Appunti dal corso di Comunicazioni Elettriche tenuto dal prof. Bienati per gli studenti dei D.U. in Ing. Elettronica, Informatica, Biomedica, delle Telecomunicazioni A.A. 2000-2001

1. Introduzione ai sistemi di comunicazione e alla rappresentazione dei segnali.

POLITECNICO MILANO

1. Introduzione.

1.1. Cos'è un sistema di comunicazione.

Lo scopo di un sistema di comunicazione è quello di consentire la trasmissione a distanza di informazione. Il requisito fondamentale che un sistema di comunicazione deve soddisfare è che la trasmissione avvenga in modo efficiente (rispettando vincoli su costi e risorse utilizzate) ed affidabile (ovvero l'informazione ricevuta deve essere il più possibile simile a quella trasmessa). Il progetto di un sistema di comunicazione è perciò frutto di un compromesso fra costo del sistema e qualità del servizio offerto. Le sorgenti dell'informazione trasmessa possono essere le più disparate, per esempio l'uomo (telefonia), dei sensori che misurano grandezze fisiche (sonde spaziali), delle scene riprese da una telecamera, dei numeri (transazioni bancarie). Indipendentemente dalla natura della sorgente dell'informazione da trasmettere, un sistema di comunicazione deve convogliare tale informazione su un supporto fisico (es. piccione viaggiatore, segnali di fumo, segnali Morse lungo una linea di trasmissione). Nel caso delle ***comunicazioni elettriche*** i supporti utilizzati sono quelli che consentono la trasmissione in forma elettromagnetica: cavi in rame (linee di trasmissione), antenne, fibre ottiche. In genere è possibile descrivere un sistema di comunicazioni elettriche mediante uno schema a blocchi composto da: trasmettitore, canale di comunicazione, ricevitore.

1.2. Elementi di un sistema di comunicazione.

- **Trasmettitore**. Ha lo scopo di convertire l'informazione emessa dalla sorgente (che in genere non è di natura elettrica, per es. la voce umana) nella variazione di una grandezza elettrica (tensione o corrente). La variazione della grandezza elettrica così ottenuta prende il nome di *segnale*. Il segnale ricavato dalla sorgente normalmente deve essere ulteriormente trasformato per poter assumere la forma adatta ad essere inviata lungo il canale di comunicazione. Per esempio nel caso della telefonia cellulare il microfono, che converte la voce in segnale elettrico, non è direttamente collegato all'antenna. Tale adattamento prende il nome di *modulazione*.
- **Canale di comunicazione**. È il supporto fisico nel quale vengono inviati i segnali e costituisce la fonte principale dei vincoli a cui deve soddisfare un sistema di comunicazioni. Infatti lungo il canale il segnale può essere *distorto*, ovvero subire delle modificazioni indesiderate, per cui il segnale ricevuto è diverso dal segnale trasmesso; può subire delle *interferenze*, si pensi al caso delle comunicazioni radio. Le interferenze che si sovrappongono al segnale originario vengono trattate come un segnale aggiuntivo denominato rumore. Il *rumore* è un segnale di tipo aleatorio (*casuale*). Il canale inoltre stabilisce i limiti alla quantità di informazione massima

che può essere inviata nell'unità di tempo (es. velocità con cui si scarica una pagina web).

- **Ricevitore**. Esegue le operazioni inverse del trasmettitore, per cui dapprima rimuove la modulazione e quindi ripristina l'informazione nella sua forma originale. Il progetto del ricevitore deve tener conto delle alterazioni che il segnale trasmesso subisce lungo il canale (distorsione e rumore).
- Progetto di un S.d.C. Assegnato il canale, il tipo di trasmettitore ed il tipo di ricevitore, si determinano i parametri di trasmettitore e ricevitore in modo da soddisfare i requisiti sulla qualità del servizio. Per esempio, quanta potenza deve trasmettere un telefonino? Ad una bassa potenza corrisponderanno batterie di piccole dimensioni e bassa qualità di trasmissione; ad un'alta potenza corrisponderanno invece batterie più grandi ed una qualità migliore.
- Analisi di un S.d.C. A partire dalle caratteristiche di canale, trasmettitore e ricevitore, si vogliono stabilire le prestazioni del sistema. Ad esempio si può stabilire la velocità massima di download di un file dal web.

Poiché in ultima analisi un sistema di comunicazione è utilizzato per trasmettere dei segnali, le loro analisi e sintesi devono tener conto del tipo e delle caratteristiche dei segnali che si vogliono trasmettere.

1.3. Segnali e loro classificazione.

Un segnale è matematicamente descritto come un funzione del tempo: ad ogni istante di tempo t la funzione che rappresenta il segnale s assume un solo valore s(t). Il valore assunto dal segnale può essere un numero reale oppure complesso; questo avviene però solo nell'astrazione matematica poiché non è fisicamente misurabile un segnale complesso.

1.4. Segnali periodici e non periodici.

Un segnale g(t) è detto periodico se la funzione che lo rappresenta soddisfa la condizione:

$$g(t) = g(t + T_0)$$

per ogni possibile istante t. T_0 è una costante (che ha le dimensioni di un tempo) che prende il nome di ***periodo***. Un segnale che non soddisfa la suddetta condizione per nessun valore di T_0 finito è detto *non periodico*.

Es. Segnale: $g(t) = sin(2\pi ft)$

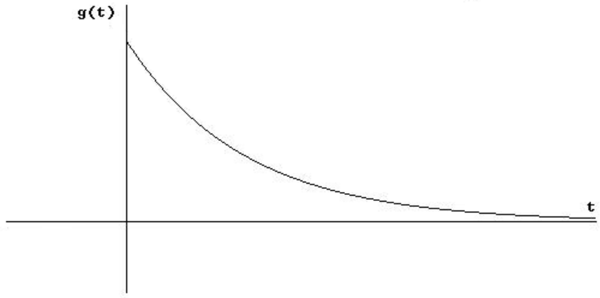
Si dimostra che g(t) è un segnale periodico, posto $T_0=1/f$ risulta:

$$g(t + T_0) = sin\left(2\pi f(t + T_0)\right) = sin\left(2\pi ft + 2\pi f\frac{1}{f}\right) = sin(2\pi ft + 2\pi) =$$

$$= sin(2\pi ft) = g(t)$$

N.B. <u>I segnali sinusoidali sono alla base della rappresentazione di tutti segnali periodici</u>.

Es. Segnale non periodico: $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-t} & t \geq 0 \end{cases}$



1.5. Segnali deterministici e segnali casuali.

Un segnale è detto deterministici quando il valore assunto è perfettamente noto per ogni possibile istante di tempo t. (es. $g(t) = sin(2\pi ft)$). Un segnale è detto casuale quando non è possibile descrivere in forma matematica il suo andamento prima di averlo osservato.

Es. Si supponga di misurare la tensione all'uscita di un microfono in un esperimento in cui più persone differenti pronunciano la medesima parola. Benché la parola sia la stessa non è possibile:
- trovare una legge matematica che rappresenti esattamente i valori assunti dal segnale;
- dire che per 2 persone differenti si misura lo stesso segnale;

Ciononostante si intuisce che, essendo stata pronunciata la stessa parola da tutti, i segnali misurati <u>devono</u> avere delle caratteristiche comuni.

1.6. Segnali a energia finita e segnali a potenza finita.

In un sistema di comunicazione un segnale corrisponde ad una variazione di tensione o di corrente. Consideriamo una tensione *v(t)* applicata ad un resistore di resistenza R che sarà attraversato da una corrente *i(t)*= *v(t)*/R. La potenza istantanea dissipata dal resistore sarà:

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} = R \cdot i^2(t)$$

In entrambi i casi la potenza dissipata dipende dal quadrato del segnale. Per convenzione si assume R=1Ω, per cui la potenza istantanea di un segnale *w(t)* è data da:

$$p_w(t) = w^2(t)$$

A partire da questa definizione si definisce l'energia totale di un segnale *g(t)* come:

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,dt$$

Mentre si definisce la potenza media del segnale come:

$$P_g = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} g^2(t)\,dt$$

- <u>Un segnale è detto ad energia finita se e solo se $0<E<\infty$.</u>

- Un segnale è detto a potenza finita se e solo se $0<P<\infty$.

Valgono le seguenti osservazioni:

- un segnale ad energia finita ha potenza media nulla;
- un segnale a potenza media finita ha energia infinita;
- segnali periodici e segnali casuali sono segnali a potenza finita;
- segnali deterministici non periodici hanno energia finita.

