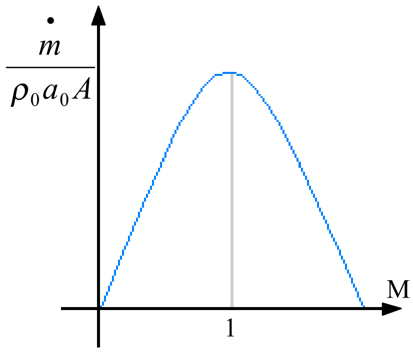

Figura 2