Appunti dal corso di Comunicazioni Elettriche tenuto dal prof. Bienati per gli studenti dei D.U. in Ing. Elettronica, Informatica, Biomedica, delle Telecomunicazioni A.A. 2000-2001

2. Il campionamento e i sistemi lineari.

POLITECNICO
MILANO

4.1. Il campionamento.

4.1. La funzione impulsiva di Dirac.

La funzione impulsiva di Dirac δ(t) consente di unificare la trasformata e la serie di Fourier e permette di rappresentare analiticamente i segnali campionati. La funzione δ(t) è definita dalle seguenti proprietà:

$$1)\quad \delta(t)=0 \ \ se\ \ t\neq 0\ \ ,\ \ \delta(t)=\delta(-t)$$

$$2)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1\ \ ,\ \ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt=1\quad per\ \ t_0\ \ finito$$

δ(t) non è una funzione in senso ordinario e può essere interpretata come il limite di una successione di segnali di durata limitata di area unitaria e durata tendente a 0, per esempio:

$$\delta(t)=\lim_{T\to 0}\frac{1}{T}rect\left(\frac{1}{T}\right)$$

Dalle proprietà 1) e 2) se ne possono ricavare altre:

- *Prodotto di una funzione per un impulso*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\ \delta(t-t_0)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t_0)\ \delta(t-t_0)dt=g(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt=g(t_0)$$

$$dove\ \ \delta(t-t_0)\neq 0\ \ solo\ \ per\ \ t=t_0$$

- *Convoluzione di un segnale g(t) con un impulso* δ(t):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\delta(t-\tau)d\tau=g(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)d\tau=g(t)$$

- *Convoluzione di un segnale g(t) con un impulso traslato* $\delta(t-t_0)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau=g(t-t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0-\tau)d\tau=g(t-t_0)$$

  Convolvere un segnale con un impulso traslato equivale a traspare il segnale.

- *Trasformata di Fourier*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cdot e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cdot e^{-j2\pi 0t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

$$\delta(t)\Leftrightarrow 1$$

$$e\ \ per\ \ dualità$$

$$x(t)=1\Leftrightarrow\delta(-f)=\delta(f)$$

  Applicando la proprietà di traslazione nei tempi si ottiene poi la trasformata di un impulso al generico istante t_0:

$$\delta(t-t_0)\Leftrightarrow e^{-j2\pi ft_0}$$

  e per dualità si ottiene:

$$e^{-j2\pi f_0 t}\ \Leftrightarrow\delta(f-f_0)$$

  e quindi si ottiene la trasformata di Fourier di un segnale sinusoidale:

$$cos(2\pi f_c t)=\frac{e^{j2\pi f_c t}+e^{-j2\pi f_c t}}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\delta(f-f_c)+\frac{1}{2}\delta(f+f_c)$$

4.2. Spettro di segnali periodici e spettro di segnali campionati.

Sia $g_{T_0}(t)$ un segnale di durata limitata del tipo:

$$g_{T_0}(t)=\begin{cases} g(t) & -\frac{T_0}{2}\le t\le\frac{T_0}{2} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

ad esempio $g_{T_0}(t)=rect\left(\frac{2t}{T_0}\right)$; da $g_{T_0}(t)$ possiamo ottenere un segnale periodico $g_P(t)$ della forma:

$$g_P(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\; g_{T_0}(t-nT_0)$$

La trasformata di Fourier di $g_{T_0}(t)$ sarà data da:

$$G_{T_0}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}g_{T_0}(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}}g(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Mentre dallo sviluppo in serie di Fourier risulta:

$$g_P(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n C_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}}g(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty}g_{T_0}(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}=\frac{1}{T_0}G_{T_0}\left(f=\frac{n}{T_0}\right)$$

Abbiamo perciò:

$$g_P(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n C_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}\Leftrightarrow\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n C_n\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)=\frac{1}{T_0}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n G_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right)\cdot\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)=G_P(f)$$

GP(f) è una funzione discreta essendo definita solo per $f=\frac{n}{T_0}$ con *n* intero.

- Lo spettro di un segnale periodico è un segnale campionato. Se T_0 è il periodo, la spaziatura fra i campioni dello spettro è pari a $1/T_0$.

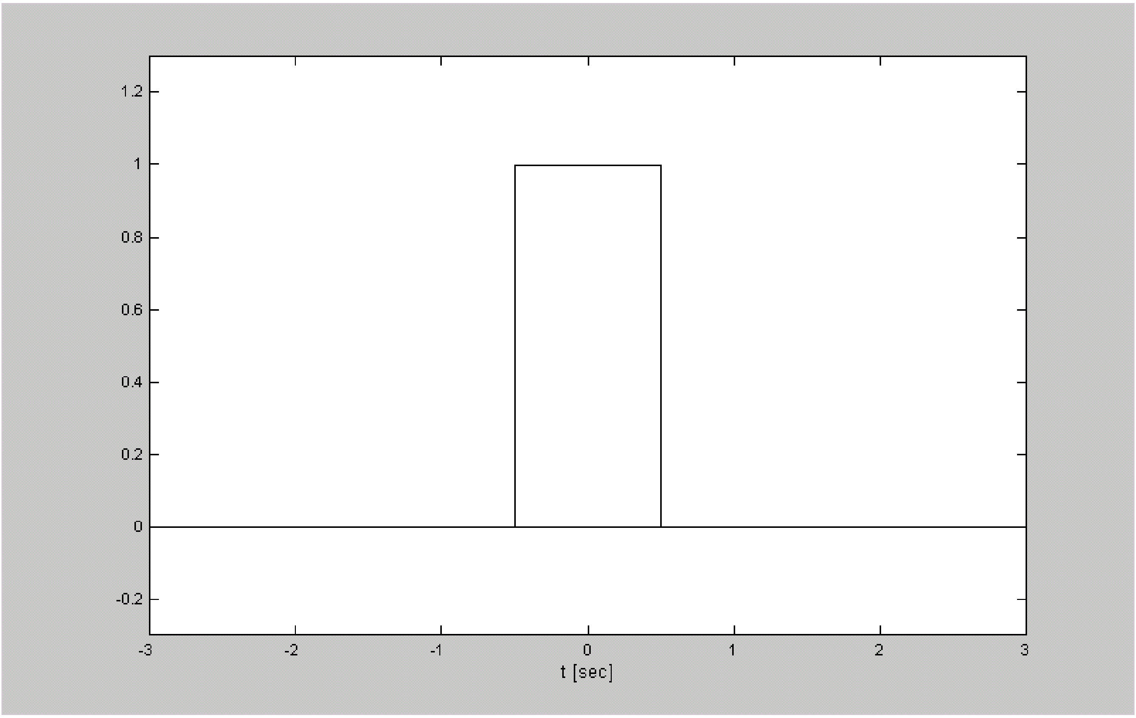
Per dualità si ottiene che lo spettro di un segnale discreto (o campionato) sarà:

$$g_D(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n g(t)\delta(t-nT)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n g(nT)\delta(t-nT)\Leftrightarrow\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n G\left(f-\frac{n}{T}\right)=G_D(f)$$