Es. Si consideri il seguente segnale *s(t)* non periodico:

$$s(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-t} & t\geq 0\end{cases} \qquad s^2(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-2t} & t\geq 0\end{cases}$$

Energia del segnale:

$$E_s=\int_{-\infty}^{+\infty}s^2(t)\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-2t}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-u}\,du=-\frac{1}{2}\left[e^{-u}\right]_{u=0}^{u=+\infty}=\frac{1}{2}$$

Potenza media del segnale:

$$P_s=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}s^2(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^{+T}e^{-2t}\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\int_0^{\frac{T}{2}}e^{-u}\,du=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{4T}\left[e^{-u}\right]_0^{\frac{T}{2}}\right)=\lim_{T\to\infty}\frac{1-e^{-\frac{T}{2}}}{4T}=0$$

Es. Si consideri ora il seguente segnale periodico sinusoidale:

$$s(t)=A\cdot sin(2\pi ft)$$

Ricordando che $sin^2\alpha=\dfrac{1-cos\,2\alpha}{2}$ si calcola la potenza del segnale:

$$\int_{-T}^{+T}s^2(t)\,dt=A^2\int_{-T}^{+T}sin^2(2\pi ft)\,dt=A^2\int_{-T}^{+T}\frac{1-cos(4\pi ft)}{2}\,dt=$$

$$=A^2\int_{-T}^{+T}\frac{1}{2}\,dt-\frac{A^2}{2}\int_{-T}^{+T}cos(4\pi ft)\,dt=A^2T-\frac{A^2}{2}\frac{1}{4\pi f}\left[sin(4\pi ft\right]_{-T}^{+T}=$$

$$=A^2T-\frac{A^2}{8\pi f}2\,sin(4\pi fT)$$

$$P_s=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}s^2(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left(A^2T-\frac{A^2}{4\pi f}sin(4\pi fT)\right)=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{A^2}{2}\right)-\frac{A^2}{8\pi f}\lim_{T\to\infty}\left(\frac{sin(4\pi fT)}{T}\right)=\frac{A^2}{2}$$

La potenza media della sinusoide non dipende dalla sua frequenza.

Ess. Calcolare l'energia e la potenza media del segnale:

$$h(t)=\begin{cases}e^{-t} & t\geq 0\\ e^{t} & t<0\end{cases}$$

Si ricorda che: $a < b < c \Rightarrow \int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

Soluzioni: *E=1 ; P=0*

1.7. Segnali continui e segnali discreti.

Un segnale continuo è un segnale la cui ampiezza varia con continuità rispetto al tempo.

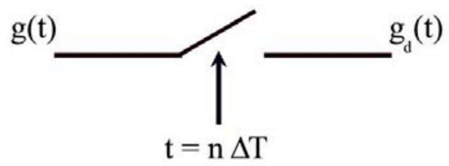
Es. $s(t) = sin(2\pi ft) \qquad t \in \Re$

Un segnale discreto è un segnale che è diverso da 0 solo in istanti di tempo ben definiti.

Es. $$s_d(t) = \begin{cases} sin(2\pi ft) & t = n \cdot \Delta T; n \in N, \Delta T\ costante \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

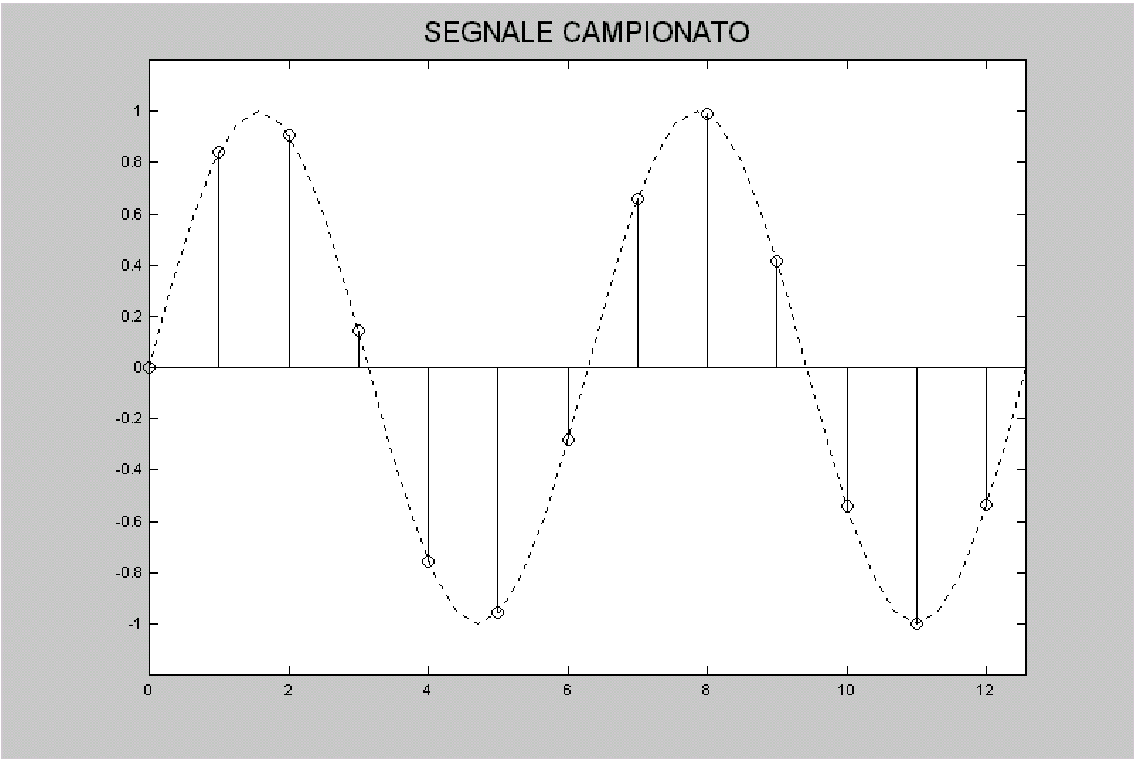
I segnali discreti possono essere ottenuti da quelli continui con l'operazione di campionamento. A patto che ΔT (intervallo di campionamento) sia sufficientemente piccolo (vedremo in seguito quanto), *g(t)* può essere ricostruito a partire da $g_d(t)$.

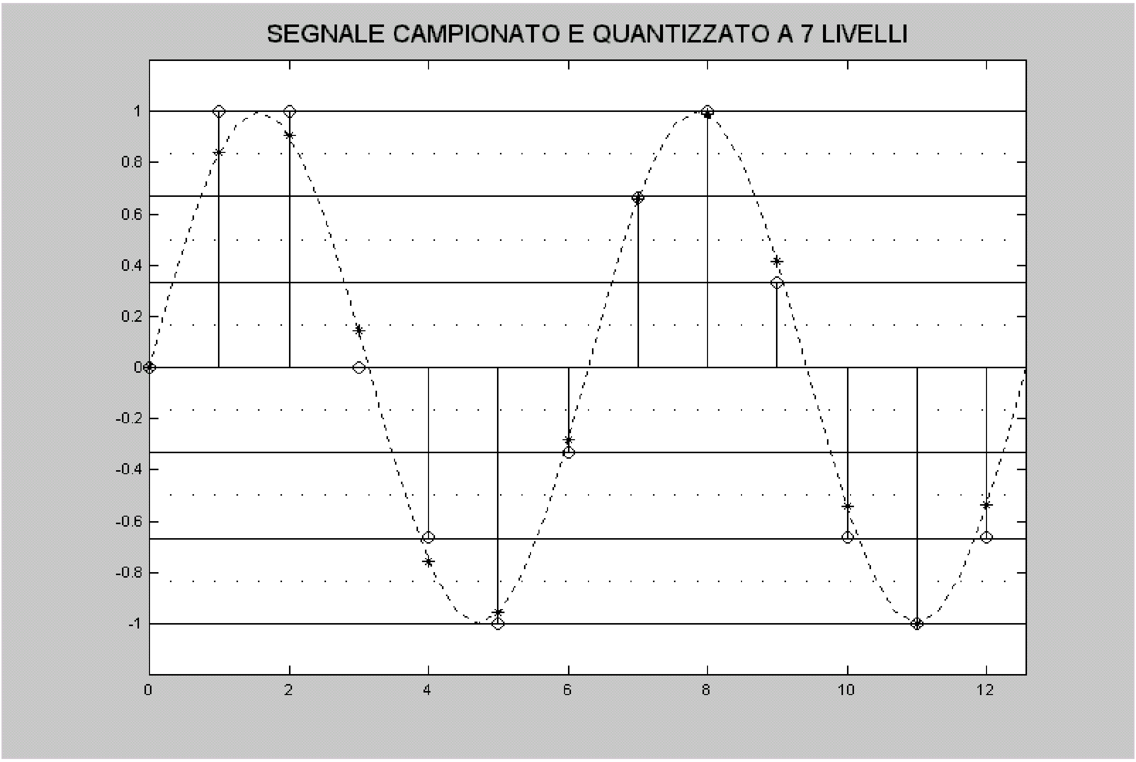
Un segnale discreto è detto quantizzato se la sua ampiezza può assumere solo un numero finito di valori. L'operazione che permette di passare da un segnale discreto ad un segnale discreto quantizzato è detta quantizzazione. La quantizzazione è un'operazione non reversibile, in quanto l'ampiezza di ciascun campione originale viene approssimata con il livello più vicino per cui non è più possibile ricostruire esattamente i campioni originali.



