

Ruote dentate.

Ruote dentate.

La trasmissione da un albero ad un altro senza problemi legati ai rapporti di trasmissione è possibile sfruttando le ruote dentate, dette anche ingranaggi, dei quali un primo esempio è sicuramente la ruota a pioli tipica dei mulini mostrata in figura 1.

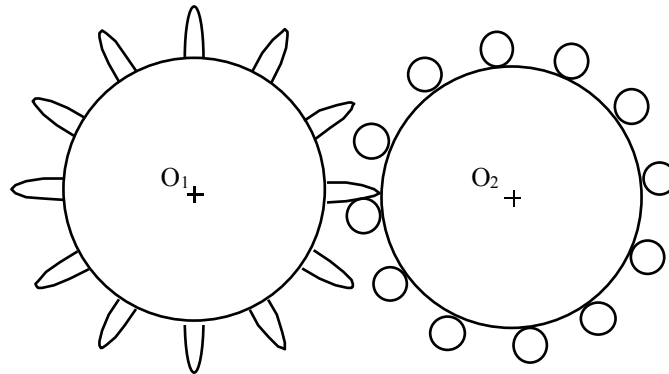


Figura 1

La ruota di sinistra sia composta da un numero Z_1 di denti mentre la ruota di destra sia composta da un numero Z_2 di pioli; il rapporto di trasmissione sarà dunque espresso dalla relazione:

$$\tau = \frac{Z_1}{Z_2}$$

È importante soffermarsi sul comportamento del centro di istantanea rotazione del sistema. Facendo dunque riferimento alla figura 2 è possibile osservare che P_0 oscilla sulla retta che congiunge i due centri; detti dunque:

$$\begin{cases} r_1 = \overline{P_0 O_1} \\ r_2 = \overline{P_0 O_2} \end{cases}$$

e siccome l'appartenenza del punto P_0 ad entrambe le ruote impone che sia:

$$\begin{cases} v = \omega_1 r_1 \\ v = \omega_2 r_2 \end{cases}$$

si ottiene:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

detto rapporto di trasmissione istantaneo.

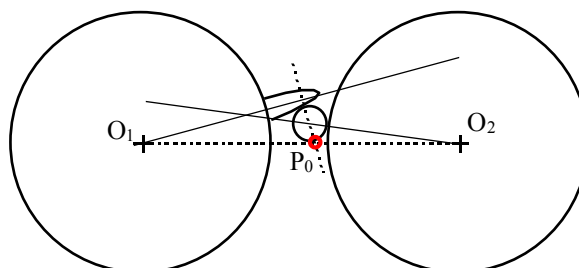


Figura 2

Il centro di istantanea rotazione si muove mentre il dente accompagna il piolo e il luogo dei punti de esso tracciato permette di costruire il profilo delle due primitive del moto che, come mostrato in figura 3 dove in rosso è indicata la zona nella quale si trova P_0 , non sono assolutamente circolari. Siccome il centro di istantanea rotazione si muove, anche τ varierà con il muoversi dell'ingranaggio.

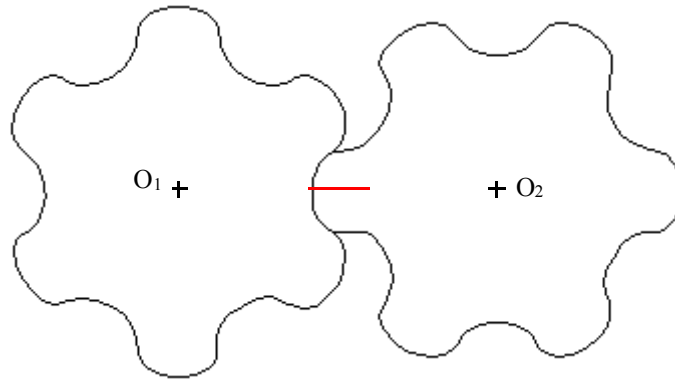


Figura 3

Perché il rapporto di trasmissione rimanga costante è necessario che rimangano costanti sia r_1 che r_2 e questo significa che il profilo dovrà avere una conformazione particolare. Si dovrà ovviamente partire da due primitive del moto come quelle mostrate in figura 4; sarà allora evidente che il contatto tra le due ruote avverrà solamente nella zona di intersezione; si definirà poi un passo p sulla ruota generatrice tale per cui:

$$p = \frac{2\pi r_1}{Z_1} = \frac{2\pi r_2}{Z_2}$$

così che si avrà:

$$\tau = \frac{r_2}{r_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

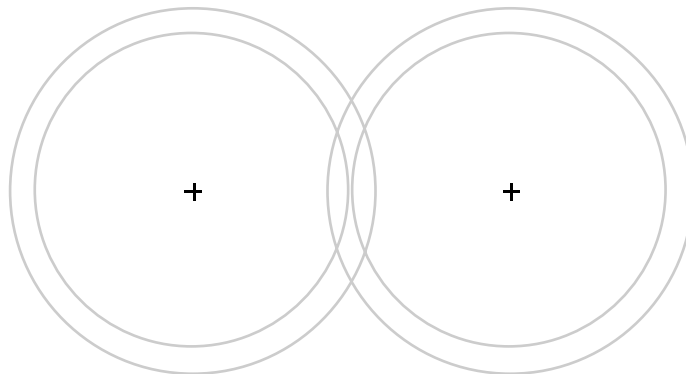


Figura 4

Sarà ora possibile definire il profilo di una ruota e adeguare l'altra in modo da ottenere la situazione desiderata. È importante sottolineare che una volta espresso il profilo il moto avrà una direzione ben definita (oraria oppure antioraria); per ottenere una coppia di ruote che si possono muovere in entrambi i versi sarà necessario costruire due coppie di profili.

Ruote dentate con profili ad evolvente.

Ruote dentate con profili ad evolvente.

Ruote dentate munite di primitive circolari mantengono costante il loro rapporto di trasmissione; supposto allora noto il profilo di una delle due ruote (il pignone), sfruttando la conoscenza della primitiva, ed in particolare del centro di istantanea rotazione relativo, è possibile determinare la forma del profilo coniugato a quello dato, creando così la seconda ruota, detta corona. Con riferimento alla figura 1 si partirà da un profilo s e si traccia una retta perpendicolare al profilo e diretta in modo da incontrare il punto P_0 ; in questo modo si riesce a ricostruire il profilo coniugato σ .

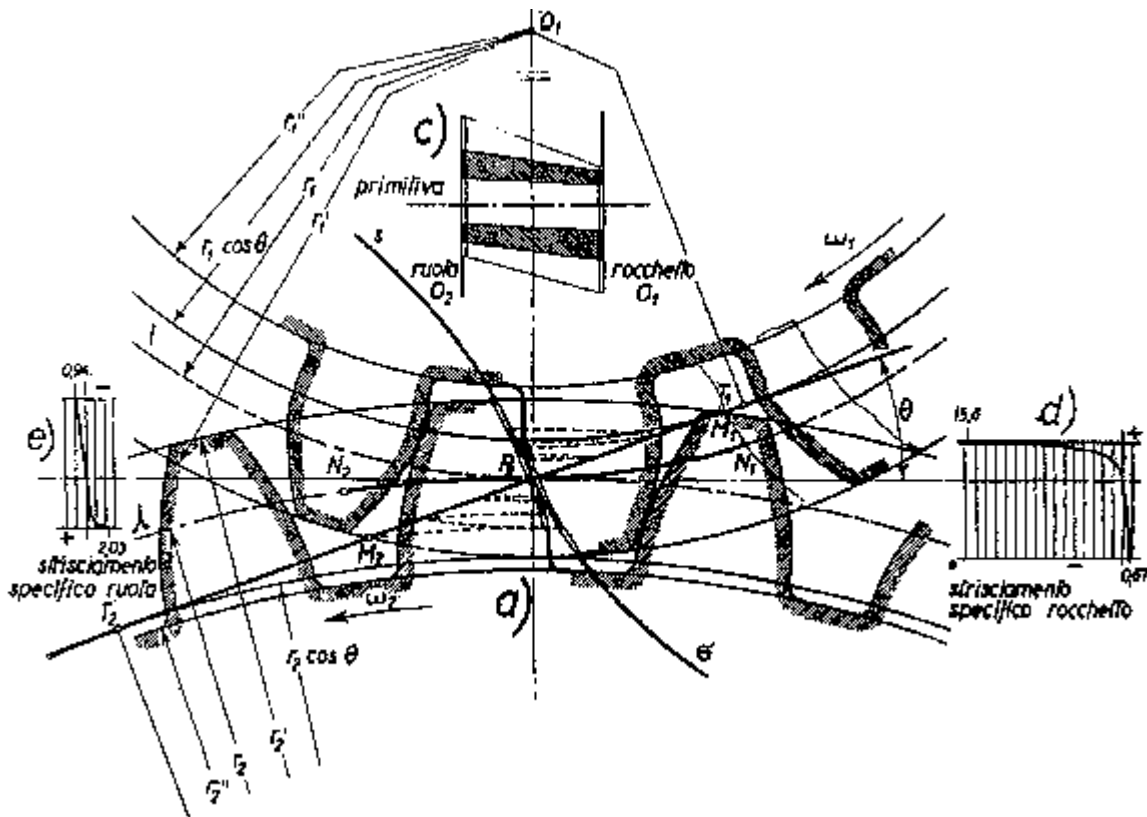


Figura 1

I profili, una volta realizzati, diventano i contorni della dentatura delle ruote e ovviamente vale il principio di non compenetrabilità. Partendo da una prima ruota con profilo σ_1 è dunque possibile ricavare una seconda ruota con un profilo coniugato σ_2 che può essere a sua volta utilizzata per costruire una ruota coniugata il cui profilo verrà indicato come σ_3 . A questo punto è importante osservare che il profilo σ_3 è lo stesso che si avrebbe avuto derivandolo direttamente dalla prima ruota; usando allora una ruota 1 per desumere i profili di una ruota 2 e di una ruota 3 si può essere sicuri che le ruote 2 e 3 si potranno adattare tra di loro. Si creano così delle famiglie di ruote accoppiabili; le ruote di un'unica famiglia si differenziano per il numero di denti e per il raggio. L'accoppiabilità delle ruote di una famiglia incontra un limite nel momento in cui i profili siano sdoppiati, al fine di permettere la reversibilità del moto. È poi ovvio che se la ruota madre ha dei denti fini e un sensibile spazio tra dente e dente, la ruota figlia avrà denti grossi e poco spazio tra un dente e l'altro e quindi due ruote figlie, entrambe con denti grossi, non sono accoppiabili. Per risolvere questo problema si deve procedere in due passaggi distinti: si deve infatti prima creare un "negativo" a partire dalla ruota madre e poi sfruttare tale negativo per creare delle ruote figlie compatibili.

Siccome l'energia dissipata aumenta con l'allontanarsi del punto di contatto dalla primitiva, questo si deve mantenere il più vicino possibile; si individuano dunque, per ognuna delle due primitive (che nelle figura 1 hanno raggio rispettivamente r_1 ed r_2) due circonferenze, come mostrato nella figura 1, due circonferenze, una esterna (con raggio r_1' ed r_2') ed una interna (con raggio r_1'' ed r_2'') che prendono rispettivamente il nome di raggio di troncatura esterno ed interno. Gli scostamenti della dentatura dai raggi di troncatura prendono il nome di addendum (che è il pezzo da aggiungere alla primitiva per arrivare alla sommità del dente), solitamente indicato con il simbolo a , e di dedendum (che è il pezzo da togliere alla primitiva per arrivare al fondo della ruota) indicato solitamente con il simbolo b . Una volta trovati i profili, i denti effettivi si determinano scegliendo come distribuire i vuoti e i pieni; se la larghezza dei pieni e

dei vuoti è uguale e se l'addendum è uguale al dedendum, allora le due famiglie diventano un'unica famiglia e si parla di dentiera complementare.