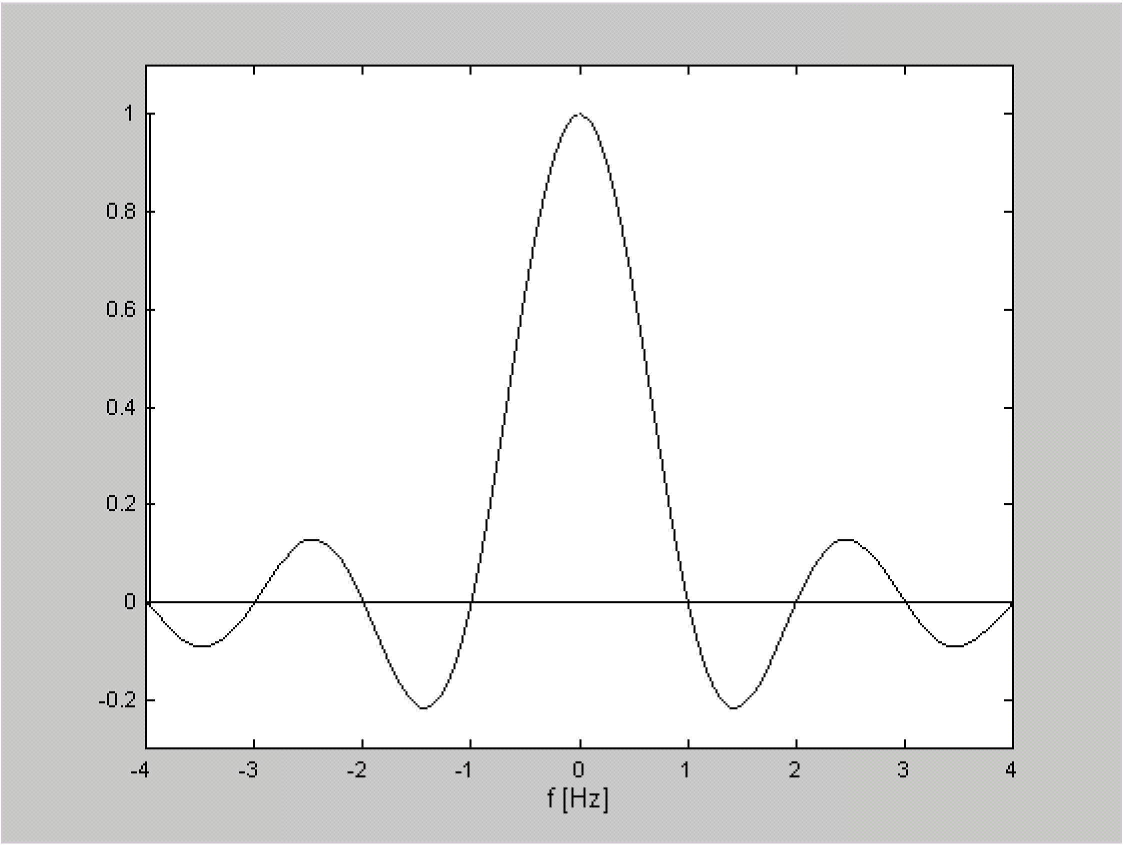
- Lo spettro di un segnale campionato $g_D(t)$ è una funzione periodica. Se $g_D(t)$ è ottenuta campionando il segnale continuo g(t) con intervallo di campionamento T allora lo spettro $G_D(f)$ si ottiene rendendo periodico G(*f*) con periodo $1/T$, dove $1/T$ è la frequenza di campionamento f_c.

Es. Si consideri ora il segnale periodico avente per componente fondamentale il segnale $rect(t)\Leftrightarrow sinc(f)$. Si osservi l'andamento del segnale base $g_{T_0}(t)$ nel dominio del tempo e delle frequenze.