Di seguito viene mostrato un segnale sinusoidale che viene prima campionato con intervallo di campionamento costante ΔT=1, poi quantizzato su L=7 livelli con un passo di quantizzazione pari a:

$$q = \frac{V_{MAX} - V_{MIN}}{L-1} = \frac{1-(-1)}{7-1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$


SEGNALE CAMPIONATO
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
2
4
6
8
10
12

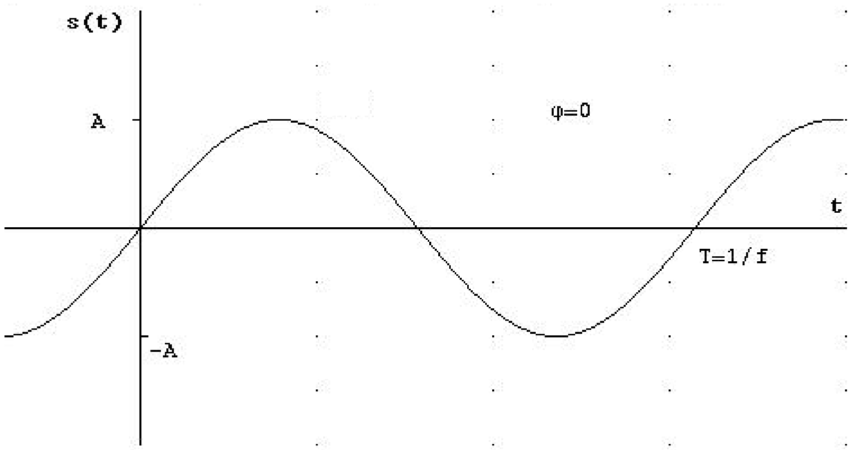

SEGNALE CAMPIONATO E QUANTIZZATO A 7 LIVELLI
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
2
4
6
8
10
12

2. Rappresentazione dei segnali periodici nel dominio della frequenza.

2.1. Segnali sinusoidali.

Un generico segnale sinusoidale assume la forma:

$$s(t) = A \cdot sin(2\pi ft + \varphi_0)$$



dove A è l'ampiezza massima del segnale sinusoidale nel tempo, *f* è la sua frequenza (legata al periodo dalla relazione T=1/*f*) e φ_0 la fase iniziale (per t=0). Andando ad analizzare le dimensioni di questi parametri abbiamo che [*f*]=Hz (herz); [T]=s; φ_0 è adimensionale. Si noti che all'aumentare della frequenza si riduce il periodo ed il segnale *varia* più rapidamente.

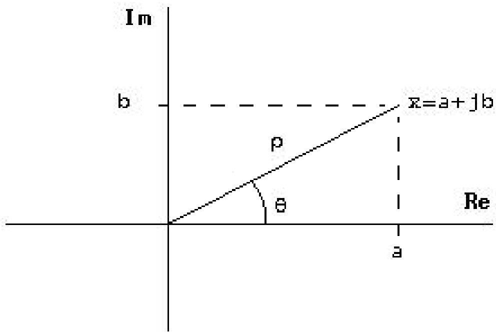
2.2. Numeri complessi.

Un numero complesso *x* consiste in una coppia di numeri reali:

$$x = a + jb$$

$$j = \sqrt{-1}$$

a è detta parte reale di *x* (*a* = *Re{x}*), *b* invece parte immaginaria (*b* = *Im{x}*). Particolare importanza riveste la *j* detta unità immaginaria (su alcuni testi indicata con *i*). Un numero complesso può essere rappresentato come un vettore nel piano di Gauss. La rappresentazione di *x* vista ora si dice in forma cartesiana. Un numero complesso *x*



può essere rappresentato in forma polare introducendo modulo e fase del vettore complesso *x*:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} & \textit{modulo} \\ \vartheta = arctg\left(\dfrac{b}{a}\right) & \textit{fase} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \rho \cdot cos\vartheta \\ b = \rho \cdot sin\vartheta \end{cases}$$

$$x = \rho(cos\vartheta + j\,sin\vartheta)$$

Prendendo in considerazione la formula di Eulero $e^{j\vartheta} = cos\vartheta + j\,sin\vartheta$ si giunge alla rappresentazione esponenziale di un numero complesso:

$$x = a + jb = \rho(cos\vartheta + j\,sin\vartheta) = \rho \cdot e^{j\vartheta}$$

Es. Somma di numeri complessi.

$x = a + jb$

$y = c + jd$

$z = x + y = (a + c) + j(b + d)$

Es. Prodotto di numeri complessi.

$x = a + jb = \rho e^{j\vartheta}$

$y = c + jd = \sigma e^{j\varphi}$

$z = x \cdot y = ac - bd + j(bc + ad) = \rho\sigma \cdot e^{j(\vartheta + \varphi)}$

2.3. Rappresentazione complessa di sinusoidi.

Si considerino ora le seguenti formule derivate dalla formula di Eulero:

$$cos\vartheta = \frac{e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta}}{2} \qquad sin\vartheta = \frac{e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta}}{2j}$$

ed un generico segnale complesso:

$$x(t) = A \cdot e^{j(2\pi ft + \varphi_0)}$$

x(t) può essere rappresentato nel piano di Gauss come un vettore rotante con le seguenti caratteristiche:

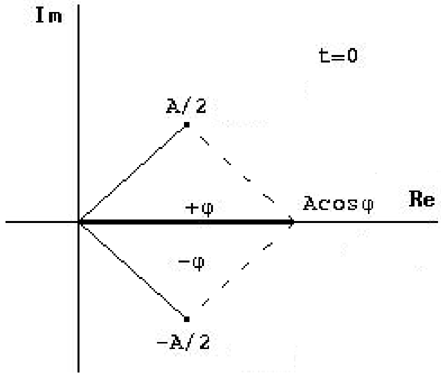
- velocità angolare costante pari a $\omega = 2\pi\, f \quad \left[\dfrac{rad}{s}\right]$;
- verso di rotazione antiorario;
- modulo (lunghezza del vettore) costante pari ad A.

Sviluppando il segnale x(t) in forma polare otteniamo:

$$x(t) = A \cdot e^{j(2\pi ft + \varphi_0)} = A\big(cos(2\pi ft + \varphi_0) + j\,sin(2\pi ft + \varphi_0)\big)$$

Si osservi come ogni sinusoide possa essere rappresentata come la somma di due vettori rotanti (*e quindi rappresentabili tramite numeri complessi!*) che ruotano alla medesima velocità ma con verso opposto.

$$s(t) = A \cdot cos(2\pi ft + \varphi_0) = \frac{A}{2}\left(e^{j(2\pi ft + \varphi_0)} + e^{-j(2\pi ft + \varphi_0)}\right)$$



Si deduce quindi che un generico segnale sinusoidale *s(t)* è ben rappresentato dalla parte reale di un vettore complesso:

$$s(t) = A \cdot cos(2\pi ft + \varphi_0) = Re\left\{A \cdot e^{j(2\pi ft + \varphi_0)}\right\}$$

2.4. Sviluppo in serie di Fourier di segnali periodici.

È possibile dimostrare che un segnale periodico di periodo T_0 può essere rappresentato attraverso la somma di infinite sinusoidi (armoniche) aventi frequenze pari a multipli interi di f_0=1/T_0 (frequenza dell'armonica fondamentale). Prendiamo in considerazione un generico segnale periodico:

$$s(t) = s(t + T_0) \qquad \forall t, T_0\ costante$$

Lo sviluppo in serie di Fourier del segnale *s(t)* è definito dalla serie:

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right)$$

Il termine A_0 esprime il valore medio del segnale:

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t)dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t)dt$$

Mentre i coefficienti A_n e B_n sono dati da:

$$A_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} s(t) \cdot cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} s(t) \cdot sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt$$

Utilizzando la rappresentazione complessa delle sinusoidi si ottiene una nuova forma della serie di Fourier che può risultare più agevole da utilizzare:

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n C_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

dove i coefficienti C_n sono dati da:

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t)\cdot e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t)\cdot cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)dt - \frac{j}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t)\cdot sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)dt$$

mentre C_0 continua a rappresentare il valore medio del segnale:

$$C_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t)\,dt$$

Proprietà della serie di Fourier:

- se il segnale *s(t)* è reale allora $C_{-n}=C_n^*$ con $n>0$. Si ricorda la definizione di complesso coniugato di $x\in C$: $x = a + jb \Rightarrow x^* = a - jb$.
- La potenza media del segnale *s(t)* può essere espressa come:

$$P_s = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s^2(t)\,dt = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left|C_n\right|^2$$

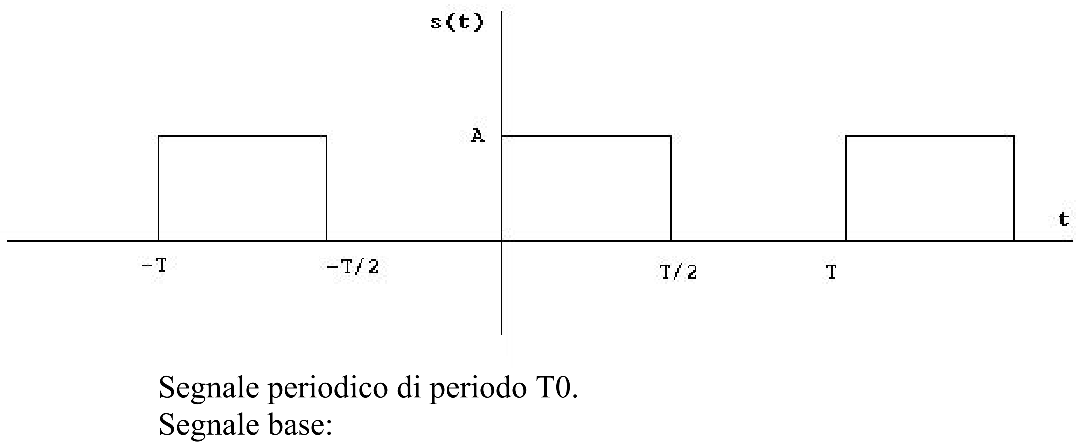
  dove si ricorda che il modulo di un numero complesso è definito come:

$$x = a + jb \Rightarrow |x| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Esiste una corrispondenza biunivoca tra *s(t)* e $\{C_n\}$: ad ogni segnale *s(t)* corrisponde una ed una sola successione $\{C_n\}$ (spettro del segnale) e viceversa. In altre parole *s(t)* può essere esattamente ricostruito a partire da $\{C_n\}$.

Lo sviluppo in serie di Fourier di segnali periodici è utile per stabilire come si modifica un segnale quando attraversa un canale di comunicazione: normalmente è molto più semplice determinare come si modifica lo spettro $\{C_n\}$ anziché considerare direttamente il segnale nel dominio del tempo *s(t)*.

Es. Scomporre in serie di Fourier il seguente segnale periodico:



Segnale periodico di periodo T0.
Segnale base:

$$s_{T_0}(t) = \begin{cases} A & 0 \le t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \frac{T_0}{2} \le t < T_0 \end{cases}$$

Valore medio del segnale:

$$C_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} s_{T_0}(t)\,dt = \frac{A}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} dt = \frac{A}{2}$$

Coefficienti della serie:

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} s_{T_0}(t)\, e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}\,dt = \frac{A}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}\,dt =$$

$$= \frac{A}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)dt - \frac{jA}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)dt = \frac{A}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}\,dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u = -j2\pi\frac{n}{T_0}t \\ du = -j2\pi\frac{n}{T_0}dt \end{bmatrix} = \frac{A}{T_0}\cdot\frac{T_0}{-j2\pi n}\int_0^{-j\frac{2\pi n}{2}} e^u\,du = \frac{jA}{2\pi n}\left[e^u\right]_{u=0}^{u=-j\pi n} =$$

$$= \frac{jA}{2\pi n}\left(e^{-j\pi n} - 1\right)$$

Poiché *n* assume valori interi vale la seguente uguaglianza:

$$e^{-j\pi n} = cos(\pi n) - j\,sin(\pi n) = (-1)^n = \begin{cases} +1 & n\ pari \\ -1 & n\ dispari \end{cases}$$

Si ha dunque che i coefficienti C_n sono dati da:

$$C_n = \begin{cases} 0 & n\ pari \\ -\dfrac{jA}{\pi n} & n\ dispari \end{cases}$$

Il segnale ha solo <u>armoniche dispari</u>.
Osservazioni:

- $C_{-n}=C_n^*$ con $n>0$ infatti si ha: $C_n = -\dfrac{jA}{\pi n}$; $C_{-n} = \dfrac{jA}{\pi n}$
- $C_{-n}=-C_n$; $n>0$

Lo sviluppo in serie di Fourier di $s(t)$ è dunque dato dalla serie:

$$s(t) = C_0 + C_1 e^{j2\pi\frac{1}{T_0}t} + C_{-1} e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t} + C_3 e^{j2\pi\frac{3}{T_0}t} + C_{-3} e^{-j2\pi\frac{3}{T_0}t} + \ldots$$

Poiché vale la relazione $C_{-n}=-C_n$; $n>0$ possiamo scrivere la serie nella forma:

$$s(t) = C_0 + C_1\left(e^{j2\pi\frac{1}{T_0}t} - e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t}\right) + C_3\left(e^{j2\pi\frac{3}{T_0}t} - e^{-j2\pi\frac{3}{T_0}t}\right) + \ldots =$$

$$= C_0 + 2jC_1\,sin\left(2\pi\frac{1}{T_0}t\right) + 2jC_3\,sin\left(2\pi\frac{3}{T_0}t\right) + \ldots$$

Si noti che il segnale $s(t)$ rimane un segnale reale poiché si ha:

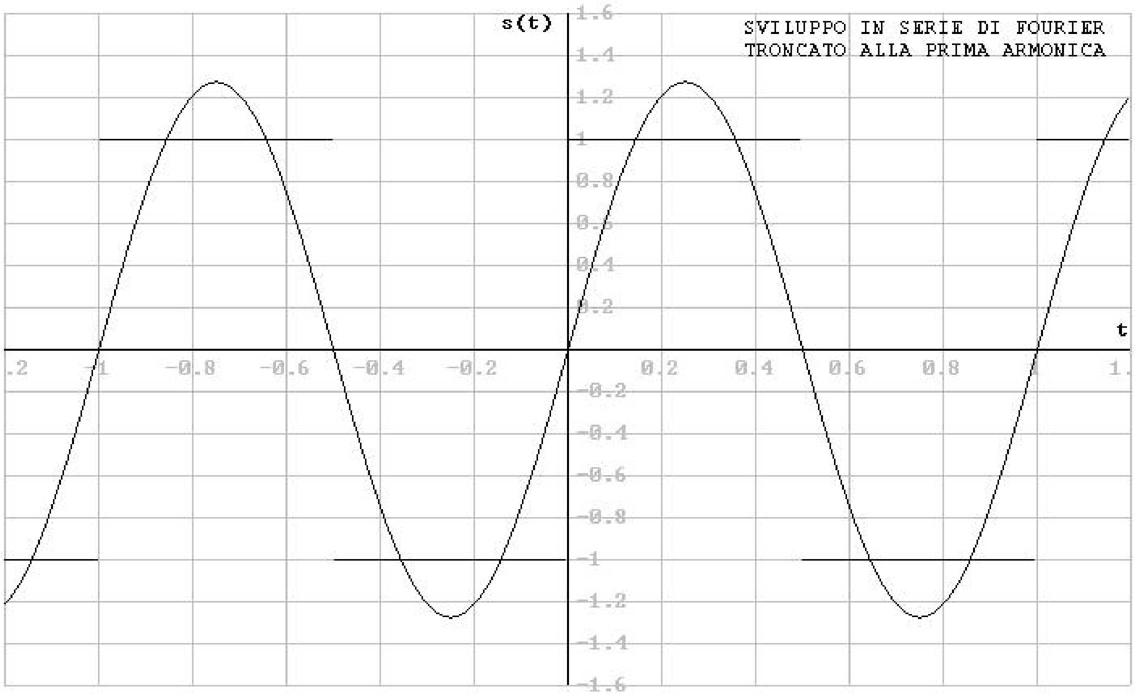
$$2jC_n = 2j\left(-\frac{2A}{\pi\, n}\right) = \frac{2A}{\pi\, n}$$

