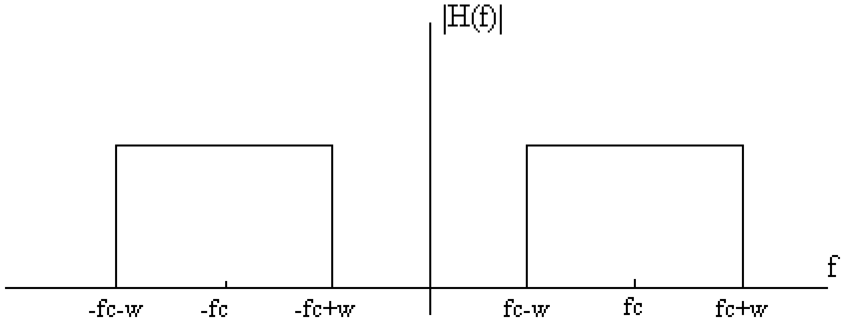
Appunti dal corso di Comunicazioni Elettriche tenuto dal prof. Bienati per gli studenti dei D.U. in Ing. Elettronica, Informatica, Biomedica, delle Telecomunicazioni A.A. 2000-2001

3. I canali e la caratterizzazione dei segnali.

6. Canali e caratterizzazione dei segnali casuali.

6.1. Banda di un canale di comunicazione.

La banda passante di un canale di comunicazione ideale è definita come l'intervallo di frequenze in cui il modulo della risposta in frequenza del canale è diverso da zero. Per esempio nel seguente canale passa banda:

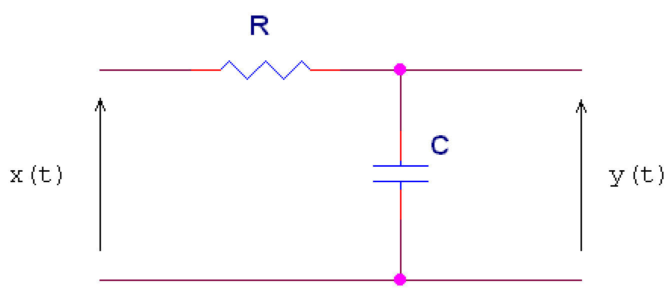


la larghezza della banda passante è di $2w$ (si noti che si è fatto riferimento solo alla risposta in frequenza per $f>0$ come avviene nella realtà fisica). Nel caso di sistemi passa basso l larghezza di banda è valutata fra $f=0$ e la frequenza massima positiva a cui la risposta in frequenza è ancora non nulla. La definizione di larghezza di banda non può essere applicata ai canali reali, per i quali non si osserva mai che $|H(f)|$ passi bruscamente da valori non nulli a 0. nel caso dei canali reali la lunghezza di banda è definita dalla frequenza alla quale $|H(f)|$ si è ridotta di un fattore prefissato rispetto al valore massimo. Per convenzione si assume tale valore come $\sqrt{2}$, per cui si ha in corrispondenza del valore di frequenza w:

$$|H(w)| = \frac{|H(f_0)|}{\sqrt{2}}$$

dove f_0 è un valore di frequenza in banda passante, per cui cioè $|H(f)|$ assuma valore massimo.

Es. Consideriamo un canale il cui modello sia riconducibile ad un circuito RC.



$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \qquad \rightarrow \qquad |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}}$$

$$\left.\begin{array}{r} |H(f=0)| = 1 \\ |H(f \rightarrow \infty)| = 0 \end{array}\right\} \quad la\ risposta\ \grave{e}\ del\ tipo\ passa-basso$$

Se w è la larghezza di banda abbiamo che:

$$|H(f=w)| = \frac{|H(f=0)|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

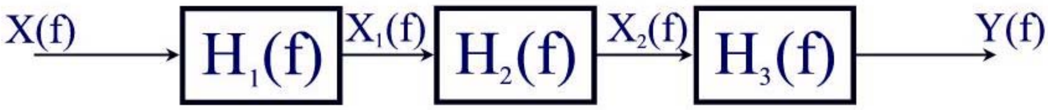
$$\frac{1}{\sqrt{1+(2\pi wRC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$1+(2\pi wRC)^2 = 2$$

$$w = \frac{1}{2\pi RC}$$

6.2. Sistemi lineari in cascata.

Consideriamo un sistema lineare costituito dalla cascata di più sottoinsiemi lineari (per esempio trasmettitore, canale, ricevitore):