Quando la primitiva di un ingranaggio si riduce ad una retta, l'ingranaggio prende il nome di cremagliera, come quella mostrata in figura 2.

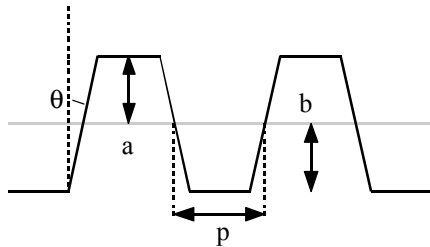


Figura 2

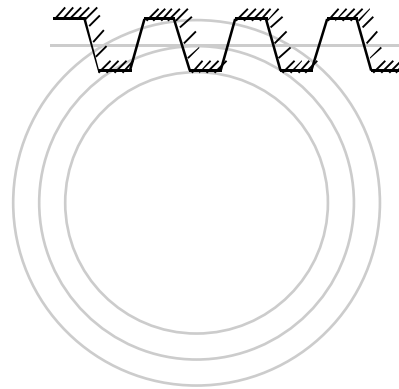


Figura 3

La cremagliera viene utilizzata, come mostrato in figura 3, per il taglio e la realizzazione delle ruote dentate; in particolare la cremagliera si muove in maniera perpendicolare al piano del disegno, mentre la ruota da tagliare ruota lentamente. Il contatto tra i profili deve ovviamente avvenire sul fianco del dente, qualora però a e b fossero uguali, la testa del dente andrebbe a toccare il fondo del vano e quindi, per evitare che anche una minima particella di polvere possa essere sufficiente a creare il grippaggio, è pratica comune scavare il vano un po' più profondo del necessario. In questo modo si crea una struttura solo apparentemente antisimmetrica in quanto poi il contatto tra i denti avverrà solo dove i profili sono simmetrici. Le ruote dentate vengono solitamente classificate indicando il diametro D_p della primitiva ed il numero Z dei denti; si usa allora introdurre il modulo m della ruota, definito come:

$$m = \frac{D_p}{Z}$$

Il passo della ruota può allora essere indicato nel modo seguente:

$$p = \frac{\pi D_p}{Z} = \pi m$$

Solitamente si parla di proporzionamento modulare della ruota dentata quando sono verificate le due seguenti relazioni:

$$\begin{cases} a = m \\ b = \frac{5}{4} m \end{cases}$$

e quindi solitamente si definisce un ingranaggio in base ad un unico parametro: il passo.

Nota il profilo della dentiera e le dimensioni della ruota da tagliare è immediato determinare il punto di contatto che si ottiene dalla normale al dente passante per il punto P_0 di tangenza delle primitive. La retta che si viene a formare (che in figura 1 è la retta T_1T_2) risulta fissa per un osservatore assoluto e rappresenta la retta d'azione delle forze normali che le due ruote si scambiano; proprio per questo motivo prende il nome di retta delle pressioni. Il cerchio centrato nell'origine e tangente alla retta delle pressioni prende il nome di cerchio fondamentale ed il suo raggio, detto raggio fondamentale, è quello indicato in figura con $r_1 \cos \theta$. L'angolo θ prende poi il nome di angolo di pressione e deve essere minore di 30° (nel dimensionamento modulare viene solitamente scelto pari a 20°). Fissando ora un punto (indicato in figura come M_1) sulla retta delle pressioni – e per maggior immediatezza si scelga l'intersezione con il cerchio di troncatura esterno che rappresenta il punto di contatto fra i denti – questo descriverà, durante il moto di rotolamento della ruota, un profilo detto evolvente di cerchio (che assomiglia ad una corda che si avvolge su se stessa e di cui è abbozzato un tratto in figura. La traslazione che deve seguire la dentiera affinché venga percorso tutto il profilo del dente è detto arco d'azione, esprimibile come:

$$l = (a + b) \operatorname{tg} \theta$$

Per avere una continuità nel movimento, dovrà essere verificata la condizione di funzionamento, secondo la quale:

$$p \leq l$$

è allora facile osservare che con il crescere dell'addendum la condizione di funzionamento diventa meno stringente. Esiste tuttavia un preciso limite oltre il quale non si può incrementare l'addendum. Questo infatti non può essere maggiore della distanza h tra la primitiva della dentiera ed il punto di tangenza della retta delle pressioni col cerchio fondamentale; in caso contrario il contatto non avviene entro il punto di tangenza ma penetrerebbe al di sotto del profilo, scavando il dente. Per evitare dunque questo effetto di interferenza il profilo effettivo del dente viene

modificato come in figura 4, introducendo però così un indebolimento della struttura, nonché un numero limite al numero minimo di denti utilizzabili.

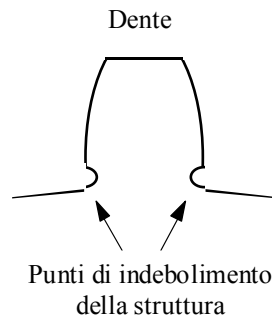


Figura 4

Il massimo addendum consentito è dunque espresso dalla relazione:

$$a \leq h = \overline{TP_0} \sin \vartheta = r_1 \cos \vartheta \sin \vartheta$$

Ruote dentate con profili ad evolvente. La generazione del movimento. Controllo di posizione tramite motori passo-passo. Controllo di posizione tramite retroazione. Un particolare utilizzo dei motori controllati.

Ruote dentate con profili ad evolvente.

Come è stato accennato, il dimensionamento è un principio di realizzazione degli ingranaggi che si basa sulla seguenti espressioni:

$$\begin{cases} a = m \\ m = \frac{p}{\pi} \\ a \leq h \end{cases}$$

Manipolando queste relazioni è possibile, ricordando che il dimensionamento modulare prevede un angolo θ pari a 20° , ottenere l'espressione del minimo numero di denti necessari:

$$Z_{\min} = \frac{2}{\sin^2 \vartheta} = 17$$

Il dimensionamento modulare non è però l'unico principio realizzativi di un ingranaggio, è infatti possibile sfruttare altri riferimenti. Una metodica alternativa è detta rilassamento e prevede di legare addendum e dedendum con le seguenti due relazioni:

$$\begin{cases} a = Cm \\ b = \frac{5}{4}Cm \end{cases}$$

dove C sia un fattore minore di 1 che porta a denti più piccoli. In questo modo i cerchi di troncatura esterna si avvicinano alla primitiva e, di conseguenza, le zone di contatto diminuiscono e gli archi di contatto si accorciano; si perde così la fluidità del moto in quanto una coppia di denti si separa prima che la seconda coppia si sia formata.

Un modo per risolvere tale problema consiste nell'utilizzare un diverso principio di dimensionamento che prevede di ridurre l'addendum di una ruota (solitamente quella piccola) ed aumentare quello dell'altra, sfruttando dunque le due seguenti relazioni:

$$\begin{cases} a = m - c \\ b = \frac{5}{4}m + c \end{cases}$$

Si parla in questo caso di dentiere corrette. A differenza della tecnica del rilassamento, in questo caso la forma del dente è la stessa prevista con il dimensionamento modulare (con il vantaggio quindi di poter utilizzare il medesimo strumento nella fase realizzativa), l'altra faccia della medaglia è che il metodo del rilassamento permette la realizzazione di ruote autocomplementari mentre le dentiere corrette generano due famiglie di ruote.

Un ultimo parametro importante nella realizzazione degli ingranaggi è costituito dalla rumorosità. Sfruttando la luce polarizzata su ingranaggi di plexiglass è possibile vedere come si distribuisce e come evolve lo sforzo; si può allora notare che il carico parte da un valore minimo alla radice e arriva al massimo sulla testa del dente. Prima che il massimo sia raggiunto entra però in presa una nuova coppia di denti e questo fa sì che gli ingranaggi a denti dritti, come quello mostrato in figura 1, siano rumorosi. Per risolvere questo problema si ricorre all'utilizzo di ruote elicoidali, come quella mostrata in figura 2, che si ottengono a partire dal medesimo utensile utilizzato per la realizzazione delle ruote a denti dritti ma ruotandolo di un certo angolo β . Questo secondo tipo di ruota risulta molto più silenziosa di quella a denti dritti. Quando, infine, la trasmissione del moto non avviene tra assi paralleli sorgono altre problematiche. In figura 3 sono mostrati degli ingranaggi conici realizzati per trasmettere il moto a due assi ortogonali, è però ovvio che si possono realizzare ingranaggi funzionali per angoli qualsiasi.

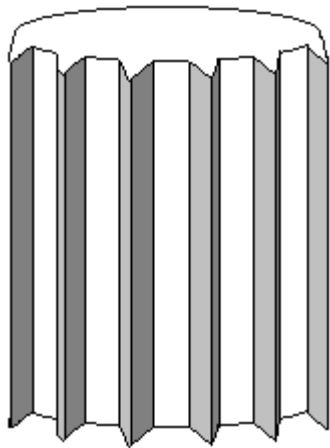


Figura 1

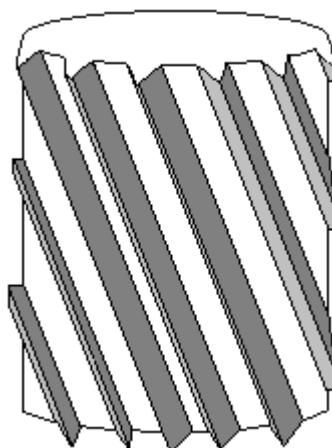


Figura 2

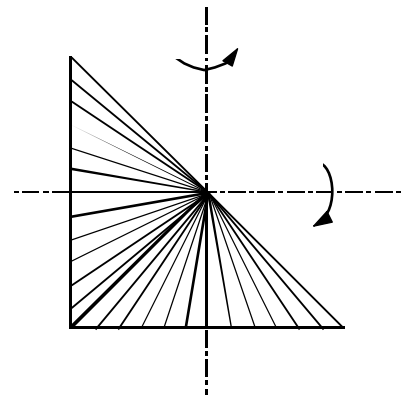


Figura 3

La generazione del movimento.

Fino ad ora abbiamo visto come il concetto di “macchina” si sia man mano evoluto, soprattutto in relazione alla funzione prevalente che si ritiene essa debba svolgere. Così dapprima la macchina è stata vista come un moltiplicatore delle forze, con l’attenzione tutta posta sul legame intercorrente tra forza motrice e forza resistente. Con l’avvento dei motori l’attenzione si sposta invece sulla produttività della macchina, legata alla velocità di funzionamento a regime, per valutare la quale si è interpretata la macchina come un elaboratore di potenza: si devono poter vincere le resistenze richieste per effettuare il compito da svolgere, ma questo deve anche avvenire con valori accettabili della velocità di funzionamento, vincendo quindi, più che una forza, una potenza resistente.

Lo studio delle condizioni di regime ha poi comportato la necessità di indagare anche i transitori di avviamento e di arresto richiesti per raggiungere o abbandonare la condizione di regime, rendendo più complesso e approssimato il modello. Si è poi visto come la stessa condizione di regime risulti spesso solo approssimativamente verificata, e ci si debba accontentare di un regime periodico, limitandoci a mantenere entro valori accettabili gli scostamenti della velocità dal suo valor medio.

Infine abbiamo osservato come anche le condizioni di regime possano variare per effetto di variazioni dei carichi o per mutate esigenze dell’utilizzatore e come, per adattare le condizioni di regime alle diverse esigenze, sia necessario l’impiego di organi di regolazione: la funzione della macchina diventa quindi quella di generare una desiderata legge di velocità e le forze resistenti e motrici diventano ora solo dei mezzi che ostacolano o favoriscono il conseguimento di questo scopo.