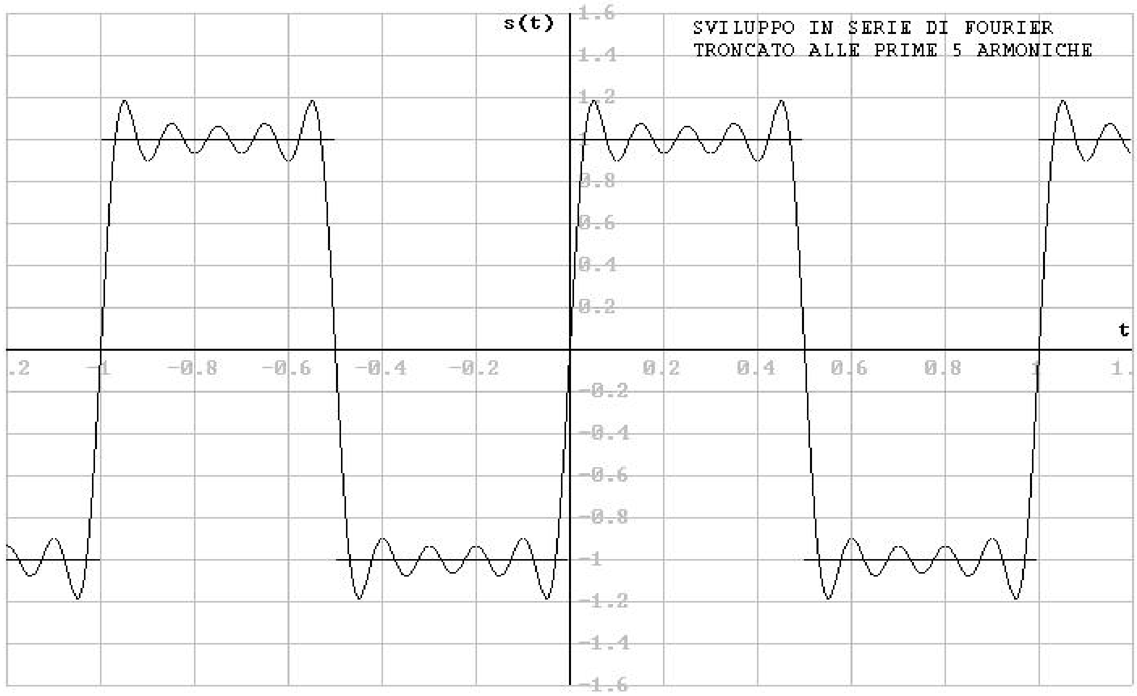
Ne deriva che il segnale *s(t)* sarà dato da:

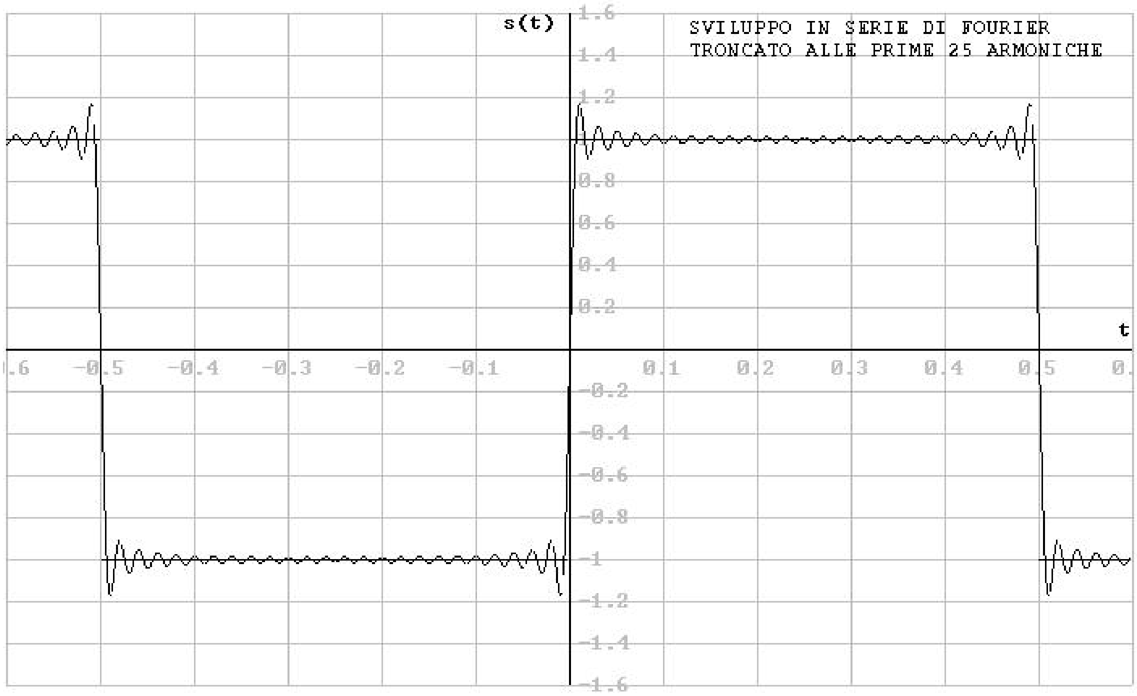
$$s(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} sin\left(2\pi \frac{1}{T_0} t\right) + \frac{2A}{3\pi} sin\left(2\pi \frac{3}{T_0} t\right) + ...$$

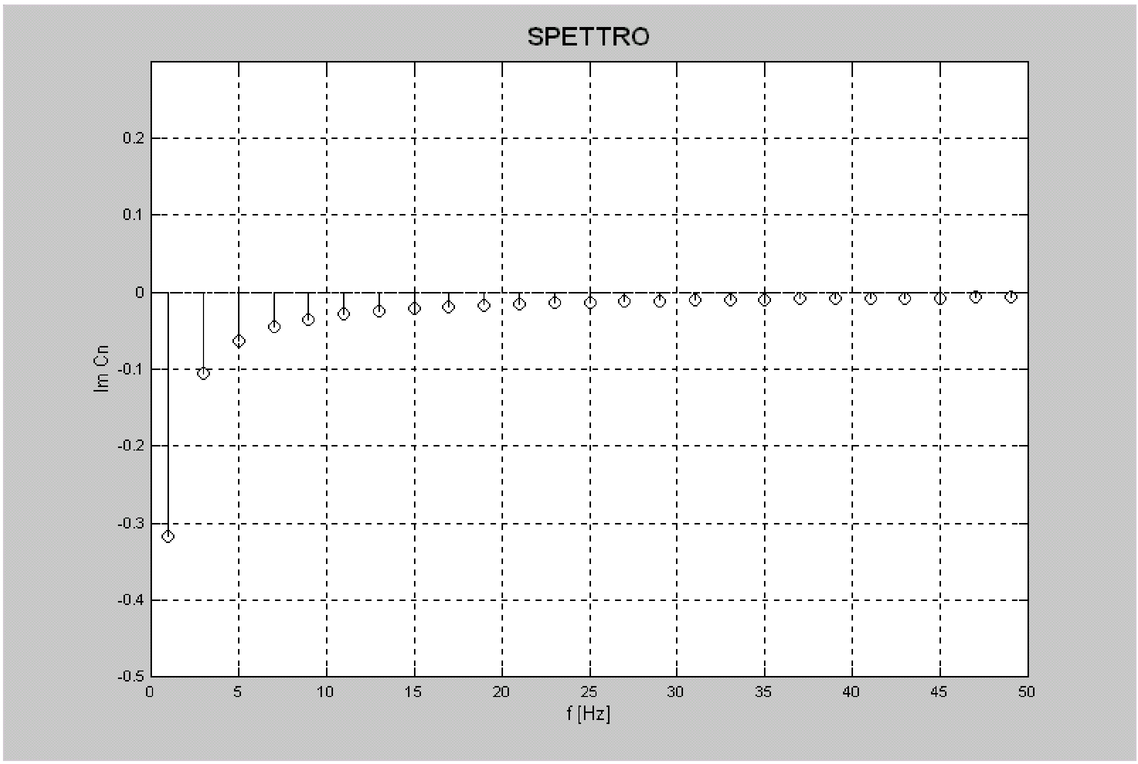
<u>Il segnale *s(t)* può dunque essere ottenuto come somma di infinite sinusoidi</u>.