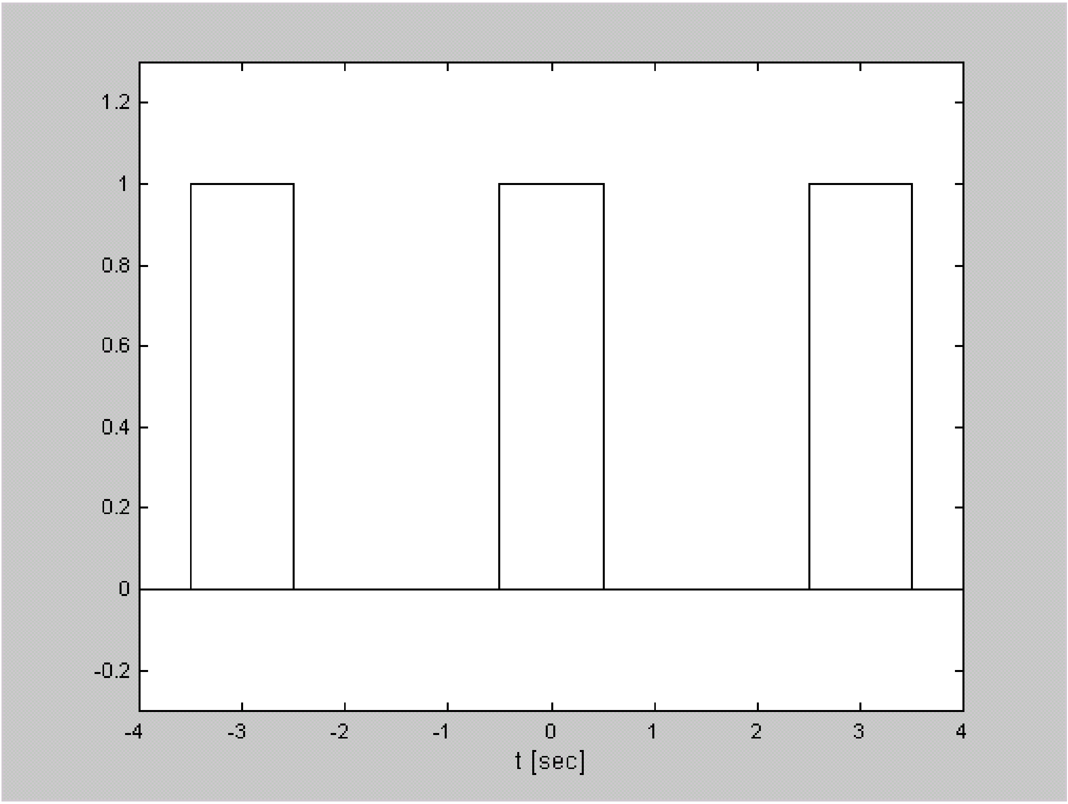
$$g_{T_0}(t)$$



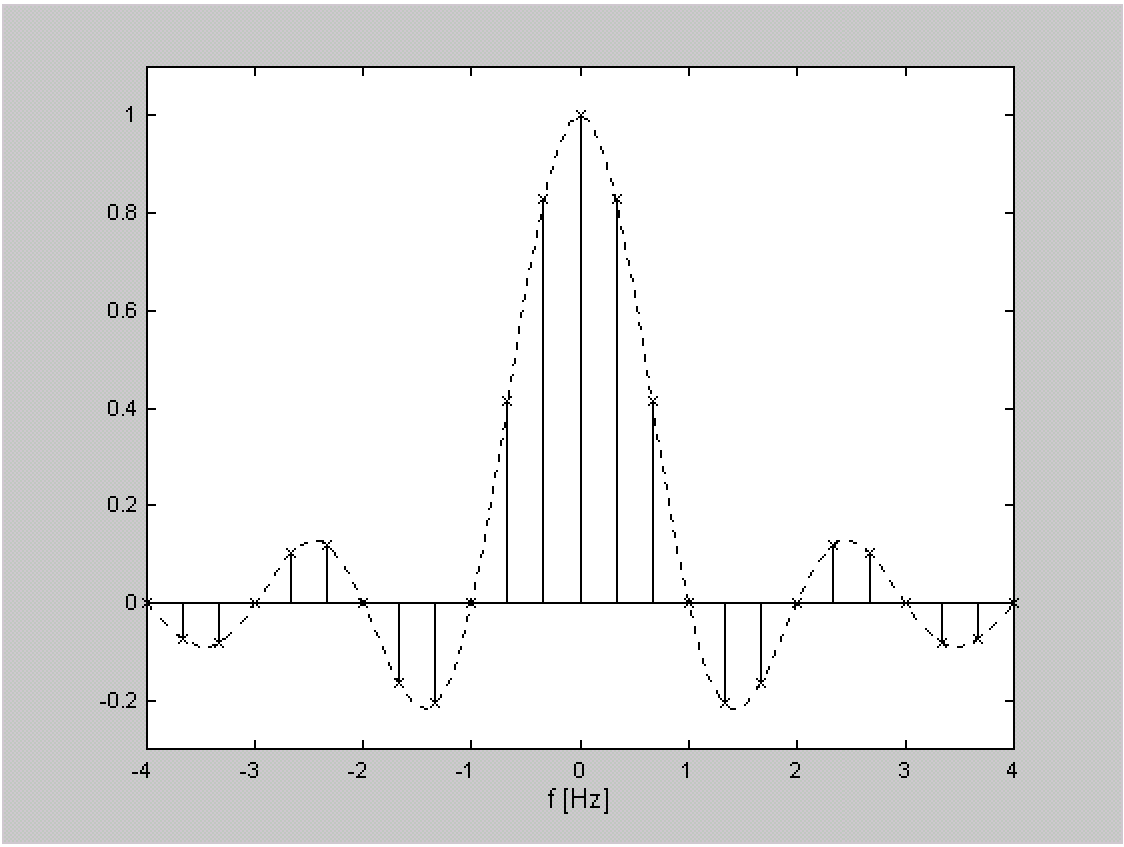
$$Re\left\{G_{T_0}(f)\right\}$$



$g_P(t)$


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
t [sec]

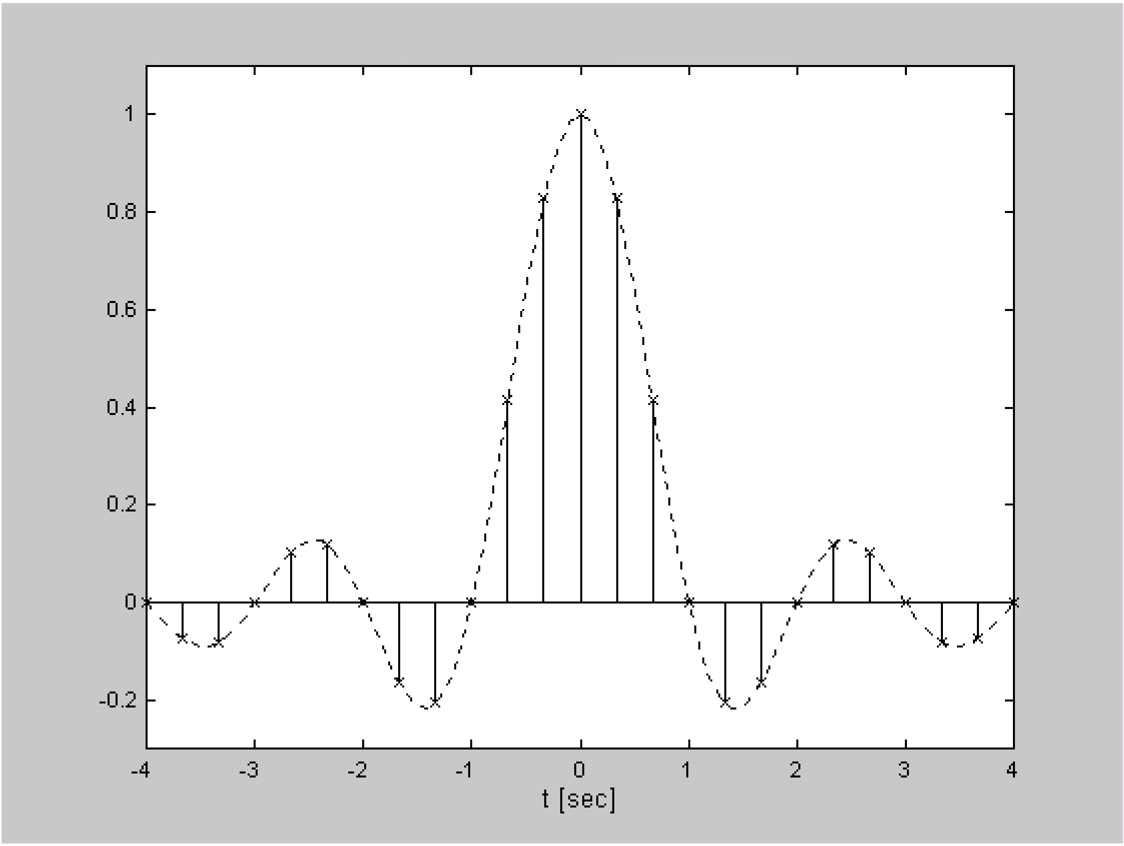
$Re\{G_P(f)\}$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
f [Hz]

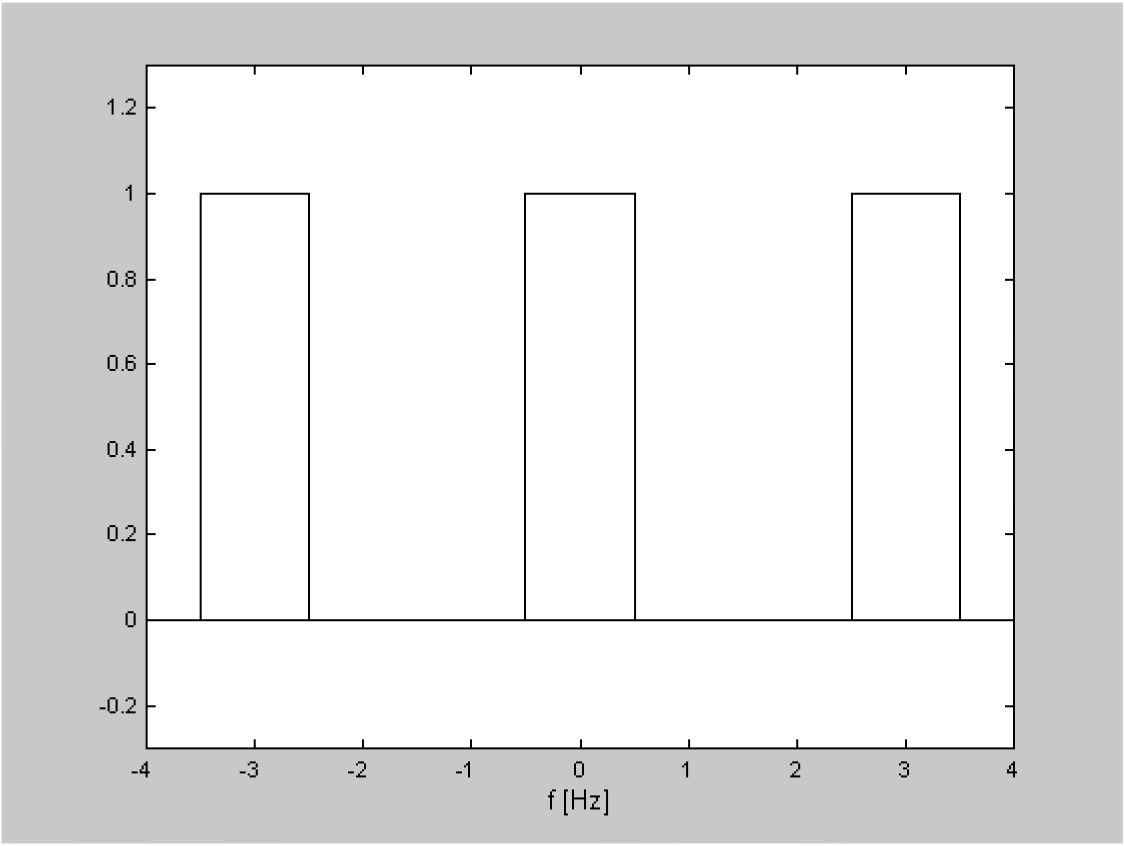
Come si può notare dalle figure, lo spettro di un segnale periodico di periodo $T_0 = 3s$ è costituito da uno spettro discreto le cui linee distano un intervallo di frequenza pari a $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{3} Hz$