Ci si rende conto però, a questo punto, che l’ottenimento di assegnate leggi di velocità può essere visto come un caso particolare di una più generale ricerca di assegnate leggi di moto. Esistono infatti molte macchine il cui scopo principale sembra proprio quello di far sì che alcune loro parti descrivano una successione di movimenti ordinati, spesso sincronizzati con il moto di altre parti della stessa macchina. In queste macchine non solo le forze, ma anche le stesse potenze in gioco (pur essendo necessariamente sempre presenti) sembrano di scarsa rilevanza ai fini della definizione dello scopo per cui la macchina viene progettata, che sembra piuttosto risiedere tutto nella generazione del movimento, come avviene ad esempio nel caso di orologi (meccanici), macchine da cucire, telai, mietitrebbia... e numerosissime altre macchine operatrici.

Fra queste assumono oggi particolare rilevanza le macchine destinate alla produzione automatica, nelle quali è frequente l’esigenza di ottenere posizionamenti accurati di diverse attrezzature come forme, stampi, controstampi, ecc. e dove il cosiddetto prodotto finito viene ottenuto attraverso una successione di operazioni eseguite in sequenza che vanno dalla tranciatura alla formatura per deformazione plastica, dall’incollaggio e la lavorazione di alcune parti fino all’eventuale impilamento e imballaggio. Quasi sempre queste macchine sono costituite da più unità (o stazioni) le quali operano su una linea (retta o circolare) che il pezzo in produzione percorre in successione dall’inizio alla fine del ciclo di operazioni.

Il trasferimento del pezzo da una stazione alla successiva, il suo afferraggio, l’esecuzione delle lavorazioni richieste, tutto avviene in modo automatico richiedendo la generazione di numerose leggi di moto diverse per i diversi elementi coinvolti nelle operazioni.

Tradizionalmente la generazione di leggi di moto avveniva (e nella maggior parte dei casi avviene tuttora) prelevando il moto da un movente, solitamente l’albero di uscita di un motore a velocità ritenuta costante, e modificandolo per mezzo di opportuni meccanismi (o sostanza trasmissioni aventi rapporto di trasmissione τ variabile) così da ottenere la legge di moto richiesta dall’organo di uscita, che prende il nome di cedente, in modo esatto o approssimato.

In tempi relativamente recenti sono apparsi motori controllabili in posizione (anziché soltanto in velocità, come avveniva in precedenza) che consentono di ottenere direttamente all’albero d’uscita le leggi di moto desiderate, sostituendo in molte applicazioni i tradizionali meccanismi, con alcuni notevoli vantaggi e, almeno sinora, con altrettanti svantaggi, che cercheremo di delineare nel seguito.

Controllo di posizione tramite motori passo-passo.

Un primo esempio (un po' forzato) di controllo dello spostamento tramite diretto comando del motore si può trovare nei comuni (ed economici) orologi al quarzo con lettura analogica. Vengono qui impiegati particolari motori detti motori passo-passo, i quali rappresentano (anche concettualmente) il prototipo di motore controllato in posizione. Il motore passo-passo è una particolare realizzazione di motore a corrente alternata progettato per compiere un angolo ben preciso in corrispondenza di ogni impulso/consenso fornito alla sua unità di controllo, realizzando così un azionamento a moto incrementale.

Normalmente vengono adottati azionamenti a moto incrementale quando non sono richieste prestazioni dinamiche elevate e le potenze in gioco sono contenute (massimo poche centinaia di watt), ottenendo in questi casi una limitazione dei costi. Lo schema di un azionamento di questo tipo è riportato in figura 4, dove i due segnali indicati, costituiti da onde quadre, rappresentano i consensi che permettono al motore-passo di eseguire un passo (step) ad ogni onda, ad esempio in corrispondenza di ogni fronte di salita.

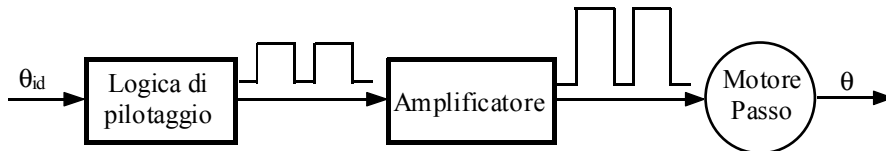


Figura 4

È da notare che lo schema di azionamento con motore-passo non prevede la chiusura con una linea di retroazione offrendo così soluzioni semplici ed economiche, ma che non danno garanzie che la rotazione desiderata, θ_{id} sia rispettata dall'uscita θ . Esempi di applicazione si trovano in diversi campi: robotica industriale, macchine per ufficio, lettori di dischi magnetici e di Compact Disc, centraline di controllo per motori automobilistici... Si stima che la produzione mondiale di motori-passo superi ormai i cento milioni di pezzi annui.

Per descrivere molto semplicemente il principio di funzionamento di questi motori ci riferiremo ad una sola tipologia, costituita da motori-passo a magneti permanenti in cui un magnete permanente (con una o più coppie di poli) può ruotare tra le espansioni polari di un elettromagnete che funge da statore, orientandosi in modo tale da rendere minima l'energia associabile al circuito magnetico: in sostanza le coppie opposte di poli magnetici tenderanno ad avvicinarsi il più possibile.

In figura 5 si vedono i circuiti elettrici e magnetici di statore di un motore a quattro poli elettrici (1,2,3,4) e rotore con una sola coppia di poli magnetici (N,S).

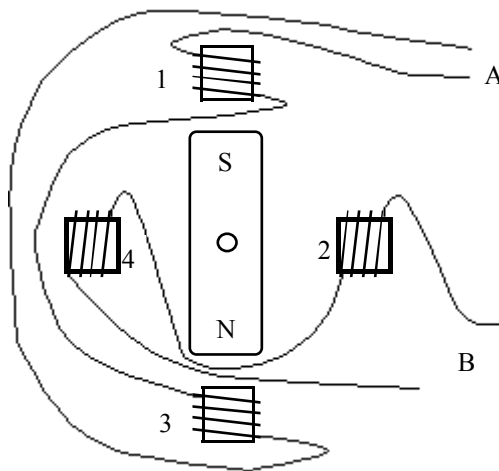


Figura 5

Un motore di questo tipo non ha in realtà applicazioni pratiche, avendo un'efficienza magnetica troppo scadente a causa del basso numero di poli, e viene quindi riportato esclusivamente in vista del fatto che le considerazioni espone in questo semplice esempio si possono facilmente estendere a motori caratterizzati da numerose coppie polari.

I due circuiti elettrici indicati con le lettere A e B possono entrambi venir alimentati con tensioni che indicheremo con la stessa lettera che identifica il circuito, maiuscola se la corrente circola in senso (A,B) e minuscola (a,b) se il senso di percorrenza della corrente è invertito, mentre utilizzeremo la lettera x per indicare l'assenza di alimentazione; a seconda di come si alimentano i due circuiti si ottengono otto possibili diverse configurazioni elettriche, corrispondenti ad altrettante configurazioni magnetiche, come riportato in tabella 1.

È facile a questo punto individuare la sequenza di configurazioni magnetiche che fanno compiere al rotore un giro intero, per una rotazione oraria queste vengono mostrate nella figura 6 e corrispondono alle configurazioni elettriche Ax, xB, ax, xb.

A	B	1	2	3	4
A	x	N	-	S	-
A	B	N	N	S	S
x	B	-	N	-	S
a	B	S	N	N	S
a	x	S	-	N	-
a	b	S	S	N	N
x	b	-	S	-	N
A	b	N	S	S	N

Tabella 1

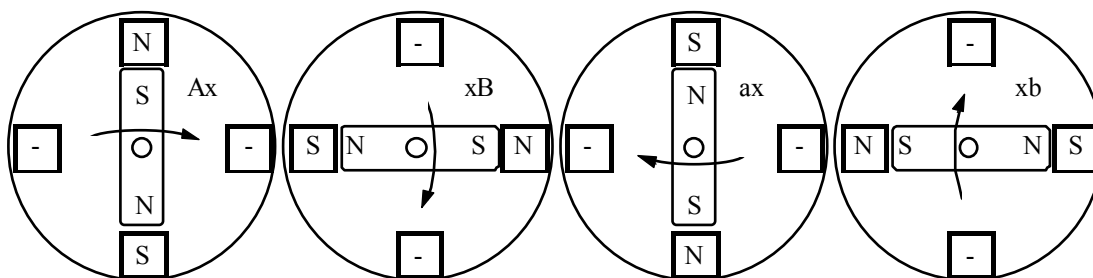


Figura 6

Nella figura 7 è mostrata invece la sequenza di configurazioni magnetiche tramite le quali il rotore compie un giro completo in senso antiorario, generate dalla sequenza di fasi elettriche Ax, xb, ax, xB.

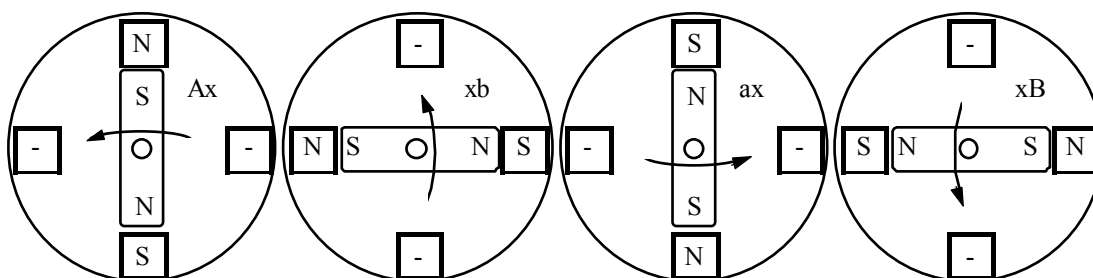


Figura 7

Si noti infine che la sequenza di fasi elettriche Ax, AB, xB, aB, ax, ab, xb, AB, provocherebbe un giro completo in senso orario del rotore tramite l'esecuzione di otto mezzi passi, consentendo l'allineamento del rotore anche in posizioni intermedie fra due poli statorici, oltre a quelle già viste prima. In figura 8 lo stesso motore di figura 5 è stato svolto in modo da trasformarlo in un attuatore lineare.

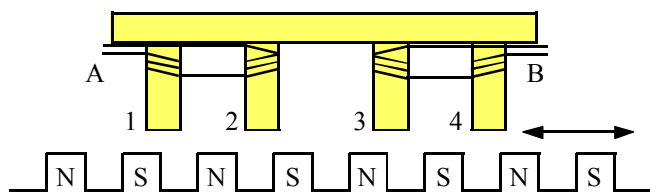


Figura 8

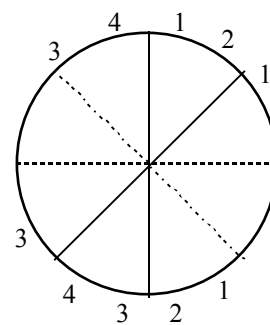


Figura 9

Allo scopo di ottenere un numero superiore di passi si può pensare di comprimere il motore appena studiato in un sottomultiplo ($2\pi/p$) dell'angolo giro in modo che l'intero motore effettivo possa essere ottenuto disponendo in successione p di tali motori parziali. In figura 9 i quattro poli elettrici dello statore di figura 5 sono stati compressi in un

angolo pari a $\pi/4 + \pi/4 = \pi/2$, in modo che sull'angolo giro trovano ora posto $p=4$ motori parziali per un totale di 16 poli statorici, ai quali corrispondono p coppie di poli magnetici del rotore. Si noti che l'alimentazione avviene ancora attraverso due soli avvolgimenti, A per tutte le coppie dispari e B per tutte le coppie pari, poiché tutti i motori parziali devono presentare, passo dopo passo, configurazioni elettromagnetiche identiche tra di loro.

Chiamando con z il numero di configurazioni elettromagnetiche possibili ($z=8$ nel caso in analisi) e con s il numero totale di passi necessari per effettuare una rotazione completa si ha:

$$s = pz$$

Per quanto concerne le caratteristiche meccaniche di questi motori si può affermare che la coppia che essi erogano, raramente superiore a 20 Nm, cala rapidamente quando si supera un certo numero di passi al secondo.