I seguenti grafici mostrano il segnale *s(t)* con il suo sviluppo in serie arrestato alla prima, 5^ e 25^ armonica. Di quest' ultima viene inoltre riportato lo spettro. Si noti come all'aumentare delle armoniche migliori l'approssimazione del segnale originale.

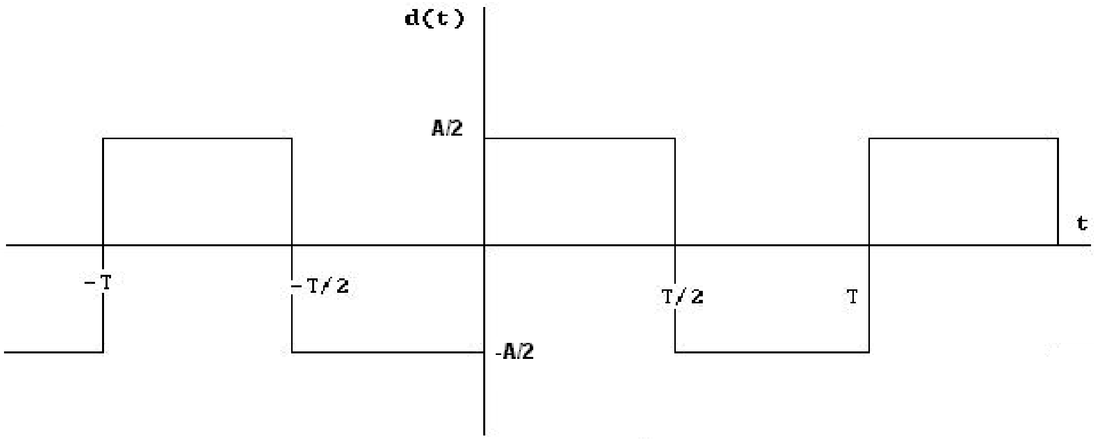



s(t)
SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER
TRONCATO ALLE PRIME 5 ARMONICHE
t
1.6
1.4
1.2
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
-1.4
-1.6
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8


s(t)
SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER
TRONCATO ALLE PRIME 25 ARMONICHE
t
1.6
1.4
1.2
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
-1.4
-1.6
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5



Es. Consideriamo ora un segnale *d(t)* ottenuto da *s(t)* togliendo il valore medio: $d(t) = s(t) - C_0 = s(t) - \frac{A}{2}$



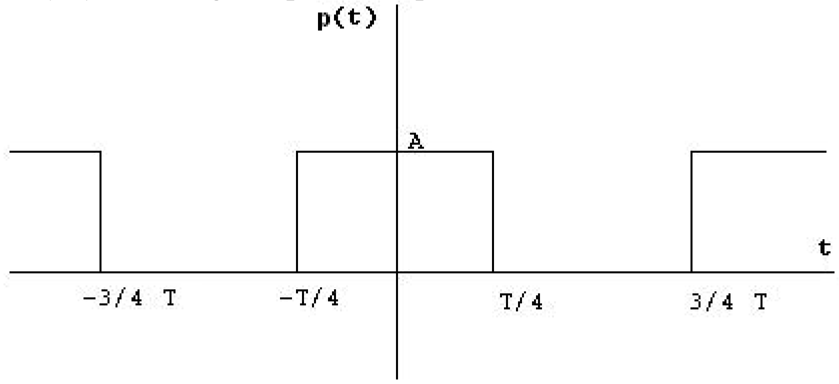
Si ricava ora lo sviluppo in serie di Fourier del segnale d(t):

$$d(t) = s(t) - C_0 = C_0 + \sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} {}_n C_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} - C_0 = \sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} {}_n C_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

d(t) è un segnale dispari: $d(-t) = -d(t)\ ;\ d(0)$

il suo spettro $\{C_n\}$ è definito solo per *n* dispari e assume valori immaginari. Un segnale si dice pari quando: $s(-t) = s(t)$

Si può dimostrare che:
- Lo spettro $\{C_n\}$ di un segnale periodico dispari è puramente immaginario.
- Lo spettro $\{C_n\}$ di un segnale periodico pari è reale.



Ess. Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier del segnale s(t) ottenuto da:

$$s_{T_0}(t) = \begin{cases} A & -\frac{T_0}{4} \le t \le \frac{T_0}{4} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Soluzione: $$C_0 = \frac{A}{2} \;;\; C_n = \begin{cases} 0 & n\ pari \\ \frac{A}{\pi\, n} sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) & n\ dispari \end{cases}$$

3. Rappresentazione dei segnali non periodici nel dominio della frequenza.

3.1.Trasformata di Fourier.

Un segnale periodico può essere scomposto nella somma di sinusoidi mediante lo sviluppo in serie di Fourier. Analogamente un segnale non periodico può essere scomposto nella somma di sinusoidi mediante la trasformata di Fourier. Lo spettro di un segnale periodico è un segnale (complesso) discreto, e cioè definito solo per valori della frequenza pari a multipli interi della fondamentale. Lo spettro di un segnale non periodico è un segnale (complesso) continuo, ovvero definito per tutti i possibili valori della frequenza.

La trasformata di Fourier (*FT*) è un operatore che consente di ottenere lo spettro di segnali non periodici. La trasformata può essere ricavata a partire dallo sviluppo in serie di Fourier, assumendo che un segnale non periodico corrisponda ad un segnale periodico con periodo $T_0 \to \infty$.

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n S_n \, e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt$$

Ponendo $\frac{1}{T_0} = \Delta f$ otteniamo:

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n S_n \, e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \Delta f$$

$$S_n = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt$$

Facendo tendere il periodo T_0 all'infinito si ha come conseguenza logica che la serie tende ad un integrale:

$$T_0 \to \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \frac{n}{T_0} \to f \\ \Delta f \to df \\ \sum \to \int \end{cases}$$

Si giunge così alla definizione della trasformata di Fourier:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

e del suo operatore inverso, ovvero l'antitrasformata di Fourier che permette di passare dal dominio della frequenza a quello del tempo:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$$

Ad un segnale *s(t)* corrisponde una ed una sola trasformata *S(f)*. In generale *S(f)* assume valori complessi.

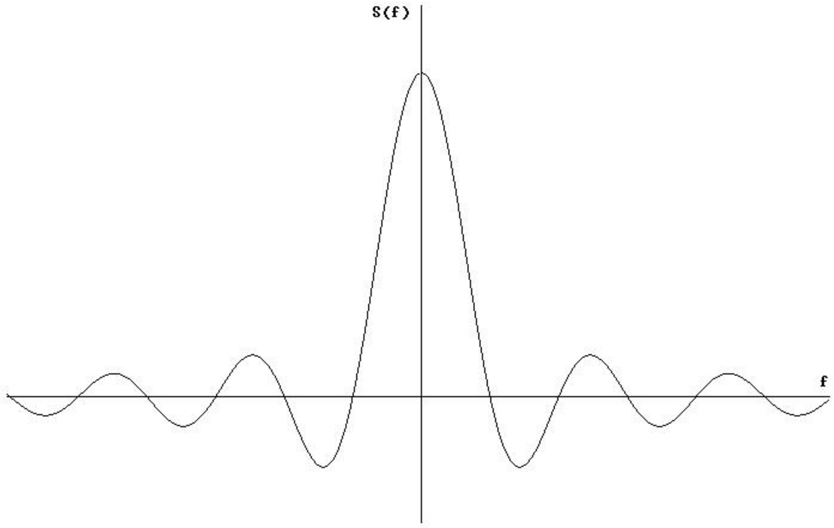
Es. Calcolare la trasformata di Fourier del segnale:

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \frac{j}{2\pi f} \cdot \left[e^{-j2\pi ft} \right]_{t=-\frac{1}{2}}^{t=+\frac{1}{2}} = \frac{j}{2\pi f} \left(e^{-j\pi f} - e^{j\pi f} \right) = \frac{1}{\pi f} \frac{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}}{2j} =$$

$$= \frac{sin(\pi f)}{\pi f} = sinc(f)$$



Osservazioni:

- $sinc(f) = sin(\pi f) \cdot \frac{1}{\pi f}$; il seno cardinale o *sinc(x)* rappresenta una sinusoide la cui ampiezza si smorza al crescere della frequenza.
- per *f=0* si ha che $sin(\pi f) = 0$; $\frac{1}{\pi f} = 0$ ne deriva che la funzione *sinc(f)* non è definita in *f=0*. Poiché però vale il limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{sin\, x}{x} = 1$ si assume *sinc(0)=1*.