Es. Consideriamo ora un segnale del tipo *sinc(t)* campionato ad un intervallo di $T_c = 3s$. Il suo spettro sarà periodico di periodo $f_c = \frac{1}{T_c} = \frac{1}{3} Hz$, costituito dalla trasformata del segnale elementare.

$g_D(t)$

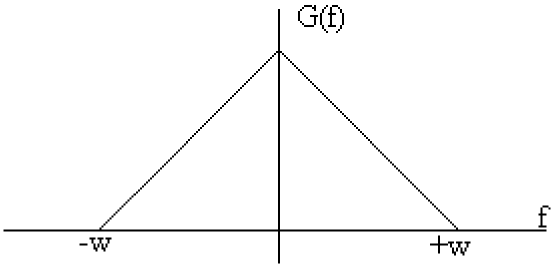


$$Re\{G_P(f)\}$$



4.3. Teorema del campionamento.

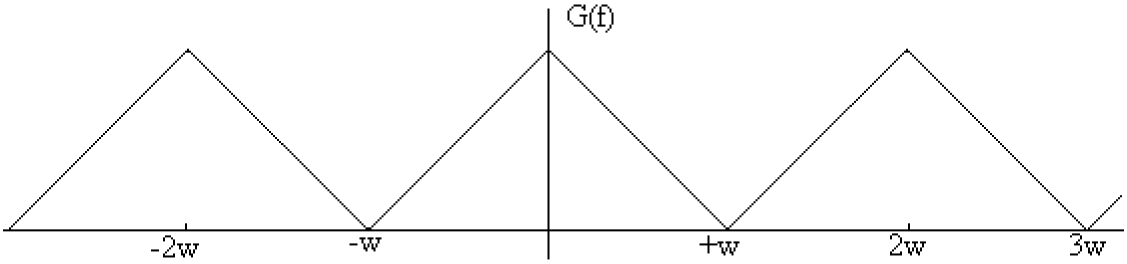
Quando si campiona un segnale continuo g(t) il requisito fondamentale da soddisfare è quello che sia possibile dal segnale campionato $g_D(t)$ ricostruire il segnale originale g(t). Supponiamo che il segnale g(t) sia a banda strettamente limitata, ovvero il suo spettro G(f) sia nullo per $|f|>w$, ad esempio:



Si sceglie ora come intervallo di campionamento $T = \dfrac{1}{2w}$, per cui si otterrà il segnale campionato:

$$g_D(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, g(nT)\delta(t - nT) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, g\left(\frac{n}{2w}\right)\delta\left(t - \frac{n}{2w}\right)$$

ed il suo spettro avrà la forma:



$$G_D(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n\, g\left(\frac{n}{2w}\right) \delta\left(t - \frac{n}{2w}\right) \right) e^{-j2\pi ft} dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n\, g\left(\frac{n}{2w}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{n}{2w}\right) e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n\, g\left(\frac{n}{2w}\right) e^{-j2\pi \frac{n}{2w} f} = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n\, G(f - n \cdot 2w)$$

Possiamo quindi scrivere :

$$G_D(f) = \frac{1}{T} G(f) + \frac{1}{T} \sum_{\substack{-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} {}_n\, G(f - n2w)$$

per cui se sono verificate le due condizioni:

1. G(f)=0 se $|f| \geq w$
2. $T = \dfrac{1}{2w}$

si ottiene

$$G(f) = T\ G_D(f) \qquad \text{per } -w \leq f \leq +w$$

ed essendo

$$G_D(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n\, g\left(\frac{n}{2w}\right) e^{-j\pi \frac{n}{w} f}$$

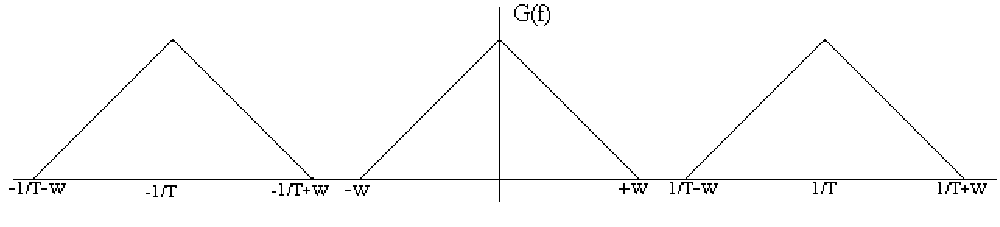
anche

$$G(f) = T \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n\, g\left(\frac{n}{2w}\right) e^{-j\pi \frac{n}{w} f} \qquad \text{per } |f| \leq w$$

Possiamo quindi enunciare il teorema del campionamento:

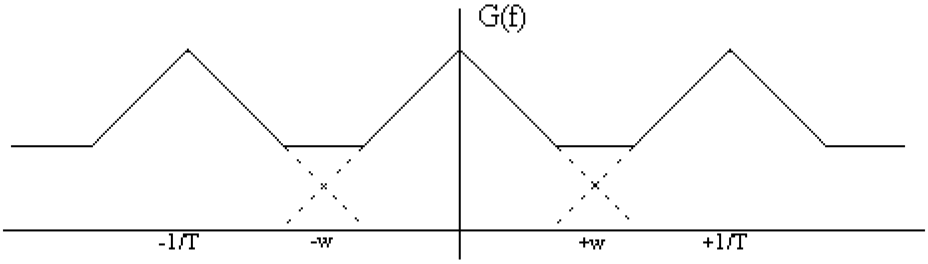
- Se il segnale g(t) è a banda strettamente limitata w l'intervallo di campionamento è $T = \dfrac{1}{2w}$; allora dai campioni g(nT) è possibile ricostruire lo spettro G(f) e quindi riottenere, tramite la trasformata di Fourier, il senale originale g(t)

Quello che ci si chiede ora è cosa succede se $T < \dfrac{1}{2w}$?



In questo caso il periodo dello spettro è $\frac{1}{T} > 2w$, risulta ancora $G(f) = T\ G_D(f)$ per $|f| \leq w$ ed è perciò ancora possibile ricostruire il segnale g(t) a partire dai campioni.

Cosa succede se invece $T > \frac{1}{2w}$?