Si vuole ora determinare la risposta in frequenza complessiva.

$$X_1(f) = H_1(f)X(f)$$

$$X_2(f) = H_2(f)X_1(f) = H_2(f)H_1(f)X(f)$$

$$Y(f) = H_3(f)X_2(f) = H_3(f)H_2(f)H_1(f)X(f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = H_3(f)H_2(f)H_1(f)$$

6.3. Risposta all'impulso e convoluzione.

La risposta in frequenza di un sistema lineare è, dal punto di vista matematico, una funzione della frequenza. Possiamo perciò pensare di utilizzare l'antitrasformata di Fourier per associare alla risposta in frequenza $H(f)$ un segnale nel tempo $h(t)$. Si deve determinare però il significato fisico di questo segnale. Supponiamo di applicare all'ingresso del sistema un segnale il cui spettro sia $X(f)=1$, ovvero $x(t)=\delta(t)$. Lo spettro del segnale in uscita sarà $Y(f)=H(f)$, ovvero:

$$y(t) = h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)e^{j2\pi ft}df$$

Si conclude perciò che l'antitrasformata $h(t)$ della risposta in frequenza $H(f)$ di un sistema lineare altro non è che il segnale ottenuto in uscita dal sistema quando all'ingresso viene applicato un impulso $\delta(t)$. Per questo motivo $h(t)$ prende il nome di **risposta all'impulso** del sistema. Supponiamo che all'ingresso del sistema sia applicato un generico segnale $x(t)$, sappiamo che: $Y(f)=H(f)X(f)$. Applicando la proprietà di convoluzione nei tempi della trasformata di Fourier possiamo anche calcolare $y(t)$ come:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

ovvero l'uscita di un sistema lineare può essere calcolata direttamente nel dominio dei tempi come la convoluzione fra il segnale di ingresso e la risposta all'impulso del sistema.

6.4. Caratterizzazione nel dominio delle frequenze dei segnali casuali: densità spettrale di potenza.

Un segnale casuale è un segnale il cui andamento nel tempo non può essere descritto in forma matematica. Si pensi ad esempio al segnale trasmesso su una linea telefonica nel corso di una conversazione fra due persone: in questo caso il segnale casuale rappresenta un termine indesiderato che si sovrappone all'eventuale segnale utile, disturbandolo, e perciò prende il nome di rumore. È chiaro che per un segnale del genere non ha senso parlare di trasformata di Fourier per il semplice motivo che, non avendo una legge *x(t)* che descriva il segnale, non ne posso calcolare la trasformata:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Ciononostante è comunque possibile caratterizzare nel dominio della frequenza anche i segnali casuali mediante la loro **densità spettrale di potenza *S(f)***. Cerchiamo anzitutto di definire *S(f)* attraverso le sue proprietà.

1. Se *x(t)* è un segnale causale, la sua densità spettrale di potenza *S(f)* è una funzione deterministica della frequenza. (per es. $S(f)=sinc^2(f)$).
2. Poiché inoltre è noto che i segnali casuali sono segnali a potenza finita, si intuisce che vi debba essere un legame fra densità spettrale di potenza e potenza di un segnale casuale. Abbiamo infatti che se *S(f)* è la densità spettrale di potenza di un segnale casuale di potenza *P* allora risulta:

   $$P = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)df$$

   Da questa proprietà si ricava direttamente l'unità di misura si *S(f)*, che è Watt/Hertz. A questo punto è possibile dare un'interpretazione del significato fisico di *S(f)*: la densità spettrale di potenza è una funzione che descrive la distribuzione della potenza del segnale nelle frequenze. Non possiamo scomporre il segnale in somma di sinusoidi ma sappiamo dire come mediamente la sua potenza si distribuisce fra le sinusoidi.
3. Essendo la potenza una quantità reale e sempre positiva (ad es. la potenza istantanea di un segnale complesso *s(t)* è definita come $p(t) = |s(t)|^2 \geq 0$ e reale $\forall t$), si deduce che $S(f) \geq 0$ e reale $\forall f$. Si ha inoltre che *S(f)* è una funzione pari, cioè $S(f) = S(-f)$.
4. Se un segnale casuale *x(t)* con densità spettrale di potenza $S_x(f)$ è applicato all'ingresso di un sistema lineare con risposta in frequenza *H(f)*, in uscita si ottiene un nuovo segnale casuale *y(t)* la cui densità spettrale di potenza è data da:
   $S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$

dove $|H(f)|^2 = H(f) \cdot H^*(f) = Re\{H(f)\}^2 + Im\{H(f)\}^2$

Finora abbiamo definito le proprietà di *S(f)*, eludendo il punto più importante, ovvero come calcolare *S(f)*. Il calcolo di *S(f)* è legato a considerazioni fisiche basate sulla natura del processo che genera il segnale casuale stesso. Consideriamo subito un esempio fondamentale nel campo delle comunicazioni: il rumore da agitazione termica degli elettroni nei conduttori o **rumore termico**. Si può verificare sperimentalmente che ai capi di un resistore di resistenza R a temperatura assoluta non nulla è sempre possibile misurare (anche in assenza di generatori di tensione esterni) una tensione non nulla con andamento casuale. La causa di questa tensione è il moto caotico degli elettroni all'interno del reticolo atomico del materiale che costituisce il resistore. Considerazioni basate sulla meccanica quantistica permettono di stabilire che la densità spettrale di potenza del rumore termico è:

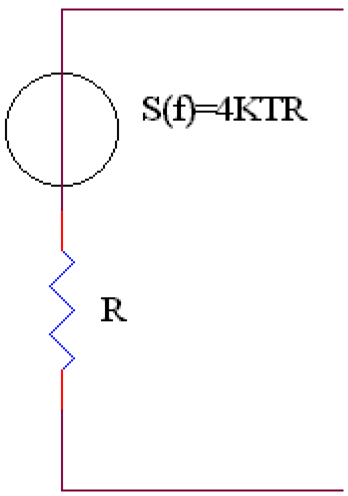
$$S(f) = 2KTR \qquad \left[\frac{V^2}{Hz}\right]$$

dove:

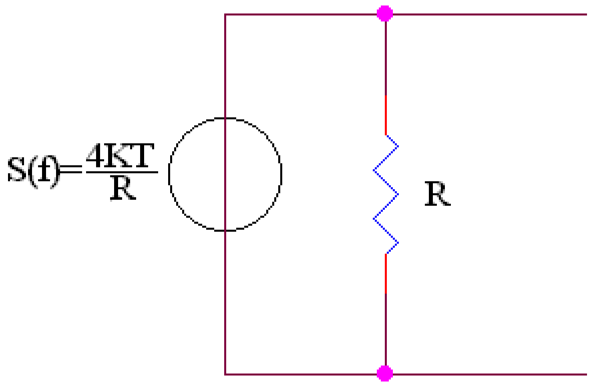
- K ; costante di Boltzmann, $K = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \ \dfrac{J}{K}$
- T; temperatura assoluta in gradi kelvin
- R; resistenza del resistore espressa in ohm

Dovendo analizzare gli effetti del rumore, la presenza del rumore termico può essere resa esplicita associando un generatore di tensione (o di corrente) al resistore.