Controllo di posizione tramite retroazione.

Un altro modo per controllare lo spostamento è quello di impiegare azionamenti elettrici che presentino la caratteristica di poter essere comandati in velocità: il modello matematico per il regolatore PID si basa sulla conoscenza dell'errore tra la velocità effettivamente ottenuta e la velocità di riferimento (desiderata), nonché sulla possibilità di comandare in coppia il motore.

Sostituendo alle velocità le posizioni (spostamenti) e alle coppie (che sono proporzionali alle derivate delle velocità) le velocità si ottiene il modello di un sistema in grado di controllare gli spostamenti anziché la velocità, ammesso di disporre sia di un azionamento elettrico con comando di velocità, sia di un sensore che fornisca, istante per istante, la posizione raggiunta.

Gli azionamenti con comando di velocità, necessari per il controllo di posizione, possono essere basati su motori elettrici che per loro natura accettano tali comandi, oppure su motori pilotabili in coppia (tipicamente motori in c.c.) dotati di anello di regolazione.

I motori direttamente pilotabili in velocità appartengono a due grandi categorie: motori asincroni alimentati tramite inverter e motori brushless. I motori asincroni con inverter vengono comandati in velocità facendo variare, tramite l'inverter appunto, la frequenza della corrente trifase di alimentazione, con conseguente variazione del numero di giri del campo statorico. I motori brushless sono praticamente dei motori sincroni polifase con rotore a magneti permanenti, relativamente complessi perché devono costantemente tenere aggiornato il loro azionamento circa la posizione raggiunta dal rotore, in modo che l'azionamento stesso possa generare la giusta sequenza di fasi statoriche. In un certo senso i motori brushless possono essere visti come grossi motori passo-passo con un numero assai basso (quasi sempre uno) di coppie polari; anche in questo caso il comando in velocità si ottiene variando la frequenza dell'alimentazione dello statore.

I più popolari sensori che forniscono informazioni sul valore di una coordinata, lineare o angolare, sono rappresentati dagli encoder. Gli encoder angolari hanno dimensioni molto contenute e sono costituiti da uno statore e da un rotore il cui albero si collega direttamente, tramite opportuni giunti, all'organo rotante di cui necessita conoscere la posizione. L'alberino dell'encoder porta un disco recante numerose incisioni equidistanti che, passando davanti ad una fotocellula, generano un impulso. La posizione raggiunta viene determinata contando gli impulsi generati a partire da un'origine nota, identificata anch'essa da un'incisione e corrispondente fotocellula; una seconda serie di incisioni, leggermente sfasata rispetto alla precedente, permette di individuare il verso di rotazione analizzando il ritardo fra le due sequenze di impulsi. La sensibilità di questi strumenti può essere molto elevata, arrivando a dividere l'angolo giro in 2048 parti. Nonostante l'encoder, di per sé, fornisca soltanto due serie di impulsi legati alla rotazione del proprio alberino, non difficile inviare questi segnali ad appositi contatori e ulteriori circuiti elettronici in grado di trasformare quest'informazione, apparentemente arida, nel formato più conveniente per il sistema di controllo.

Lo schema di un sistema di posizionamento controllato in catena chiusa si presenta come in figura 10 dove con s è indicato lo spostamento.

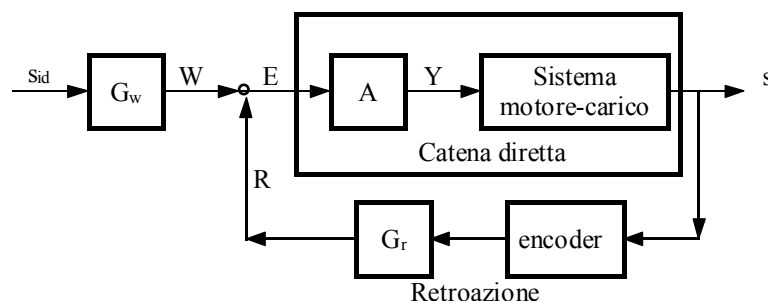


Figura 10

Un particolare utilizzo dei motori controllati.

È noto che per poter raggiungere un determinato punto nello spazio occorrono tre gradi di libertà. Matematicamente si può dire che le coordinate necessarie a descrivere lo spazio sono tre. Assumendo le rotazioni di tre motori controllati in posizione $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ come terna di coordinate possiamo stabilire una corrispondenza tra i punti dello spazio

tridimensionale e tali coordinate angolari. In generale si parla (in ambito industriale) di sistema robotica o più semplicemente di robot quando tale corrispondenza viene assegnata fisicamente tramite un meccanismo (o una catena di meccanismi) e i motori sono controllati da un elaboratore che ne garantisce la programmabilità, quindi la flessibilità rispetto ai compiti da svolgere.

Le relazioni matematiche $x_i=x_i(\theta_i)$ che traducono la cinematica del meccanismo legano quindi i punti dello spazio alla rotazione dei motori. Si consideri, a titolo di esempio, una gru a ponte come quella indicata in figura 11, dove le ruote del ponte si possono ritenere azionate da un solo motore.

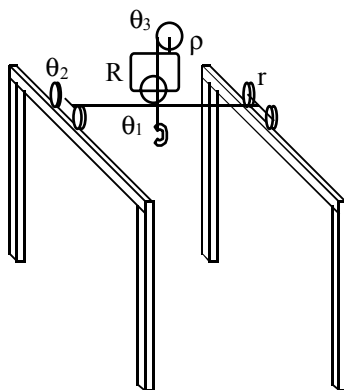


Figura 11

Possiamo scrivere le seguenti relazioni che descrivono i punti dello spazio raggiunti in funzione della rotazione del motore del carro θ_1 , del rapporto di trasmissione e del raggio della relativa ruota, analogamente a quanto accade per il carrello e per l'argano:

$$\begin{cases} x = \vartheta_1 \tau_1 R \\ y = \vartheta_2 \tau_2 r \\ z = \vartheta_3 \tau_3 \rho \end{cases}$$

Queste relazioni sono particolarmente semplici e facilmente invertibili: data una qualsiasi posizione da raggiungere si possono ricavare con facilità le rotazioni dei motori. Accade però spesso che la struttura meccanica del robot non rispecchi un particolare (e magari famoso) sistema di coordinate dello spazio: nel caso in figura il robot è addirittura cartesiano!

Anche se esistono realizzazioni robotiche facilmente riconducibili ad un sistema di coordinate cilindriche (del tipo gru da cantiere, tanto per intenderci) o sferiche (del tipo carro-gru con braccio telescopico), sono di gran lunga più comuni, nel campo della robotica industriale, meccanismi seriali a catena cinematica aperta in cui i vari membri sono tra loro connessi in serie mediante accoppiamenti cinematici semplici (ad esempio accoppiamenti rotoidali o prismatici) che spesso consentono un solo grado di libertà al moto relativo fra gli organi accoppiati.

La mano del manipolatore può possedere più di tre gradi di libertà, allo scopo di raggiungere un determinato punto dello spazio di lavoro e possedere anche una data postura. Per questo possono occorrere altri motori: in generale occorrono tanti motori (coordinate nello spazio dei giunti) quanti sono i gradi di libertà. In figura 12 è rappresentata la struttura cinematica di un robot S.C.A.R.A. che, in campo industriale, è tra le più impiegate.

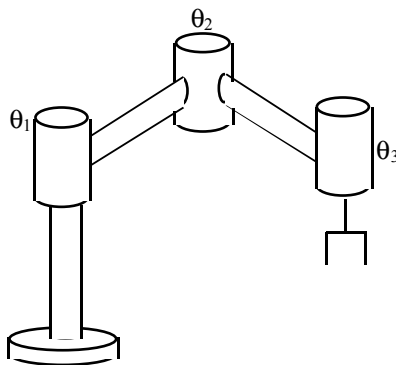


Figura 12

Il sistema di equazioni prima visto diventa allora:

$$\begin{cases} x = f_1(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) \\ y = f_2(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) \\ z = z \end{cases}$$

In questi casi le funzioni f_1 ed f_2 vengono raramente determinate tramite metodi analitico-geometrici classici. Si intuisce inoltre che, ammesso di disporre delle espressioni analitiche delle x, y, z , tali espressioni saranno difficilmente invertibili per via algebrica, quindi non si sarebbe in grado di rispondere al quesito fondamentale: come devo muovere i motori per raggiungere una data posizione?

Lo studio dei robot seriali (e in generale delle catene cinematiche complesse) si avvale perciò di metodi matematici raffinati e appositamente tagliati per lo studio di questi problemi. Uno di questi metodi si basa sulla possibilità di descrivere la posizione relativa di una terna rispetto ad un'altra tramite particolari matrici 4×4 . Queste matrici contengono sia l'informazione relativa alla rotazione sia quella relativa allo spostamento. La matrice di posizione fra la terna j e la terna i nel sistema di riferimento i assume la forma seguente:

$$M_{i,j(i)} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è anche la matrice di trasformazione fra le coordinate del sistema di riferimento cartesiano j e quelle del sistema di riferimento cartesiano i , tenuto conto che le due origini non sono in generale coincidenti. Il primo minore di ordine tre rappresenta la matrice di rotazione, mentre l'ultima colonna contiene lo spostamento dell'origine della terna in coordinate omogenee. Associando una matrice di questo tipo ad ogni membro componente la catena cinematica e utilizzando alcune proprietà delle matrici di trasformazione (scomponibilità degli endomorfismi dello spazio) si può trovare la posizione della mano del manipolatore note le rotazioni dei motori.

Il problema cinematico inverso rimane spesso di non immediata soluzione e ci si deve in genere basare su risultati ottenuti per via numerica.

Movimenti alternativi e progressivi.

Movimenti alternativi e progressivi.

Riprendiamo ora la schematizzazione classica mostrata in figura 1 nella quale viene mostrato un motore che fornisce al suo albero di uscita una coppia M_m ed una velocità angolare ω ; l'albero di uscita del motore è connesso all'albero di ingresso di un meccanismo che permette all'organo finale di avere la legge del moto richiesta.

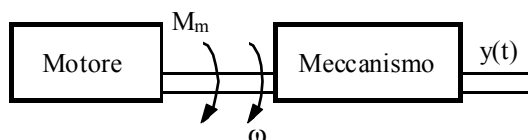


Figura 1

Nella pratica esistono due grandi famiglie di movimenti: i movimenti alternativi e i movimenti progressivi. La rappresentazione dei moti viene spesso fatta sfruttando un diagramma (α, y) , dove α sia l'angolo che descrive la posizione dell'ingresso. Una classificazione maggiormente raffinata dei moti permette la realizzazione di una tabella come la tabella 1.

	Continuativi	Intermittenti
Alternativi		
Progressivi unidimensionali		
A passo di pellegrino (utilizzati per riprendere i giochi)		

Tabella 1

Il meccanismo indicato in figura 1 è composto da diversi corpi: il corpo fisso prende il nome di telaio del meccanismo, l'organo che induce il moto prende il nome di movente (ci si sta ancora riferendo dunque al motore ma facendo riferimento solo all'aspetto cinematico), esiste poi il cedente. I corpi diversi sono tenuti insieme da vincoli di diverso tipo, caratterizzati dal tipo di contatto che si viene a formare: si può allora parlare di accoppiamento superficiale superiore (vincolo unidirezionale, che si ottiene quando si hanno delle superfici che combaciano tra di loro) oppure di accoppiamento superficiale inferiore (vincolo bilatero, che invece si ottiene quando il contatto avviene in punti precisi). Esistono accoppiamenti di tipo sferico che consentono tre gradi di libertà per il moto relativo. Diversi tipi di vincoli e di contatti sono in grado di reggere diversi tipi di forze e a seconda del tipo di accoppiamento presente nel meccanismo si distinguono i sistemi articolati (che presentano accoppiamenti inferiori) e sistemi a camme (che presentano accoppiamenti superiori).