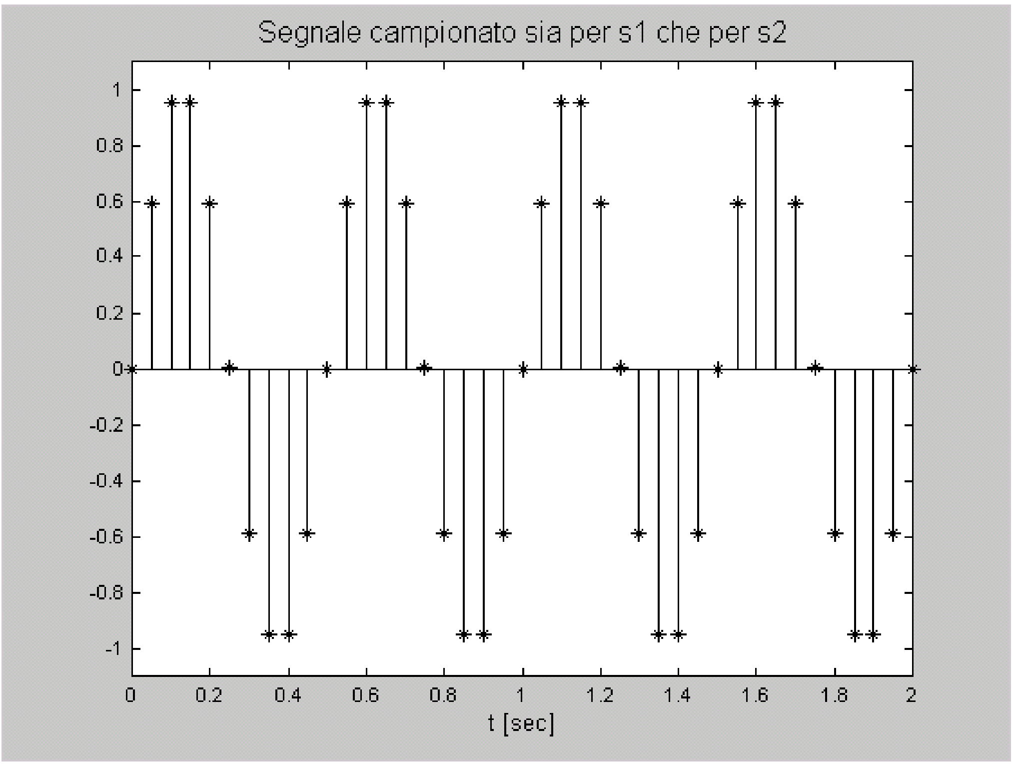
In questo caso il periodo dello spettro del segnale campionato è $\frac{1}{T} < 2w$, le repliche di G(f) perciò si sovrappongono, per cui risulta $G(f) \neq T\ G_D(f)$ anche per $|f| \leq w$ e non è più possibile ricostruire il segnale g(t) a partire dai suoi campioni. L'effetto del campionamento con $T > \frac{1}{2w}$ prende il nome di **aliasing** o **equivocazione**.

Es. Consideriamo ora due differenti segnali:

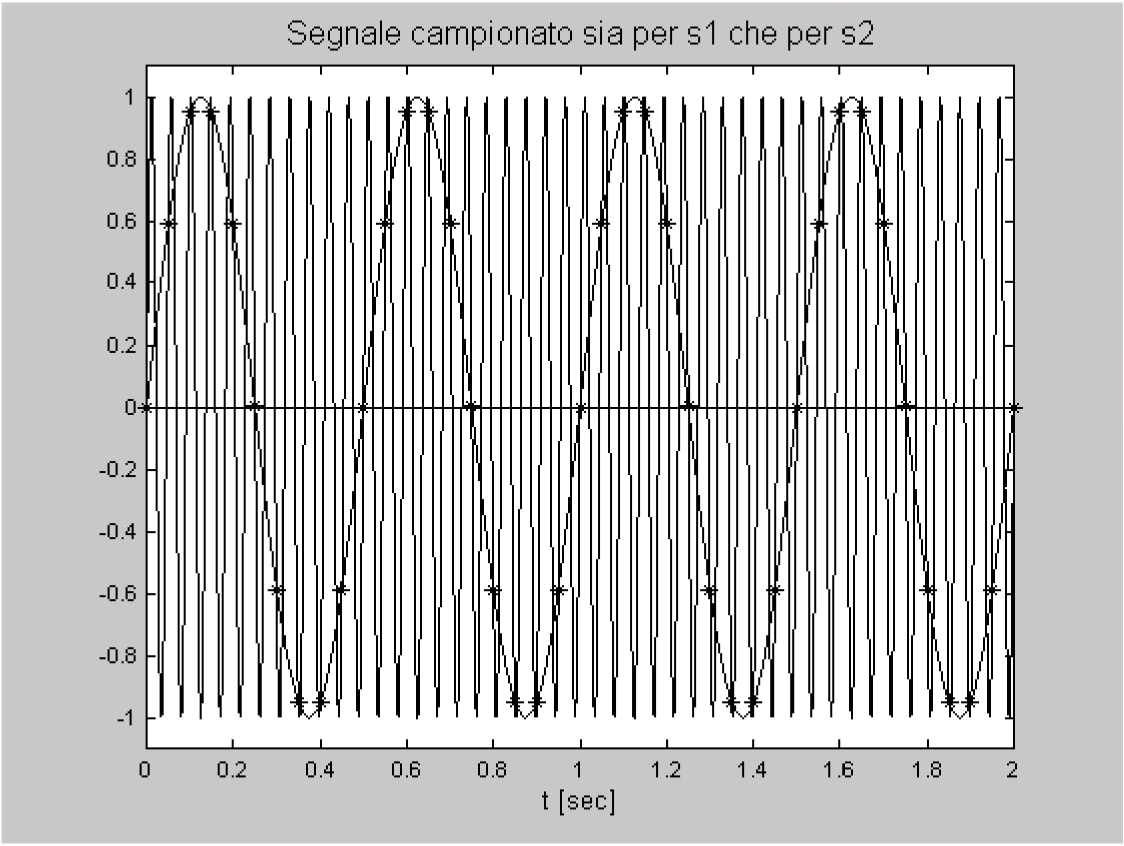
$s_1(t) = sin(2\pi f_1 T)$ $\quad$ *con* $f_1 = 2\,Hz$

$s_2(t) = sin(2\pi f_2 T)$ $\quad$ *con* $f_2 = 22\,Hz$

Entrambi vengono campionati ad una frequenza di campionamento di $f_c = 20\,Hz$.