Generatore equivalente di tensione:

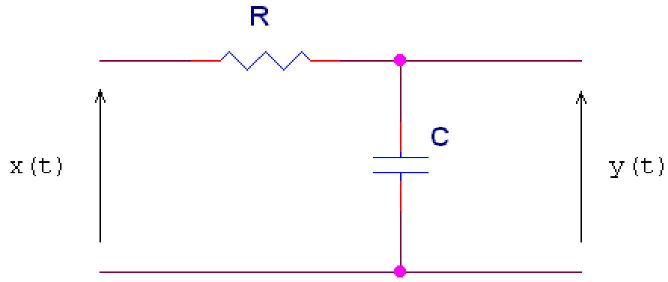


Generatore equivalente di corrente:

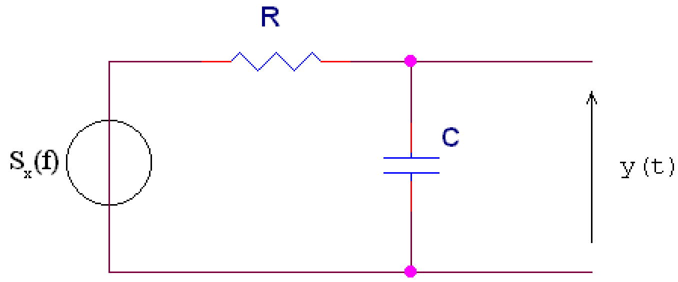


È immediato osservare che la densità spettrale di potenza del rumore termico è costante per tutte le frequenze. In generale, qualunque segnale casuale la cui densità spettrale di potenza sia costante, prende il nome di <u>rumore bianco</u>. Molto spesso nei sistemi di comunicazione il rumore assume densità spettrale di potenza costante in tutta la banda del canale ed è perciò caratterizzato (in prima approssimazione) come rumore bianco.

Es. Consideriamo un canale di comunicazione che possa essere rappresentato come un circuito RC:



Se la temperatura del sistema è T K si può ricavare la densità spettrale di potenza $S_y(f)$ del rumore in uscita dovuto al contributo del rumore termico. La sorgente di rumore in questo caso è il rumore termico associato al resistore, possiamo perciò passare al seguente schema equivalente:



dove il generatore di ingresso coincide con il generatore di rumore associato al resistore. A questo punto poiché si ha:

$$S_x(f) = 2KTR$$

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \quad \rightarrow \quad |H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2}$$

si ottiene una densità spettrale di potenza in uscita di:

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) = \frac{2KTR}{1 + (2\pi fRC)^2}$$

La potenza di rumore in uscita P_y può essere calcolata come:

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f) df = 2KTR \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2} df = \frac{2KTR}{2\pi RC}\pi = \frac{KT}{C} \qquad [W]$$

Ricordando che: $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\, x \quad ; \quad arctg(+\infty) = \pi$

6.5. Funzione di autocorrelazione.

La densità spettrale di potenza è, matematicamente, una funzione deterministici della frequenza. Possiamo perciò pensare di utilizzare la trasformata di Fourier per associare a *S(f)* un segnale nel tempo; questo segnale prende il nome di **funzione di autocorrelazione** e si indica con *R(τ)*:

$$R(\tau) \Leftrightarrow S(f)$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, e^{j2\pi f\tau} df$$

Siccome *S(f)* è reale e pari, si deduce subito (per le simmetrie della trasformata di Fourier) che anche *R(τ)* è una funzione reale e pari: $R(\tau) = R(-\tau)$. Inoltre si ha che:

$$R(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, e^{j2\pi f \cdot 0} df = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, df = P$$

Ovvero l'autocorrelazione *R(τ)* per τ=0 coincide con la potenza del segnale.

Es. Determinare la funzione di autocorrelazione di un rumore bianco.
Poiché la densità spettrale di un rumore bianco è costante per tutte le frequenze, *S(f)=N*, si ottiene subito che in questo caso $R(\tau) = N \cdot \delta(\tau)$

Es. Determinare la funzione di autocorrelazione in uscita da un circuito RC al cui ingresso venga applicato un rumore bianco *x(t)*.
Sappiamo che $S_x(f)=N$ per cui si ha:

$$S_y(f) = \frac{N}{1+(2\pi fRC)^2}$$

e quindi facendone l'antitrasformata si ottiene:

$$R_y(\tau) = \frac{N}{2RC} e^{-\frac{|\tau|}{RC}}$$

6.6. Significato fisico della funzione di autocorrelazione.

Due segnali casuali generati dal medesimo processo fisico hanno andamenti nel tempo differenti (si pensi al caso della voce). Si intuisce però che, essendo stati generati dalla medesima sorgente, questi segnali devono avere delle caratteristiche comuni. Se la sorgente non muta nel tempo (ovvero si dice che è *stazionaria*) una delle caratteristiche comuni per tutti i segnali generati è proprio la funzione di autocorrelazione (o equivalentemente la densità spettrale di potenza). Per la funzione di autocorrelazione si può dare la seguente definizione alternativa:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\, x(t-\tau)\, dt$$