La gestione del movimento presenta ovviamente due diversi tipi di problemi: i problemi di sintesi del movimento e i problemi di analisi del movimento. I primi partono dalla legge del moto $y(t)$ e ricercano il meccanismo che la rende possibile, i secondi partono dal meccanismo e dalla legge di moto del movente e ricercano la legge di moto del cedente. Ovviamente queste due tipologie di problemi presentano difficoltà simmetriche. Affrontiamo ora il diagramma del movimento di un oggetto a partire dal grafico di figura 2 nel quale è indicato solamente il tempo t_s necessario alla salita e l'altezza h raggiunta.

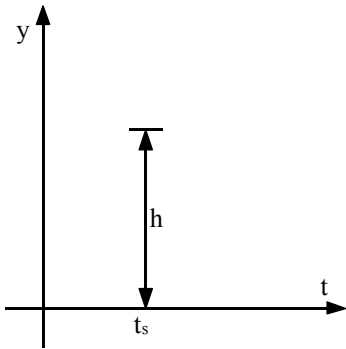


Figura 2

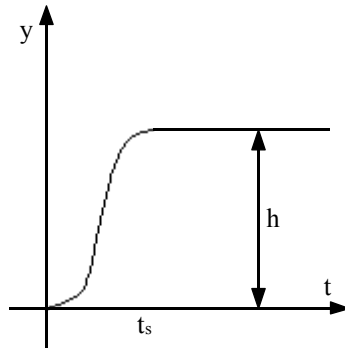


Figura 3

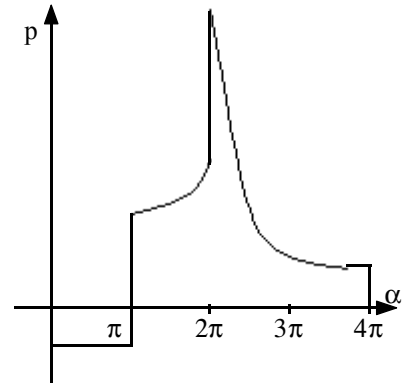


Figura 4

Ovviamente il passaggio all'altezza massima non è istantaneo e quindi un grafico più completo è quello mostrato in figura 3. una rappresentazione come quella accennata in questi due grafici è tipica dei motori a combustione: per i motori a quattro tempi si avrà un andamento della pressione come quello mostrato in figura 4, che si traduce nel diagramma delle alzate mostrato nelle figure 5 e 6 rispettivamente per la fase di aspirazione e di scarico.

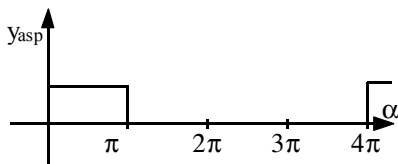


Figura 5

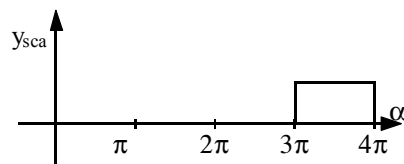


Figura 6

Si può notare come esista una zona chiamata di incrocio nella quale le due valvole sono aperte e quindi, a patto che ci siano gli adeguati raccordi, si può creare una zona di compromesso. Ovviamente, al fine di rendere il più possibile dolce l'andamento del cedente, le accelerazioni in gioco devono essere ridotte il più possibile e quindi si dovrà fare riferimento al diagramma della derivata seconda della legge del moto $y(t)$. Supponendo che la velocità angolare ω sia una costante si può esprimere la dipendenza dell'angolo dalla velocità tramite la relazione:

$$\alpha = a_0 + \omega t$$

che si può poi ridurre nel modo seguente:

$$\alpha = \omega t$$

Vista questa proporzionalità è possibile sfruttare una legge del tipo $y(\alpha)$ invece che $y(t)$; si avrà dunque:

$$\dot{y}(t) = \frac{dy(\alpha)}{dt} = \frac{dy(\alpha)}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \tau(\alpha)\omega$$

dove $\tau(\alpha)$ è il rapporto di trasmissione istantaneo. Per quanto riguarda la derivata seconda si avrà invece:

$$\ddot{y}(t) = \frac{d\tau}{d\alpha} \omega^2 + \tau \dot{\omega} = \frac{d\tau}{d\alpha} \omega^2 = \gamma(\alpha)$$

dove $\gamma(\alpha)$ prende il nome di accelerazione geometrica che può essere espressa nel modo seguente:

$$\gamma(\alpha) = \frac{d^2 y(\alpha)}{d\alpha^2}$$

Il diagramma di figura 3 può ora essere sostituito dal diagramma di figura 7; il diagramma delle accelerazioni sarà invece quello mostrato in figura 8; ovviamente l'area deve essere complessivamente nulla, deve infatti essere:

$$\int_0^{\alpha_s} \ddot{y}(\alpha) d\alpha = \dot{y}(\alpha) \Big|_0^{\alpha_s} = 0$$

In questo modo la velocità risulterà nulla sia all'inizio che alla fine.

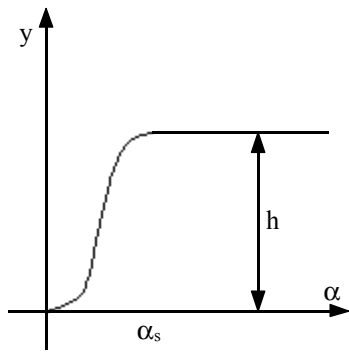


Figura 7

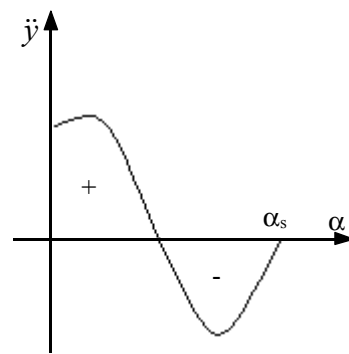
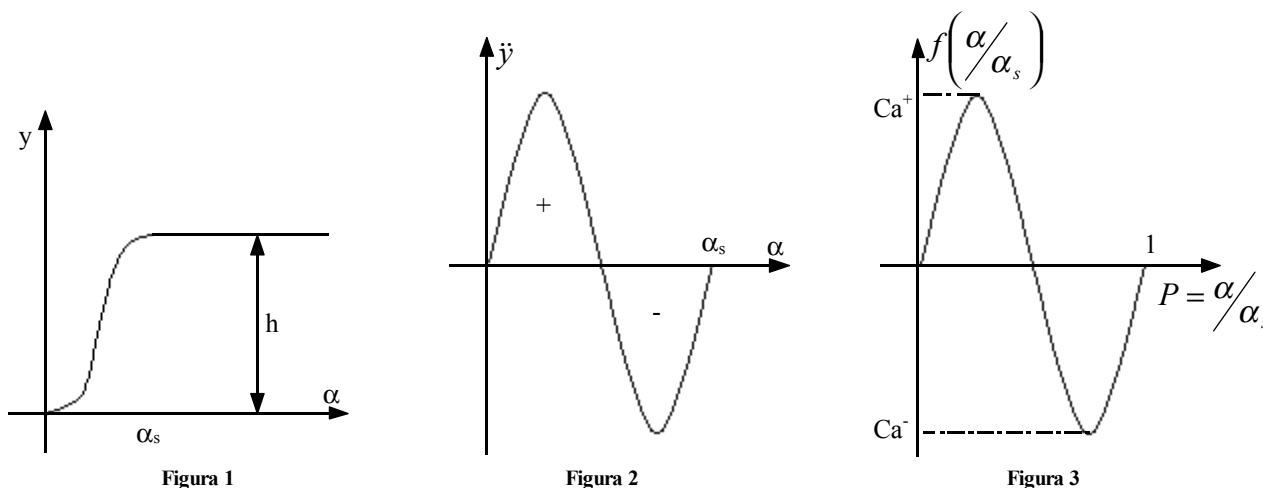


Figura 8

Movimenti alternativi e progressivi. Meccanismi a camme. La croce di Malta.

Movimenti alternativi e progressivi.

Torniamo ad occuparci del diagramma delle alzate e del diagramma delle accelerazioni mostrati rispettivamente nelle figure 1 e 2



Si era in precedenza giunti alle due seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\alpha_s} \ddot{y}(\alpha) \alpha d\alpha = [\dot{y}\alpha]_0^{\alpha_s} - \int_0^{\alpha_s} \dot{y} d\alpha = -h \\ \int_0^{\alpha_s} \ddot{y}(\alpha) d\alpha = \dot{y}(\alpha_s) - \dot{y}(0) = 0 \end{array} \right.$$

Interpretando queste relazioni dal punto di vista fisico si può pensare al diagramma delle accelerazioni come una rappresentazione della distribuzione di un carico lungo una trave di lunghezza α_s , la prima delle due equazioni viste rappresenta allora il momento dovuto all'azione del carico, mentre la seconda equazione fornisce informazioni sulla risultante che si viene a creare.

È ora possibile passare a dei diagrammi adimensionalizzati, ponendo:

$$h = \frac{1}{2} \alpha_s^2$$

dalla quale si ricava:

$$\alpha = \frac{2h}{t_s^2}$$

Per quanto riguarda invece l'accelerazione geometrica si avrà:

$$\gamma = \frac{2h}{\alpha_s^2}$$

Si avrà dunque:

$$\ddot{y} = \frac{h}{\alpha_s^2} f\left(\frac{\alpha}{\alpha_s}\right)$$

e quindi si può fare riferimento al diagramma di figura 3, nel quale troviamo riportati due termini, Ca^+ e Ca^- , il maggiore dei quali definisce il coefficiente di accelerazione Ca :

$$Ca = \max(Ca^+, |Ca^-|)$$

La legge del moto che rende minimo il coefficiente di accelerazione risulta essere quella caratterizzata dal diagramma simmetrico mostrato in figura 4; in questa situazione si avrà:

$$Ca = Ca^+ = |Ca^-|$$

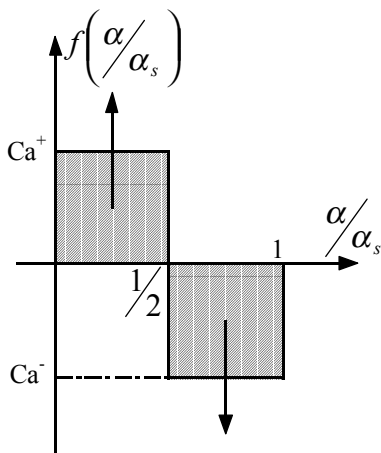


Figura 4

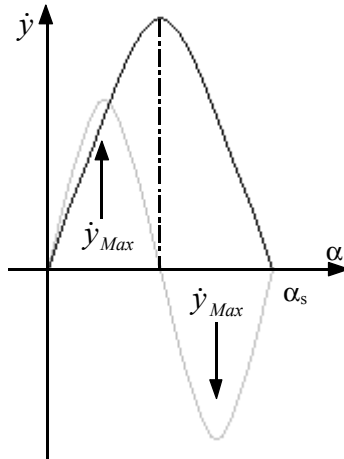


Figura 5

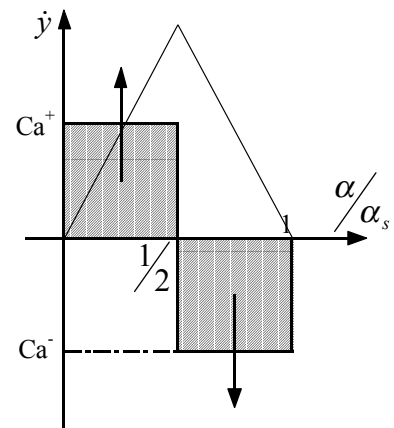


Figura 6

L'accelerazione massima è dunque espressa dalla relazione:

$$\ddot{y}_{Max} = Ca \frac{h}{\alpha_s^2}$$

Per quanto riguarda invece la velocità, bisognerà fare riferimento alla relazione seguente:

$$\dot{y}_{Max} = Cv \frac{h}{\alpha_s}$$

dove Cv prende il nome di coefficiente di velocità, mentre il rapporto h/α_s rappresenta la velocità di riferimento. Il diagramma di riferimento è in questo caso quello di figura 5 (ottenuto dall'integrazione di quello di figura 2); le due velocità massime indicate si comportano come delle forze concentrate applicate nei baricentri delle aree, sono equipollenti al carico ed uguali in modulo in modo da garantire una risultante nulla. Battezzando allora d la distanza tra i due baricentri, si dovrà avere:

$$\dot{y}_{Max} d = -h$$

ovvero, combinando le ultime due relazioni scritte:

$$Cv \frac{h}{\alpha_s} d = -h$$

da cui si ricava:

$$Cv = \frac{\alpha_s}{d}$$

Nel caso del diagramma simmetrico di figura 4, si avrà:

$$d = \frac{\alpha_s}{2}$$

e quindi:

$$Cv = 2$$

Il diagramma sarà allora quello mostrato in figura 6. Si può ora sfruttare la seguente relazione:

$$\dot{y}_{Max} = Ca \frac{\alpha_s}{2} \cdot \frac{h}{\alpha_s^2} = Cv \frac{h}{\alpha_s}$$

dalla quale risulta che:

$$Ca = 2Cv = 4$$

Ovviamente è anche possibile utilizzare grafici relativi ad accelerazioni costanti ma nei quali venga meno la caratteristica della simmetria, come nel caso mostrato in figura 7, nei quali c'è una maggior pendenza nel tratto in salita rispetto a quello in discesa. Ovviamente la distanza d rimane invariata e quindi rimane invariato Cv. Modificando il parametro ξ (in particolare facendolo tendere a 0) si può ottenere una situazione come quella mostrata in figura 8. Ovviamente quando ξ tende a zero l'andamento della velocità diventa triangolare con Cv sempre pari a 2 mentre il termine Ca^+ tende all'infinito; per evitare questo problema si impone solitamente come limite che ξ non sia mai inferiore ad $\alpha_s/4$, mentre rimane evidente che la situazione ottimale è quella con ξ pari ad $\alpha_s/2$. Integriamo ora ulteriormente il diagramma di figura 6 e otteniamo la sagoma di traslazione, ovvero il diagramma delle alzate, mostrato in figura 9.

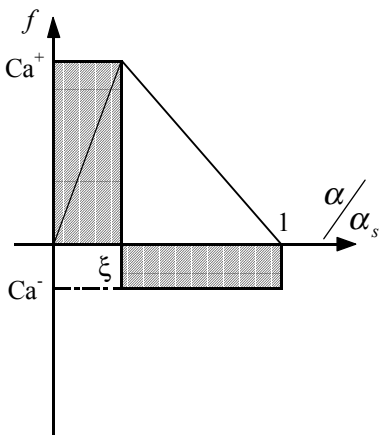


Figura 7

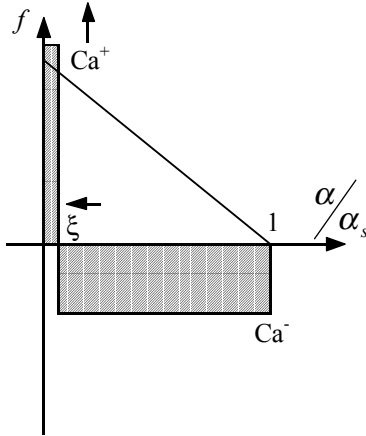


Figura 8

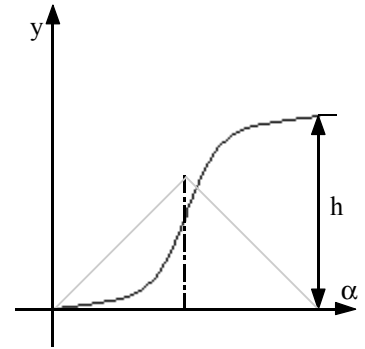


Figura 9

Meccanismi a camme.

Facendo nuovamente riferimento al caso del motore a quattro tempi, già accennato in precedenza, è possibile considerare nuovamente il grafico di figura 10 che si riferisce all'apertura delle valvole. L'apertura delle valvole viene realizzata tramite un sistema di punterie che segue il profilo della sagoma di traslazione equivalente, come mostrato in figura 11; per evitare poi che avvenga un distacco dovuto alle forze di inerzia, si utilizza una molla che preme il cedente sulla camma, ottenendo così la configurazione mostrata in figura 12

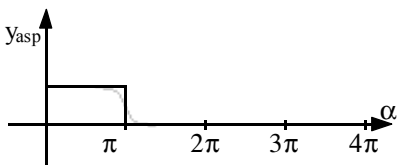


Figura 10

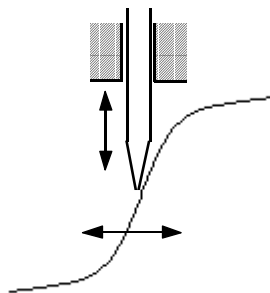


Figura 11

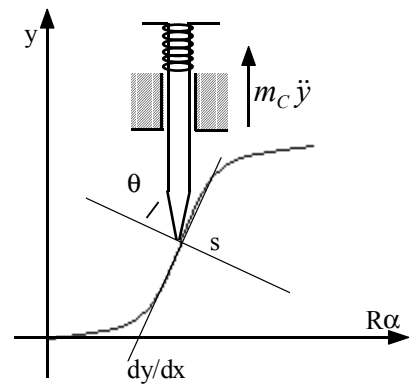


Figura 12

È da notare che l'asse delle ascisse di figura 12 presenta il termine $R\alpha$, dovuto al fatto che le camme sono solitamente poste su un albero, con sezione simile a quella mostrata in figura 13.

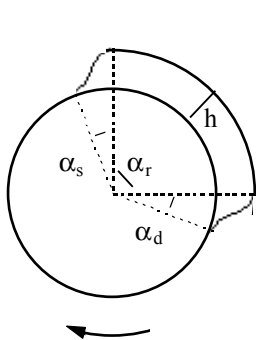


Figura 13

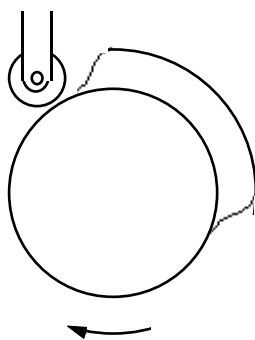


Figura 14

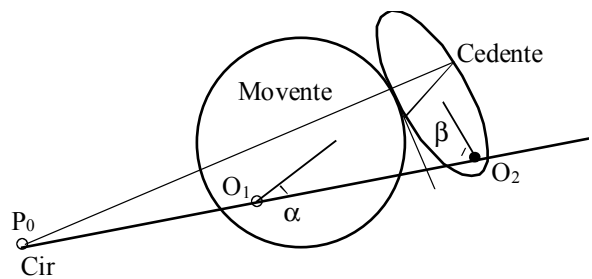


Figura 15

Si individuano, in questo modo, tre angoli caratteristici: l'angolo α_s di salita, l'angolo α_r di riposo (detto anche angolo di sosta) e l'angolo α_d di discesa. Si osservi poi come, detto R il raggio del cerchio di base, valga la seguente relazione:

$$dx = R d\alpha$$

e quindi si può individuare il massimo angolo di contatto tramite la relazione:

$$tg \vartheta_{Max} = \frac{dy}{Rd\alpha} \Big|_{Max} = \frac{1}{R} \dot{y}_{Max} = \frac{1}{R} C v \frac{h}{\alpha_s}$$

Si ha in questo modo la condizione di minimo schiacciamento, che coincide con la zona in prossimità dell'inversione dell'accelerazione.

Per evitare di avere pressione (e quindi usura) in un unico punto, l'utilizzo dei cedenti a rotella vengono spesso preferiti rispetto ai cedenti a punteria, ottenendo quindi strutture come quelle mostrate in figura 14. Una struttura ancora diversa è il cedente a piattello, mostrato in figura 15. facendo riferimento a tale figura si può osservare come debba essere:

$$v_{P_0O_1} = \omega_1 P_0O_1 = \omega_2 P_0O_2 = v_{P_0O_2}$$

da cui si ricava:

$$\tau(\alpha) = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{P_0O_1}{P_0O_2}$$

Essendo poi:

$$\tau = \frac{d\beta}{d\alpha}$$

si ricava:

$$\dot{\beta} = \tau(\alpha) \dot{\alpha}$$

e quindi:

$$\ddot{\beta} = \frac{d\tau}{d\alpha} \dot{\alpha} + \tau \ddot{\alpha}$$

La croce di Malta.

Un meccanismo particolarmente interessante è la cosiddetta croce di Malta, che si può vedere rappresentata in figura 16 e schematizzata in figura 17.

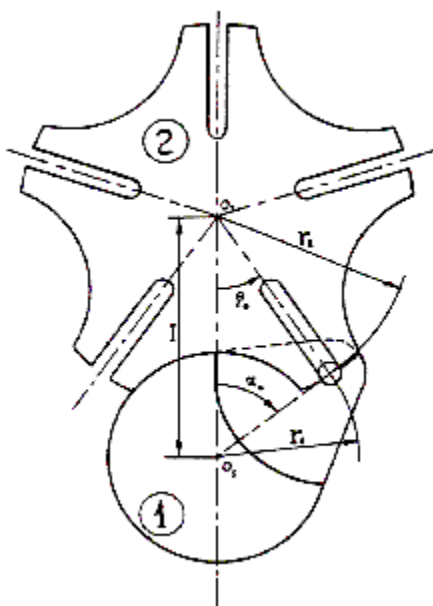


Figura 16

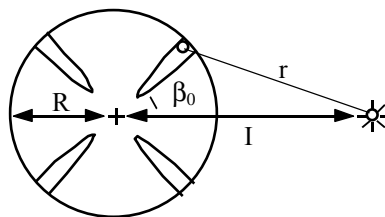


Figura 17

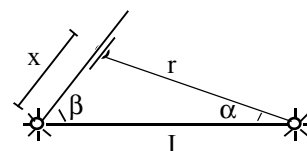


Figura 18

Detto n il numero delle scanalature (stazioni) si avrà:

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} \\ \frac{r}{R} = tg \beta_0 \\ I = \frac{r}{\sin \beta_0} \end{cases}$$

L'equazione di congruenza vettoriale, facendo riferimento allo schema cinematica di figura 18, sarà allora la seguente:

$$xe^{i\beta} + re^{i\alpha} = I$$

Proiettando dunque la relazione di congruenza vettoriale lungo le direzioni orizzontale e verticale si ottengono le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} r \cos \alpha + x \cos \beta = I \\ r \sin \alpha - x \sin \beta = 0 \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} x \sin \beta = r \sin \alpha \\ x \cos \beta = I - r \cos \alpha \end{cases}$$

Quadrando e sommando si sfrutta il teorema di Carnot ottenendo la seguente relazione:

$$x^2 = r^2 \sin^2 \alpha + I^2 - 2Ir \cos \alpha + r^2 \cos^2 \alpha = I^2 + r^2 - 2Ir \cos \alpha$$

dalla quale si ricava:

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{I^2 + r^2 - 2Ir \cos \alpha} \\ \operatorname{tg} \beta = \frac{2 \sin \alpha}{I - r \cos \alpha} \end{cases}$$

Derivando le equazioni si possono trovare le velocità lungo x e lungo β :

$$\begin{cases} \dot{x} \sin \beta + x \cos \beta \dot{\beta} = r \cos \alpha \dot{\alpha} \\ \dot{x} \cos \beta - x \sin \beta \dot{\beta} = r \sin \alpha \dot{\alpha} \end{cases}$$

dove x e β sono oramai noti e dove si supponga nota la velocità angolare $\dot{\alpha}$. Risolvendo con le regole di Kramer si possono allora ricavare le velocità:

$$\begin{cases} \dot{x} = r \sin(\alpha + \beta) \dot{\alpha} = \tau_x \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} = \frac{r \cos(\alpha + \beta)}{x} \dot{\alpha} = \tau_\beta \dot{\alpha} \end{cases}$$

Si può poi derivare ulteriormente per ricavare le accelerazioni:

$$\begin{cases} \ddot{x} \sin \beta + x \cos \beta \ddot{\beta} = -r \sin \alpha \dot{\alpha}^2 - \dot{x} \cos \beta \dot{\beta} - \dot{x} \cos \beta \dot{\beta} + x \sin \beta \dot{\beta}^2 + 2 \cos \alpha \ddot{\alpha} \\ \ddot{x} \cos \beta - x \sin \beta \ddot{\beta} = r \cos \alpha \dot{\alpha}^2 + 2 \sin \alpha \dot{\alpha} \dot{\alpha} + \dot{x} \sin \beta \dot{\beta} + \dot{x} \sin \beta \dot{\beta} + x \cos \beta \dot{\beta}^2 \end{cases}$$

Da quest'ultimo sistema, nel quale si possono riconoscere anche i termini legati all'accelerazione di Coriolis (il penultimo ed il terzultimo di entrambe le equazioni) si possono ricavare, una volta noti i termini precedenti ed assegnata l'accelerazione angolare $\ddot{\alpha}$, l'accelerazione relativa ad x e relativa a β .