Per indicare l'operatore di trasformata utilizzeremo la notazione della doppia freccia $\Leftrightarrow$.

Es. $rect(t) \Leftrightarrow sinc(f)$

In generale la trasformata di Fourier *G(f)* di un segnale reale *g(t)* è una funzione che assume valori complessi.

Es. Si calcoli la trasformata di Fourier del seguente segnale:

$$g(t)=\begin{cases} e^{-t} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$G(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-t}e^{-j2\pi ft}dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-(1+j2\pi f)t}dt=\begin{bmatrix} u=(1+j2\pi f)t \\ du=(1+j2\pi f)dt \end{bmatrix}=$$

$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-u}\frac{du}{1+j2\pi f}=-\frac{1}{1+j2\pi f}\left[e^{-u}\right]_{u=0}^{u\rightarrow+\infty}=\frac{1}{1+j2\pi f}=\frac{1-j2\pi f}{1+(2\pi f)^2}$$

$$g(t)=\begin{cases} e^{-t} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \Leftrightarrow G(f)=\frac{1}{1+j2\pi f}$$

Se lo spettro *G(f)* è un numero complesso allora lo si può scrivere sotto forma esponenziale, mettendo in evidenza il modulo e la fase.

$$G(f)=\left|G(f)\right|e^{j\angle G(f)}$$

dove modulo e fase sono dati rispettivamente da:

$$\left|G(f)\right|=\sqrt{Re\{G(f)\}^2+Im\{G(f)\}^2}$$

$$\angle G(f)=arctg\frac{Im\{G(f)\}}{Re\{G(f)\}}$$

Es.

$$G(f)=\frac{1}{1+j2\pi f}=\frac{1-j2\pi f}{1+(2\pi f)^2}$$

$$\left|G(f)\right|=\frac{1}{1+(2\pi f)^2}\sqrt{1+(2\pi f)^2}=\frac{1}{\sqrt{1+(2\pi f)^2}}$$

$$\angle G(f)=-arctg(2\pi f)$$

È possibile dimostrare che per un segnale reale *g(t)* valgono le seguenti relazioni:

- $\left|G(f)\right|=\left|G(-f)\right|$, funzione pari;
- $\angle G(f)=-\angle G(-f)$, funzione dispari;
- $G(f)=G^*(-f)$;
- $Re\{G(f)\}=Re\{G(-f)\}$;
- $Im\{G(f)\}=-Im\{G(-f)\}$;

In un segnale reale pari $g(t)=g(-t)$ risulta inoltre:

- $Re\{G(f)\}=Re\{G(-f)\}$;
- $Im\{G(f)\}=0\ ,\ \forall f$;

Mentre per un segnale reale dispari $g(t)=-g(-t)$ abbiamo:

- $Im\{G(f)\}=-Im\{G(-f)\}$;

- $Re\{G(f)\} = 0 \;,\; \forall f$;

Ess. Calcolare la trasformata di Fourier del segnale:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ e^t & t \le 0 \end{cases} \qquad \text{Soluzione: } G(f) = \frac{1}{1 - j2\pi f}$$

Tracciare inoltre l'andamento del modulo e della fase di *G(f)*.

Ess. Calcolare la trasformata di Fourier del segnale:

$$g(t) = e^{-|t|} = \begin{cases} e^{-t} & t \ge 0 \\ e^t & t < 0 \end{cases} \qquad \text{Soluzione: } G(f) = \frac{2}{1 + (2\pi f)^2}$$

3.2. Proprietà della trasformata di Fourier.

La trasformata di Fourier gode di alcune importanti proprietà oltre a quelle già elencate, molte delle quali si rivelano particolarmente utili in fase operativa. Andremo ora ad elencare le più importanti.

1. ***Linearità***.

   Dati due segnali

   $$s_1(t) \Leftrightarrow S_1(f)$$
   $$s_2(t) \Leftrightarrow S_2(f)$$

   vale la proprietà

   $$s_3(t) = a\,s_1(t) + b\,s_2(t) \Leftrightarrow S_3(f) = a\,S_1(f) + b\,S_2(f) \qquad ; \qquad a,b \in \Re$$

   Es. Consideriamo i seguenti segnali:

   $$s_1(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad s_1(t) \Leftrightarrow \frac{1}{1 + j2\pi f}$$

   $$s_2(t) = \begin{cases} 0 & t \ge 0 \\ e^t & t < 0 \end{cases} \qquad s_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{1 - j2\pi f}$$

   Calcolare la trasformata della somma dei due segnali.

   $$s_3(t) = s_1(t) + s_2(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \ge 0 \\ e^t & t < 0 \end{cases}$$

   $$S_3(f) = S_1(f) + S_2(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f} + \frac{1}{1 - j2\pi f} =$$

   $$= \frac{1 - j2\pi f + 1 + j2\pi f}{(1 + j2\pi f)(1 - j2\pi f)} = \frac{2}{1 + (2\pi f)^2}$$

2. ***Scalatura nei tempi***.

   Dato un segnale

   $$g(t) \Leftrightarrow G(f)$$

   Si ha che

$$g(a \cdot t) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right) \quad ; \quad a \in \Re$$

Es. Calcolare la trasformata del segnale

$$g(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

conoscendo che $rect(t) \Leftrightarrow sinc(f) = \frac{sin \pi f}{\pi f}$

$$g(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\frac{t}{T}\right| < \frac{1}{2} \\ 0 & \left|\frac{t}{T}\right| > \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$g(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow G(f) = T\, sinc(fT) = \frac{sin(\pi T f)}{\pi f}$$

3. ***Dualità***.
   Dato un segnale
   $$g(t) \Leftrightarrow G(f)$$
   vale la proprietà per cui
   $$G(t) \Leftrightarrow g(-f)$$

   Es. Conoscendo che
   $$g(t) = rect(t) \Leftrightarrow G(f) = sinc(f)$$
   si può dedurre che
   $$G(t) = sinc(t) \Leftrightarrow g(-f) = rect(-f)$$
4. ***Traslazione nei tempi***.
   Dato il segnale
   $$g(t) \Leftrightarrow G(f)$$
   la trasformata di tale segnale ritardato per un tempo T_0 è data da
   $$g(t - T_0) \Leftrightarrow G(f) e^{-j2\pi f T_0} \quad ; \quad T_0 \in \Re$$

   Es. Calcolare la trasformata del segnale
   $$rect(t-1) = \begin{cases} 1 & |t-1| < \frac{1}{2} \\ 0 & |t-1| \geq \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} < t < \frac{5}{2} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$
   $$rect(t-1) \Leftrightarrow sinc(f) \cdot e^{-j2\pi f}$$

   Es. Usando le proprietà di scalatura e traslazione nei tempi calcolare la trasformata del segnale:

$$rect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)=\begin{cases}1 & \frac{\left|t-\frac{T}{2}\right|}{T}<\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\left|t-\frac{T}{2}\right|}{T}\geq\frac{1}{2}\end{cases}=\begin{cases}1 & 0<t<T\\ 0 & altrimenti\end{cases}$$

$$rect\left(\frac{t}{T}\right)\Leftrightarrow |T|\,sinc(fT)$$

$$rect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)=rect\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow |T|\,sinc(fT)\cdot e^{-j\pi fT}$$