In tal modo per il segnale s_1 vengono rispettate le condizioni del teorema del campionamento poiché $f_c \geq 2f_1$, mentre per il segnale s_2 non sono rispettate perché $f_c \leq 2f_1$. Osserviamo che i campioni dei due segnali sono i medesimi. Quando si andrà a ricostruire il segnale partendo dai precedenti campioni il segnale che sarà ottenuto è s_1, mentre è impossibile ottenere s_2 dai campioni. Il segnale campionato non permette più di distinguere le due sinusoidi (*aliasing*):



4.4. Ricostruzione del segnale continuo dai suoi campioni.

Abbiamo visto come dai campioni g(*nT*) si possa ricostruire lo spettro originale G(*f*):

$$G(f) = T\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, g\left(\frac{n}{2w}\right)e^{-j\pi\frac{n}{w}f} \qquad \text{per } |f|\leq w$$

Applicando l'antitrasformata di Fourier otteniamo invece:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df = T\int_{-w}^{+w}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, g\left(\frac{n}{2w}\right)e^{-j2\pi\frac{n}{2w}f}\right)e^{j2\pi ft}df =$$

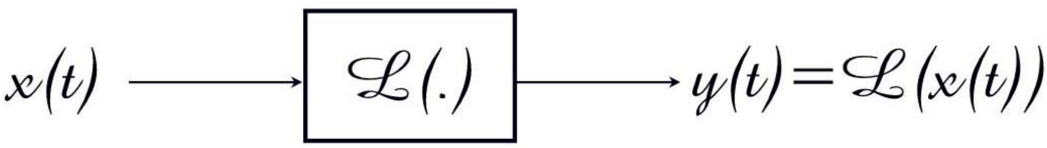
$$= T\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, g\left(\frac{n}{2w}\right)\int_{-w}^{+w} e^{-j2\pi\left(\frac{n}{2w}-t\right)f}df = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, g\left(\frac{n}{2w}\right)\cdot sinc(2wt-n)$$

il segnale g(t) può essere ottenuto interpolando i campioni g(*nT*) mediante la funzione interpolatrice $h(t) = sinc(2wt)$.

5. I sistemi lineari.

5.1. Definizione.

Un sistema è un qualunque dispositivo fisico che sollecitato con un segnale in ingresso *x(t)* restituisce un segnale in uscita *y(t)*, in generale differente da *x(t)*.
L'uscita del sistema in corrispondenza del segnale in ingresso *x(t)* è il segnale $y(t)=L(x(t))$.



Es.

$$x(t)=A\,sin(2\pi ft)$$
$$y(t)=x^2(t)=A^2\,sin^2(2\pi ft)$$

Una classe di sistemi molto importante è quella dei **sistemi lineari**. Consideriamo un sistema che per l'ingresso $x_1(t)$ fornisca l'uscita $y_1(t)=L(x_1(t))$ e per $x_2(t)$ restituisce $y_2(t)=L(x_2(t))$. Diciamo che il sistema è lineare se per l'ingresso $x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$ con *a* e *b* costanti, corrisponde l'uscita:

$$y_3=L(x_3(t))=L(ax_1(t)+bx_2(t))=a\,L(x_1(t))+b\,L(x_2(t))=ay_1(t)+by_2(t)$$

Per i sistemi lineari vale dunque il <u>principio di sovrapposizione degli effetti</u>.

Es. Consideriamo un sistema che riceva in ingresso un segnale *x(t)* e restituisca il segnale $y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$, determinare se tale sistema è lineare.

$$x_1(t)=A\,cos(2\pi f_1t) \;\rightarrow\; y_1(t)=-2\pi f_1A\,sin(2\pi f_1t)$$
$$x_2(t)=A\,cos(2\pi f_2t) \;\rightarrow\; y_2(t)=-2\pi f_2A\,sin(2\pi f_2t)$$
$$x_3(t)=x_1(t)+x_2(t) \;\rightarrow\; y_3(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

Si ricordi che la derivata della somma di due funzioni è uguale alla somma delle derivate.
Un sistema che restituisce in uscita la derivata del suo ingresso è un sistema lineare.

Es. Un sistema riceve in ingresso il segnale *x(t)* e restituisce il segnale $y(t)=x^2(t)$, determinare se il sistema è lineare.

$$x_1(t) \;\rightarrow\; y_1(t)=x_1^2(t)$$
$$x_2(t) \;\rightarrow\; y_2(t)=x_2^2(t)$$
$$x_3(t)=x_1(t)+x_2(t) \;\rightarrow\; y_3(t)=(x_1(t)+x_2(t))^2=$$
$$=x_1^2(t)+x_2^2(t)+2\,x_1(t)\,x_2(t)\neq y_1(t)+y_2(t)$$

Un sistema che restituisce in uscita il quadrato del suo ingresso non è un sistema lineare.

Ess. Verificare che il sistema che riceve in ingresso *x(t)* e restituisce in uscita il segnale $y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)d\tau$ con *T* costante è lineare.

Ess. Utilizzando i segnali $x_1(t)=1$ e $x_2(t) = cos(2\pi ft)$ verificare che il sistema che restituisce in uscita il segnale $y(t)=|x(t)|$ non è lineare.

5.2. Sistemi lineari e segnali sinusoidali.

Per tutti i sistemi lineari si dimostra che se il segnale in ingresso è una sinusoide alla frequenza *f* allora anche il segnale in uscita è una sinusoide alla stessa frequenza. Passando dall'ingresso all'uscita possono cambiare solo l'ampiezza e la fase della sinusoide.

Es. Consideriamo un sistema derivatore che riceve in ingresso un segnale sinusoidale pari a:

$$x(t) = A sin(2\pi ft)$$

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) = A \cdot 2\pi f\, cos(2\pi ft) = 2\pi fA\, sin\left(2\pi ft + \frac{\pi}{2}\right)$$

L'ampiezza della sinusoide in ingresso è *A*, l'ampiezza della sinusoide in uscita è invece $2\pi fA$ dove *f* è una costante. Inoltre mentr la fase della sinusoide in ingresso è $\varphi=0$ rad, quella della sinusoide in uscita è $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad. <u>La frequenza della sinusoide rimane inalterata</u>.

Es. Si consideri ora un sistema non lineare che riceve in ingresso un segnale sinusoidale e ne restituisce il quadrato.

$$x(t) = A sin(2\pi ft)$$

$$y(t) = A^2 sin^2(2\pi ft) = A^2 \frac{1 - cos(2\pi 2 ft)}{2}$$

Il sistema non è lineare e l'uscita, pur essendo ancora sinusoidale, ha frequenza differente (doppia) rispetto all'ingresso.

Ess. Dato il segnale $x(t) = A cos(2\pi f_1 t) + B cos(2\pi f_2 t)$ determinare la frequenza di tutte le componenti sinusoidali dei segnali $y_1(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ e $y_2(t) = x^2(t)$.

Soluzioni:

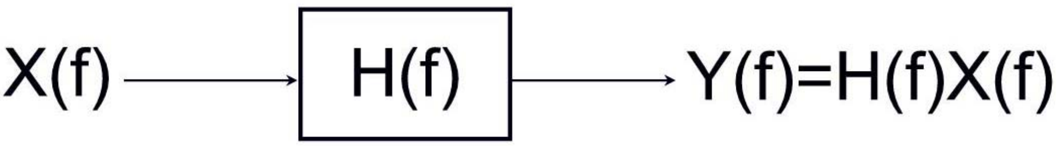
$$y_1(t) \rightarrow f_1, f_2$$

$$y_2(t) \rightarrow 0, f_1, f_2, f_1 + f_2, f_1 - f_2$$

5.3. Risposta in frequenza.

Poiché ogni segnale *x(t)* può essere scomposto nella somma di sinusoidi (o esponenziali complessi) mediante la trasformata di Fourier, ne consegue che la risposta di un sistema lineare può essere specificata definendo, per ciascuna frequenza *f*, Come si modificano l'ampiezza e la fase della corrispondente sinusoide (o esponenziale complesso) passando dall'ingresso all'uscita. In tal caso si dice che il sistema lineare viene caratterizzato mediante la sua **risposta in frequenza**. Vi sono perciò due modi alternativi per caratterizzare un sistema lineare:

- Nel dominio del tempo:
  $x(t) \rightarrow y(t) = L(x(t))$
- Nel dominio della frequenza:
  $X(f) \rightarrow Y(f) = H(f) \cdot X(f)$
  dove:
  - *X(f)* - trasformata di Fourier dell'ingresso *x(t)*;
  - *Y(f)* - trasformata di Fourier dell'uscita *y(t)*;
  - *H(f)* - risposta in frequenza del sistema;



La risposta in frequenza non è altro che una funzione definita per ogni valore della frequenza che assume valori nel campo dei numeri complessi.