Il quadrilatero articolato. Catene cinematiche.

Il quadrilatero articolato.

Il quadrilatero articolato, mostrato in figura 1, può essere considerato come l'origine di tutti i meccanismi.

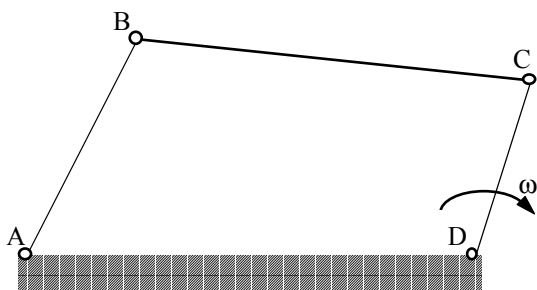


Figura 1

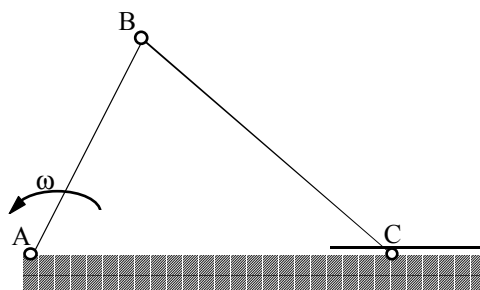


Figura 2

Per quanto riguarda la nomenclatura, le aste di cui è composta questa struttura si chiamano:

- biella: quando è possibile ruotare di 180°;
- bilanciere: quando ruota solamente di archi limitati (nel caso in questione l'asta AB);
- manovella: quando si tratta di un'asta di collegamento (come l'asta BC).

Il quadrilatero articolato può essere utilizzato per la descrizione di tantissimi meccanismi; l'archetipo del manovellismo, per esempio, è il classico meccanismo mostrato in figura 2, che può però essere rappresentato anche come si vede in figura 3.

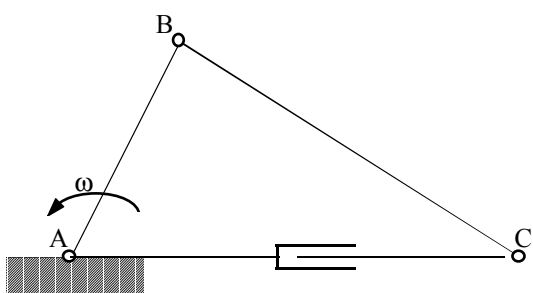


Figura 3

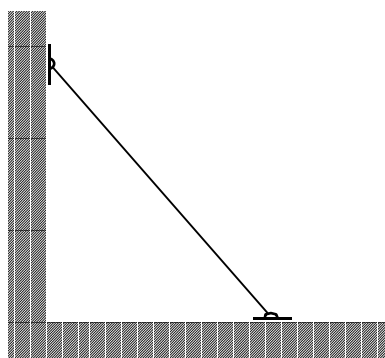


Figura 4

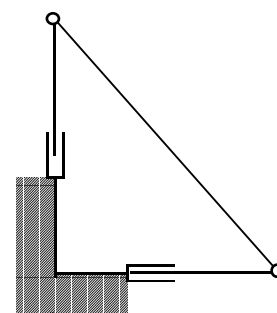


Figura 5

Si è così tornati ad avere un meccanismo con quattro aste, anche se una delle cerniere è andata all'infinito. Un altro meccanismo particolarmente famoso è quello mostrato in figura 4, che può anch'esso essere ridotto ad un quadrilatero articolato, come mostrato in figura 5, nel quale due delle cerniere sono andate all'infinito. Un altro sistema che può essere ricondotto ad un quadrilatero articolato è quello mostrato in figura 6, dove vediamo una piastrina triangolare sostenuta da due chiodi.

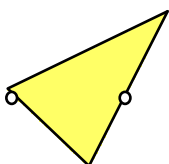


Figura 6

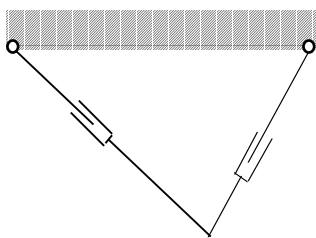


Figura 7

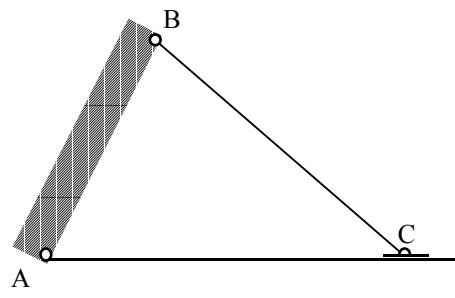


Figura 8

La relativa soluzione cinematica è quella mostrata in figura 7. Nel caso del cuneo, infine, la rispettiva soluzione cinematica corrisponderà ad un quadrilatero articolato con quattro cerniere all'infinito. Come si è visto nel caso delle

figure 5 e 7, dunque, un medesimo quadrilatero articolato può descrivere meccanismi differenti, a seconda di quali aste siano vincolate a terra e di quali siano libere; un discorso analogo può essere ripetuto nel caso del manovellismo. La struttura di figura 8 prende infatti il nome di glifo rotante mentre allungando il tratto AB si origina il glifo oscillante (di cui si vede uno schema in figura 9).

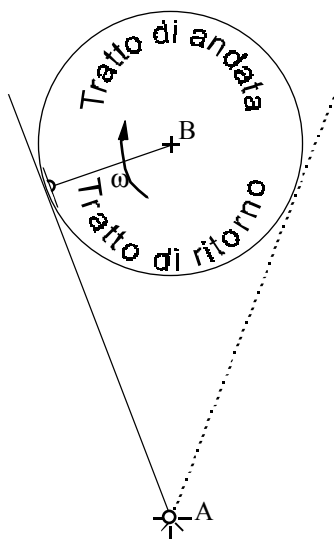


Figura 9

Meccanismi differenti possono essere realizzati mettendo in cascata diversi quadrilateri, fino ad ottenere meccanismo anche molto articolati e complessi.

Catene cinematiche.

L'analisi cinematica dei sistemi articolati prevede di valutare posizione, velocità ed accelerazione in funzione del movente; per quanto riguarda la determinazione della posizione si può fare inizialmente riferimento al grafico di figura 10 dove si vede un quadrilatero articolato in una posizione iniziale (in blu) e nella rispettiva posizione intrecciata (in rosso).

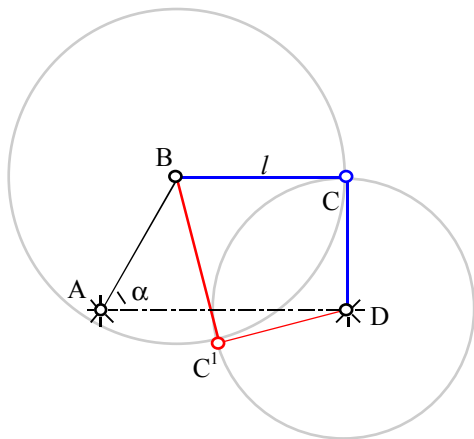


Figura 10

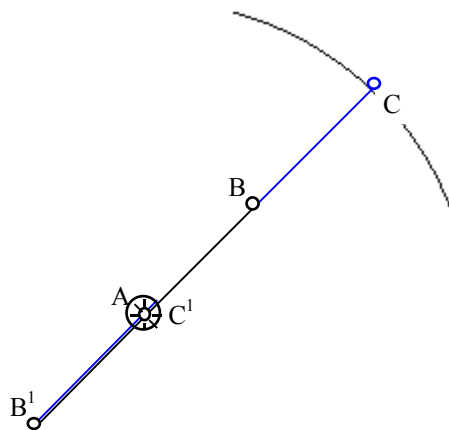


Figura 11

Ovviamente il punto C può spostarsi con continuità fino al punto C' solo se la circonferenza centrata in D interseca sia il cerchio interno che quello esterno, entrambi mostrati in figura 11 dove si può vedere la massima e la minima estensione; la zona possibile è solamente quella compresa tra le due circonferenze. Se la determinazione delle posizioni è piuttosto elementare, la determinazione delle velocità e delle accelerazioni può risultare decisamente più complessa. Si faccia dunque riferimento al manovellismo ordinario schematizzato in figura 12, che può essere affrontato sfruttando il metodo vettoriale.

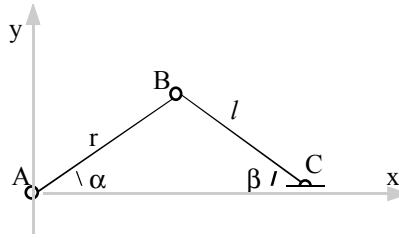


Figura 12

Se si suppongono le aste come dei vettori si può scrivere la seguente equazione vettoriale di congruenza:

$$x = ze^{i\alpha} + le^{i\beta}$$

che, proiettata lungo le direzioni di x e di y, permette di ottenere il seguente sistema:

$$\begin{cases} r \cos \alpha + l \cos \beta = x \\ r \sin \alpha = l \sin \beta \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} x - r \cos \alpha = l \cos \beta \\ r \sin \alpha = l \sin \beta \end{cases}$$

Elevando al quadrato entrambe le relazioni e sommandole tra di loro si ricava:

$$x^2 + r^2 - 2xr \cos \alpha = l^2$$

ovvero:

$$x^2 - 2xr \cos \alpha - l^2 + r^2 = 0$$

e quindi:

$$x = r \cos \alpha \pm \sqrt{r^2 \cos^2 \alpha + l^2 - r^2} = r \cos \alpha \pm l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha} \quad (1)$$

dove sia:

$$\lambda = r/l$$

Si può notare che il doppio segno è giustificato dal fatto che il meccanismo possa muoversi in due modi diversi. Dal rapporto tra le due equazioni dell'ultimo sistema scritto si ricava invece:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r \sin \alpha}{x - r \cos \alpha} \quad (2)$$

Si sono così ricavate le espressioni di $x(\alpha)$ e di $\beta(\alpha)$. Derivando il medesimo sistema si possono ricavare le velocità:

$$\begin{cases} \dot{x} + l \sin \beta \dot{\beta} = -r \sin \alpha \dot{\alpha} \\ l \cos \beta \dot{\beta} = r \cos \alpha \dot{\alpha} \end{cases}$$

Dalla seconda di queste due equazioni si ricava:

$$\dot{\beta} = \frac{r \cos \alpha}{l \cos \beta} \dot{\alpha} = \tau_p \dot{\alpha}$$

che, nota α' , permette di ricavare la velocità β' . Dalla prima equazione dell'ultimo sistema scritto si ricava invece:

$$\dot{x} = -r \sin \alpha \dot{\alpha} - l \sin \beta \dot{\beta} = -r(\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta) \dot{\alpha} = \tau_x \dot{\alpha}$$

Infine, si può derivare ulteriormente il sistema in analisi per trovare le accelerazioni:

$$\begin{cases} \ddot{x} + l \cos \beta \dot{\beta}^2 + l \sin \beta \ddot{\beta} = -r \cos \alpha \dot{\alpha}^2 - r \sin \alpha \ddot{\alpha} \\ -l \sin \beta \dot{\beta}^2 + l \cos \beta \ddot{\beta} = -r \sin \alpha \dot{\alpha}^2 + r \cos \alpha \ddot{\alpha} \end{cases}$$

Note dunque α , α' ed α'' , sono note posizioni, velocità e accelerazioni.