5. ***Traslazione nelle frequenze***.
   Dato un segnale

   $$g(t)\Leftrightarrow G(f)$$

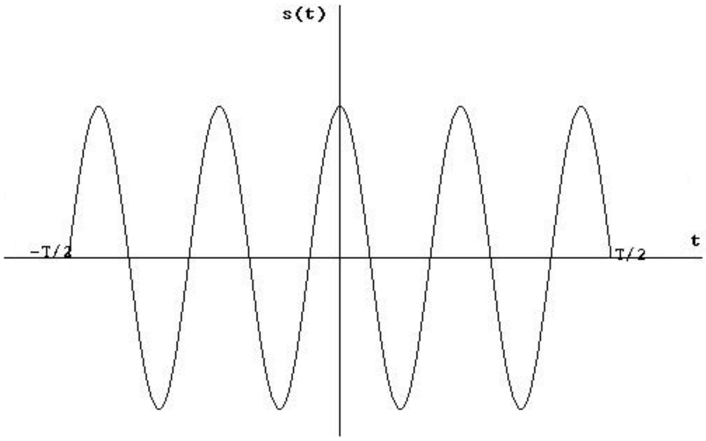
   traslato nel dominio delle frequenze di una f_c, si ha

   $$g(t)e^{j2\pi f_c}\Leftrightarrow G(f-f_c)$$

Es. Assunto che

$$g(t)=rect\left(\frac{t}{T}\right)\Leftrightarrow |T|\,sinc(fT)$$

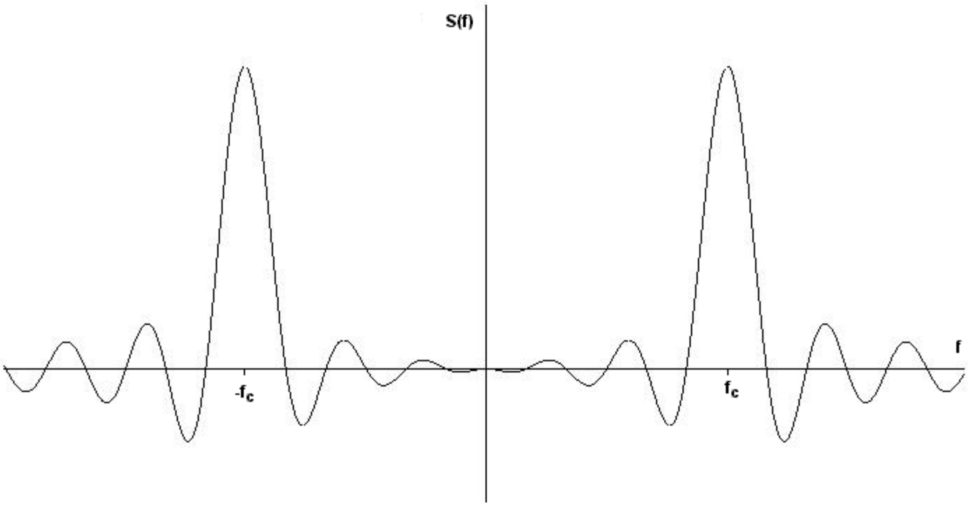
calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale



$$A\,cos(2\pi f_c)\cdot g(t)=A\frac{e^{j2\pi f_c}+e^{-j2\pi f_c}}{2}rect\left(\frac{t}{T}\right)=$$

$$=\frac{A}{2}e^{j2\pi f_c}rect\left(\frac{t}{T}\right)+\frac{A}{2}e^{-j2\pi f_c}rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$A\,cos(2\pi f_c)\cdot g(t)\Leftrightarrow\frac{A|T|}{2}sinc\big((f-f_c)T\big)+\frac{A|T|}{2}sinc\big((f+f_c)T\big)$$



6. ***Derivazione nei tempi***.
   Dato un segnale
   $$g(t) \Leftrightarrow G(f)$$
   vale la proprietà
   $$\frac{d}{dt}g(t) \Leftrightarrow j2\pi\, f \cdot G(f)$$
7. ***Integrazione nei tempi***.
   Dato un segnale
   $$g(t) \Leftrightarrow G(f)$$
   per cui sia verificata la condizione
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = G(0) = 0$$
   vale la proprietà
   $$\int_{-\infty}^{t} g(t)\,dt \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi\, f}G(f)$$
8. ***Coniugazione***.
   Dato un segnale
   $$g(t) \Leftrightarrow G(f)$$
   si ha che
   $$g(-t) \Leftrightarrow G^*(f)$$

Es. Dati i due segnali

$$g_1(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g_2(t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ e^{t} & t \leq 0 \end{cases} = g_1(-t)$$

dalla proprietà di coniugazione si ricava

$$G_1(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}$$

$$G_2(f) = \frac{1}{1 - j2\pi f} = G_1^*(f)$$

9. ***Convoluzione nei tempi***.
Dati due segnali

$$g_1(t) \Leftrightarrow G_1(f)$$

$$g_2(t) \Leftrightarrow G_2(f)$$

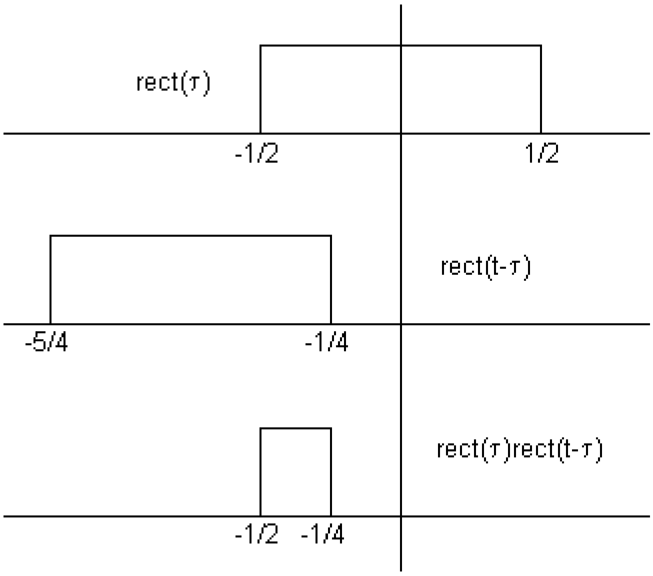
vale la relazione

$$g_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\tau)\, g_2(t-\tau)\, d\tau \Leftrightarrow G_3(f) = G_1(f) \cdot G_2(f)$$

Si noti come ad una semplice moltiplicazione nel dominio delle frequenze corrisponda l'integrale di convoluzione nel dominio del tempo.
È possibile effettuare l'operazione di convoluzione graficamente seguendo i seguenti passi:
   a. Si ribalta sulle ordinate la funzione $g_2 : g_2(\tau) \rightarrow g_2(-\tau)$
   b. Si trasla di un tempo *t* la funzione g_2 ribaltata: $g_2(\tau) \rightarrow g_2(t-\tau)$
   c. Si calcola il prodotto $g_1(\tau) \cdot g_2(t-\tau)$
   d. Si integra su tutto $\Re$ (area da $+\infty$ a $-\infty$) il prodotto $g_1(\tau) \cdot g_2(t-\tau)$
   e. Si ripetono le operazioni da b. per ogni valore di *t* desiderato.

Es. Calcolare il seguente integrale di convoluzione.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} rect(\tau) \cdot rect(t-\tau)\, d\tau$$



Come si può notare dal grafico, il prodotto di convoluzione è nullo per $t<-1$ e $t>1$, di conseguenza sarà nullo anche il suo integrale. Supponiamo invece di porci nella condizione $-1<t<1$, precisamente per $t=3/4$.

$$g(\tau)*g(t-\tau)\Big|_{t=\frac{3}{4}} = rect(\tau)*rect(t-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(\tau)rect\left(\frac{3}{4}-\tau\right)d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{\tau+\frac{3}{8}}{\frac{1}{4}}\right)d\tau = base \times altezza = \frac{1}{4}$$

In generale nell'intervallo $-1<t<1$ varrà la relazione

$$g(\tau)*g(t-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(\tau)rect(t-\tau)\,d\tau = 1+t$$

nell'intervallo 0<t<1 si può invece verificare che

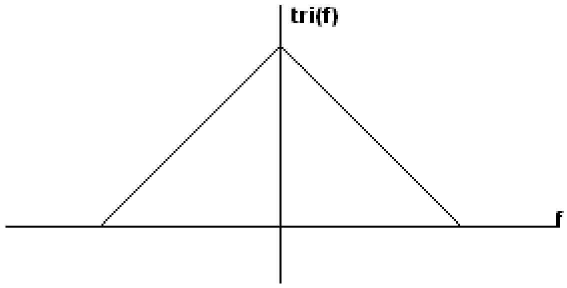
$$g(\tau)*g(t-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(\tau)rect(t-\tau)\,d\tau = 1-t$$

Se sommiamo le due condizioni abbiamo

$$g(t)*g(t) = rect(t)*rect(t) = tri(t) = \begin{cases} 1+t & -1 \le t \le 0 \\ 1-t & 0 < t \le 1 \\ 0 & t < -1, t > 1 \end{cases}$$

$$rect(t) \Leftrightarrow sinc(f)$$

$$tri(t) \Leftrightarrow sinc^2(f) = \frac{sin^2(\pi f)}{(\pi f)^2}$$



Per eventuali errori contattatemi
desaparecido@lombardiacom.it