Es. Nel sistema derivatore abbiamo che $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, ma dalle proprietà della trasformata di Fourier sappiamo che $Y(f) = j2\pi f \cdot X(f)$, si deduce quindi che la risposta in frequenza del derivatore è :

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = j2\pi f$$

5.4. Significato fisico della risposta in frequenza.

Dato un sistema lineare con risposta in frequenza *H(f)*, se l'ingresso è di tipo sinusoidale:

$$x(t) = A\,sin(2\pi f_1 t + \varphi_1)$$

allora l'uscita avrà una forma del tipo:

$$y(t) = A \cdot |H(f = f_1)| \cdot sin(2\pi f_1 t + \varphi_1 + \angle H(f = f_1))$$

Es. Consideriamo un derivatore: $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = j2\pi f$

per $f = f_1 > 0$ avremo un modulo ed una fase pari a:

$$|H(f_1)| = 2\pi f_1$$

$$\angle H(f_1) = arctg\frac{2\pi f_1}{0} = arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Se il segnale in ingresso fosse quindi :

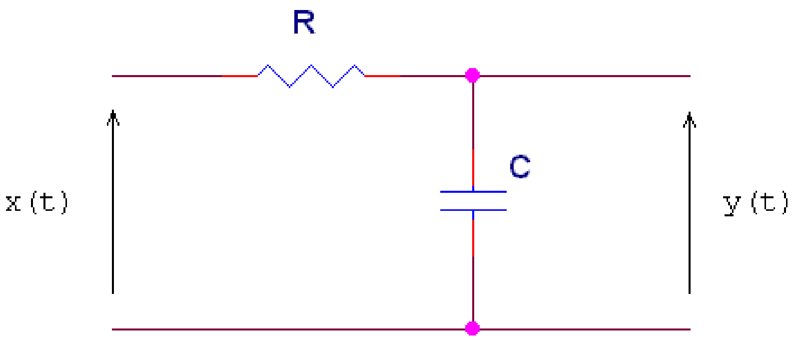
$$x(t) = A\,sin(2\pi f_1 t)$$

L'uscita sarà:

$$y(t) = A\cdot|H(f = f_1)|\cdot sin(2\pi f_1 t + \varphi_1 + \angle H(f = f_1)) =$$

$$= 2\pi f_1 A\cdot sin\left(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Es. Si dispone di un canale di comunicazione che può essere ben rappresentato dal seguente circuito RC:

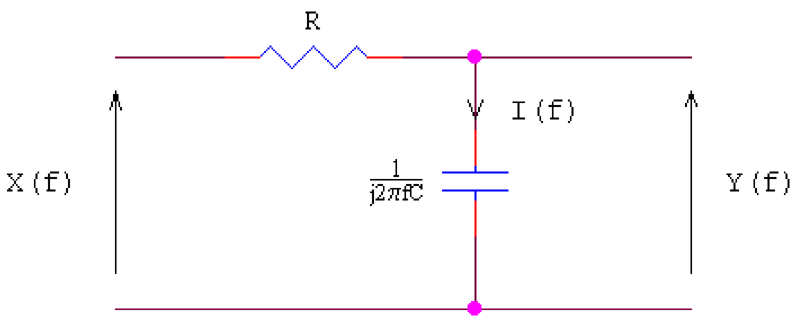


Dove si ricorda che le relazioni costitutive dei due componenti sono:

per il resistore: $i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R}$

per l'induttore: $i_L(t) = C\frac{d\,v_L(t)}{dt}$

Si determini la risposta in frequenza del canale.
La rappresentazione del circuito nel dominio dei fasori è la seguente:



Applicando prima la legge di Ohm sul condensatore e poi la legge di Kirchhoff alle maglie si ottiene:

$$I(f) = \frac{V_C}{Z_C} = j2\pi fC \cdot Y(f)$$

$$X(f) = R \cdot I(f) + Y(f) = \left(1 + j2\pi fRC\right) Y(f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

Se il segnale in ingresso *x(t)* è un onda quadra periodica ottenuta dal segnale base:

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A & se \; -\frac{T_0}{4} \le t \le +\frac{T_0}{4} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Si calcola l'uscita *y(t)*.
Il segnale scomposto in somma di esponenziali complessi è dato da:

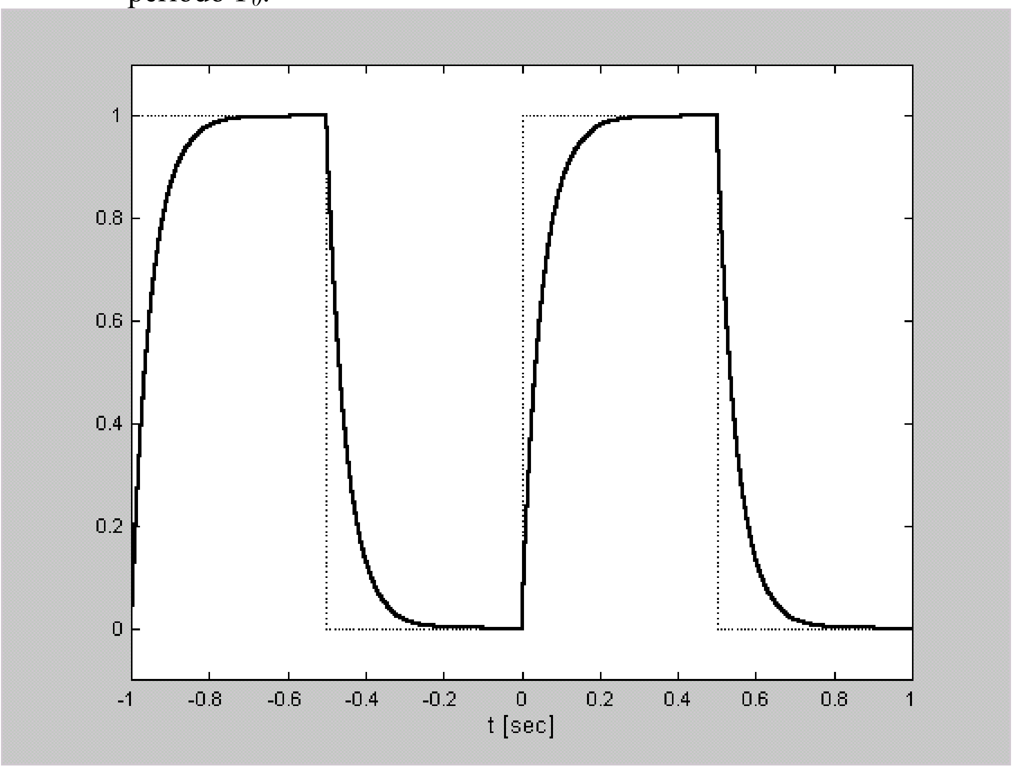
$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n} C_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt$$

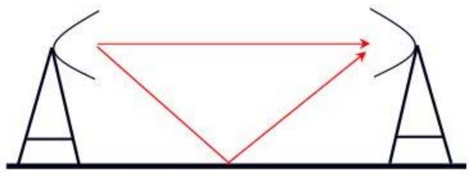
L'uscita sarà dunque data dalla serie:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n} C_n \cdot H\left(f = \frac{n}{T_0}\right) e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

L'uscita *y(t)* è data ancora dalla somma di esponenziali complessi a frequenza pari a multipli interi di $1/T_0$ per cui è ancora periodica di periodo T_0.