Soffermandosi ora, invece, sul quadrilatero articolato, si sfrutterà un metodo che non richiede l'approccio analitico; si faccia dunque riferimento al diagramma di figura 13 e per prima cosa si metta in evidenza il centro di istantanea rotazione. Ovviamente l'asta AD non lo possiede, per l'asta AB questo è rappresentato dal punto A, come per l'asta CD è rappresentato dal punto D; per l'asta BC, infine, il centro di istantanea rotazione è individuato dal punto di intersezione tra le rette perpendicolari alle velocità dei due punti, ovvero è il punto P_0 . La velocità del punto B può ora essere espressa a seconda del centro di istantanea rotazione che viene scelto; vedendo il punto B come appartenente all'asta AB si avrà:

$$v_B = \dot{\alpha} AB$$

mentre intendendolo come appartenente all'asta BC si potrà scrivere:

$$v_B = \dot{\beta}BP_0$$

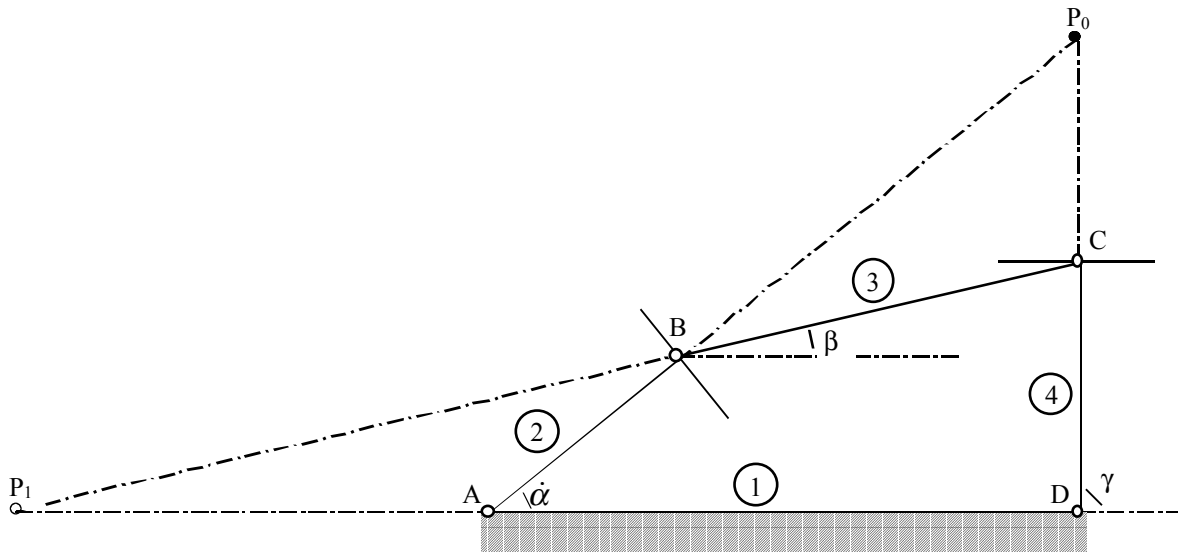


Figura 13

Combinando le due espressioni trovate per la velocità del punto B si può ricavare la velocità angolare $\dot{\beta}$:

$$\dot{\beta} = \dot{\alpha} \frac{AB}{BP_0}$$

Un qualunque punto Q posto sull'asta BC può a questo punto essere corredato dalla sua velocità, che sarà:

$$v_Q = \dot{\beta}QP_0$$

Per ricavare la velocità angolare $\dot{\gamma}$ dell'asta CD si può ora sfruttare il punto C; supponendo prima di vederlo come appartenente all'asta DC e poi come appartenente all'asta BC si possono ricavare le due seguenti espressioni della sua velocità:

$$\begin{cases} v_C = \dot{\gamma}CD \\ v_C = \dot{\beta}CP_0 \end{cases}$$

dalle quali si ricava:

$$\dot{\gamma} = \dot{\beta} \frac{CP_0}{CD}$$

Per trovare ora la velocità del punto P1, centro di istantanea rotazione dell'asta 2 rispetto all'asta 4, è possibile vederlo sia come solidale all'asta 2 che come solidale all'asta 4, ottenendo le due seguenti espressioni:

$$\begin{cases} v_{P_1} = \dot{\alpha}P_1A \\ v_{P_1} = \dot{\gamma}P_1D \end{cases}$$

Siccome poi il punto P1 è unico, le due espressioni della sua velocità dovranno coincidere, e quindi si può porre:

$$\dot{\alpha}P_1A = \dot{\gamma}P_1D$$

ottenendo così il rapporto di trasmissione tra le aste 2 e 4:

$$\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\alpha}} = \frac{P_1A}{P_1D}$$

Un secondo approccio consiste nel descrivere i punti di contatto tra le aste come punti doppi, che possono quindi appartenere ad una metà o all'altra del meccanismo. Si faccia dunque riferimento al diagramma di figura 14 nel quale sono stati indicati due sistemi di riferimento: uno fermo solidale con l'asta 1 ed uno mobile, solidale con la cerniera B ma che non può subire rotazioni. Si sfrutta il teorema di composizione dei moti relativi e quindi il moto del punto C può essere indicato come la somma di un moto relativo e di un moto di trascinamento, ovvero sarà valida la seguente relazione:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_r + \vec{v}_t$$

È anche possibile costruire una tabella come la tabella 1 che riporta i moduli e le direzioni delle velocità in gioco.

$$\vec{v}_C = \vec{v}_t + \vec{v}_r$$

γ_{CD}	α_{BA}	β_{BC}	<i>Moduli</i>
\perp_{CD}	\perp_{AB}	\perp_{BC}	<i>Direzioni</i>

Tabella 1

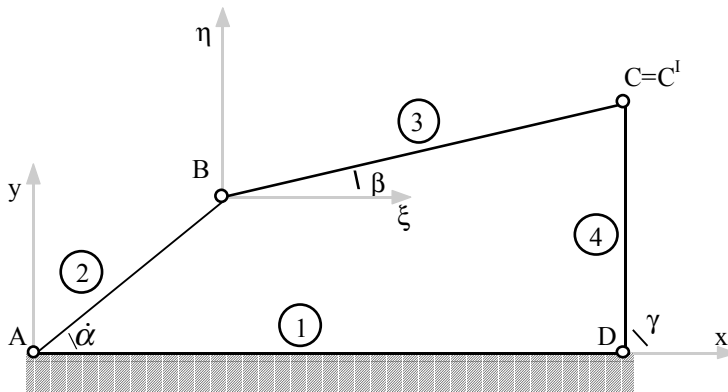


Figura 14

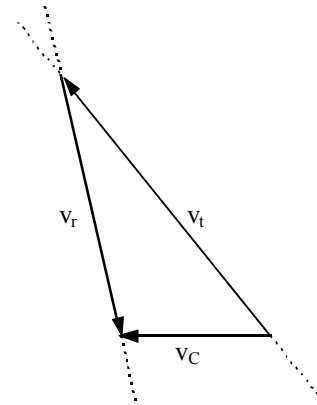


Figura 15

Qualora i dati a disposizione permettano di riempire almeno 4 delle 6 caselle della tabella 1, il problema è risolto in quanto è possibile ricavare tutte le velocità; se per esempio fosse assegnato solamente α (e quindi β e γ fossero ignoti) il problema potrebbe essere risolto sfruttando il metodo della poligonale, che permetterebbe di ottenere il triangolo mostrato in figura 15. Ritornando al problema dal quale si era partiti, si può ovviamente notare come sia:

$$\begin{cases} \vec{v}_t = \vec{v}_B \\ \vec{v}_r = \vec{v}_{CB} \end{cases}$$

Un discorso identico può essere fatto per le accelerazioni, nel qual caso sarà però necessario aggiungere al conto anche l'accelerazione di Coriolis:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_{Co} \quad (3)$$

Si ricordi che l'accelerazione di Coriolis è definita come:

$$\vec{a}_{Co} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

dove Ω sia la velocità angolare della terna traslante. Nel caso che si sta studiando la terna traslante è stata imposta incapace di subire rotazioni e quindi l'accelerazione di Coriolis dovrà essere per forza nulla; siccome poi la terna traslante è stata centrata nel punto B, l'accelerazione di trascinamento corrisponderà con l'accelerazione del punto B mentre l'accelerazione relativa sarà l'accelerazione \mathbf{a}_{BC} . La relazione (3) può allora essere riscritta nel modo seguente:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{BC}$$

Le accelerazioni, inoltre, sono sempre composte da una componente normale e da una componente tangenziale, e quindi più esplicitamente si avrà:

$$\vec{a}_C^n + \vec{a}_C^t = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^t + \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_{BC}^t$$

Anche in questo caso sarà possibile creare una tabella come la tabella 2, che esprima moduli e direzioni dei vari componenti:

\mathbf{a}_C^n	+	\mathbf{a}_C^t	=	\mathbf{a}_B^n	+	\mathbf{a}_B^t	+	\mathbf{a}_{CB}^n	+	\mathbf{a}_{CB}^t	<i>Moduli</i>
v_C^2/CD		γ_{CD}		v_B^2/AB		α_{BA}		v_{CB}^2/CB		β_{CB}	
$//CD$		\perp_{CD}		$//BA$		\perp_{BA}		$//CB$		\perp_{CB}	<i>Direzioni</i>

Tabella 2

Possiamo notare che le direzioni delle accelerazioni sono tutte note in quanto è già stato a questo punto risolto il problema delle velocità; per lo stesso motivo sono noti anche tutti i moduli delle accelerazioni normali; per quanto riguarda i moduli delle accelerazioni tangenziali, questa dipende dai dati forniti con il problema; qualora fosse stato assegnato solamente α , si sarebbe stati comunque in grado di ottenere gli altri moduli sfruttando ancora una volta il metodo della poligonale. Si potevano allora ricavare anche le accelerazioni β e γ . A questo punto sarebbe possibile ricavare l'accelerazione normale e tangenziale relativa a qualunque punto Q della biella, si potrebbe infatti costruire una tabella come la tabella 3 dove è tutto noto tranne i moduli delle accelerazioni relative al punto Q, e quindi ancora sfruttando il metodo della poligonale il problema sarebbe risolto.

$$\mathbf{a}_Q^n + \mathbf{a}_Q^t = \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^t + \mathbf{a}_{QB}^n + \mathbf{a}_{QB}^t$$

?	?	v_B^2/AB	αBA	v_{QB}^2/QB	γQB	<i>Moduli</i>
$//QP_0$	$\perp QP_0$	$//BA$	$\perp BA$	$//QB$	$\perp QB$	<i>Direzioni</i>

Tabella 3