Es. Si consideri un canale costituito da un ponte radio



In ricezione giungerà un segnale dato dalla somma di due contributi dovuti all'onda diretta e a quella riflessa: $y(t) = \alpha x(t - T_1) + \beta x(t - T_2)$, dove α e β sono coefficienti di attenuazione caratteristici del canale, mentre T_1 e T_2 sono i ritardi di propagazione del segnale. Si vuole determinare ora la risposta in frequenza del canale.
Si ricorda la proprietà di traslazione nei tempi della trasformata di Fourier:

$$x(t - T_0) \Leftrightarrow e^{-j2\pi f T_0} X(f)$$

$$y(t) = \alpha x(t - T_1) + \beta x(t - T_2) \Leftrightarrow \left(\alpha e^{-j2\pi f T_1} + \beta e^{-j2\pi f T_2}\right) X(f) = Y(f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \alpha e^{-j2\pi f T_1} + \beta e^{-j2\pi f T_2}$$

Supponiamo ora che α=β e T_1=0 visto considerato che quello che importa al fine dell'intelligibilità del segnale è l'intervallo di tempo tra gli arrivi dei due contributi. Abbiamo così:

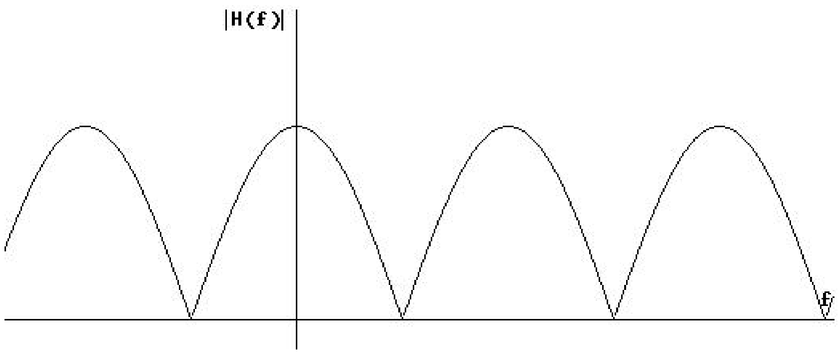
$$H(f) = \left(1 + e^{-j2\pi f T_2}\right)\alpha = \left(e^{j2\pi f \frac{T_2}{2}} + e^{-j2\pi f \frac{T_2}{2}}\right) e^{-j2\pi f \frac{T_2}{2}} \alpha =$$

$$= 2\alpha e^{-j2\pi f \frac{T_2}{2}} cos\left(2\pi f \frac{T_2}{2}\right)$$

Il modulo della risposta in frequenza sarà:

$$|H(f)| = 2\alpha \left|cos\left(2\pi f \frac{T_2}{2}\right)\right|$$

Ricordando che: $\left|e^{j\alpha}\right| = \left|cos\,\alpha + j\,sin\,\alpha\right| = \sqrt{cos^2\alpha + sin^2\alpha} = 1 \quad ; \forall\alpha$



Si osservi dunque che se si deve trasmettere una sinusoide su questo canale è meglio evitare le frequenze prossime a $f_k = \frac{k}{2T_2}$ (con *k* dispari) in quanto a queste frequenze la risposta del canale $|H(f)|$ si annulla, ovvero la sinusoide applicata in ingresso viene completamente cancellata all'uscita del canale.

5.5. Canale ideale.

Un canale di trasmissione è un sistema che, in linea di principio, dovrebbe restituire in uscita un segnale quanto più simile possibile al segnale di ingresso. Definiamo canale ideale un canale in cui il segnale in uscita è una replica del segnale di ingresso a meno di un fattore di ampiezza e di un ritardo costante $\forall f$.

$$y(t) = \alpha\, x(t - T_0)$$

T0 è il tempo di propagazione del segnale attraverso il canale, ad esempio nel caso di un collegamento in ponte radio le onde elettromagnetiche nello spazio libero si propagano alla velocità di $c \cong 3 \cdot 10^5 \frac{km}{s}$, per cui se la distanza fra sorgente e ricevitore è di L km, il ritardo di propagazione del segnale sarà di $T_0 = \frac{L}{c}$ secondi. Nel caso di canale ideale la sua risposta in frequenza è pari a:

$$H(f) = \alpha e^{-j2\pi f T_0} \qquad \begin{cases} |H(f)| = \alpha \\ \angle H(f) = -2\pi f T_0 \end{cases}$$

I canali reali si differenziano da quello ideale in quanto:

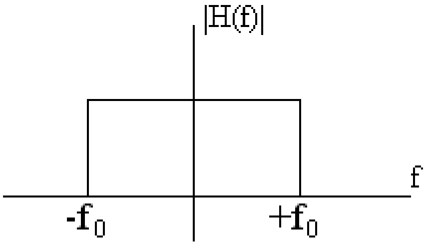
1) Hanno una caratteristica di ampiezza $|H(f)|$ che non è costante con la frequenza; questo effetto viene indicato con il nome di **distorsione di ampiezza**.
2) Hanno una caratteristica di fase $\angle$H(f) che non varia linearmente con la frequenza; questo effetto viene anche indicato con il nome di **distorsione di fase**.

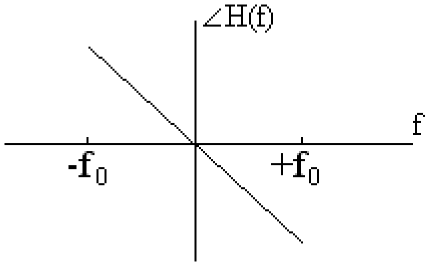
Si possono definire degli altri modelli di canale ideale le cui caratteristiche si avvicinano maggiormente a quelle dei canali reali; in particolare definiamo: il canale (o filtro) passa basso ideale ed il canale (o filtro) passa banda ideale.

- **Canale passa basso ideale**.

$$|H(f)| = A\, rect\left(\frac{f}{f_0}\right)$$

$$\angle H(f) = e^{-j2\pi f T_0}\, rect\left(\frac{f}{f_0}\right)$$





I canali passa basso reali si differenziano da quello ideale in quanto non hanno risposta in ampiezza costante in banda passante (cioè per $-f_0 \le f \le +f_0$), hanno una transizione a 0 molto più graduale e non hanno caratteristica di fase lineare. Il canale telefonico è un esempio di canale passa basso. La trasmissione su canali passa basso prende anche il nome di <u>trasmissione in banda base</u>.

- Canale passa banda ideale.

$$|H(f)| = A\,rect\left(\frac{f-f_c}{B}\right) + A\,rect\left(\frac{f+f_c}{B}\right)$$

$$\angle H(f) = e^{-j2\pi f T_0}\,rect\left(\frac{f-f_c}{B}\right) + e^{-j2\pi f T_0}\,rect\left(\frac{f+f_c}{B}\right)$$

Anche per i canali passa banda reali non si osserva mai una risposta in ampiezza costante in banda passante e la transizione da banda passante a banda attenuata è molto più graduale. I collegamenti radio avvengono tutti in banda passante. La trasmissione su canali passa banda prende il nome di <u>trasmissione in banda passante</u>.

Per eventuali errori contattatemi
desaparecido@lombardiacom.it