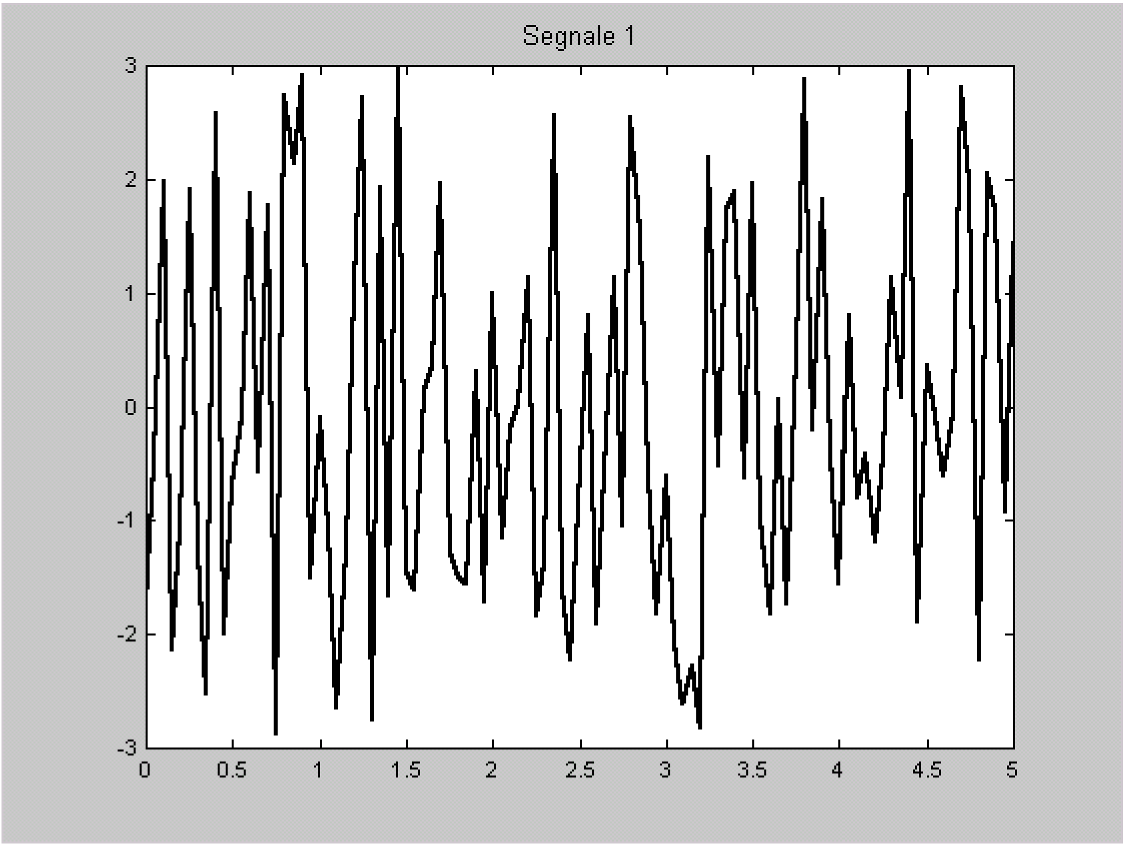
Analizziamo innanzitutto il significato dell'integrale: *x(t)* è il segnale casuale, *x(t−τ)* è il segnale casuale ritardato di τ secondi, l'integrale corrisponde all'area per −T<*t*<+T del prodotto *x(t)x(t−τ)*. Il limite indica che l'autocorrelazione rappresenta il valore limite a cui converge la quantità

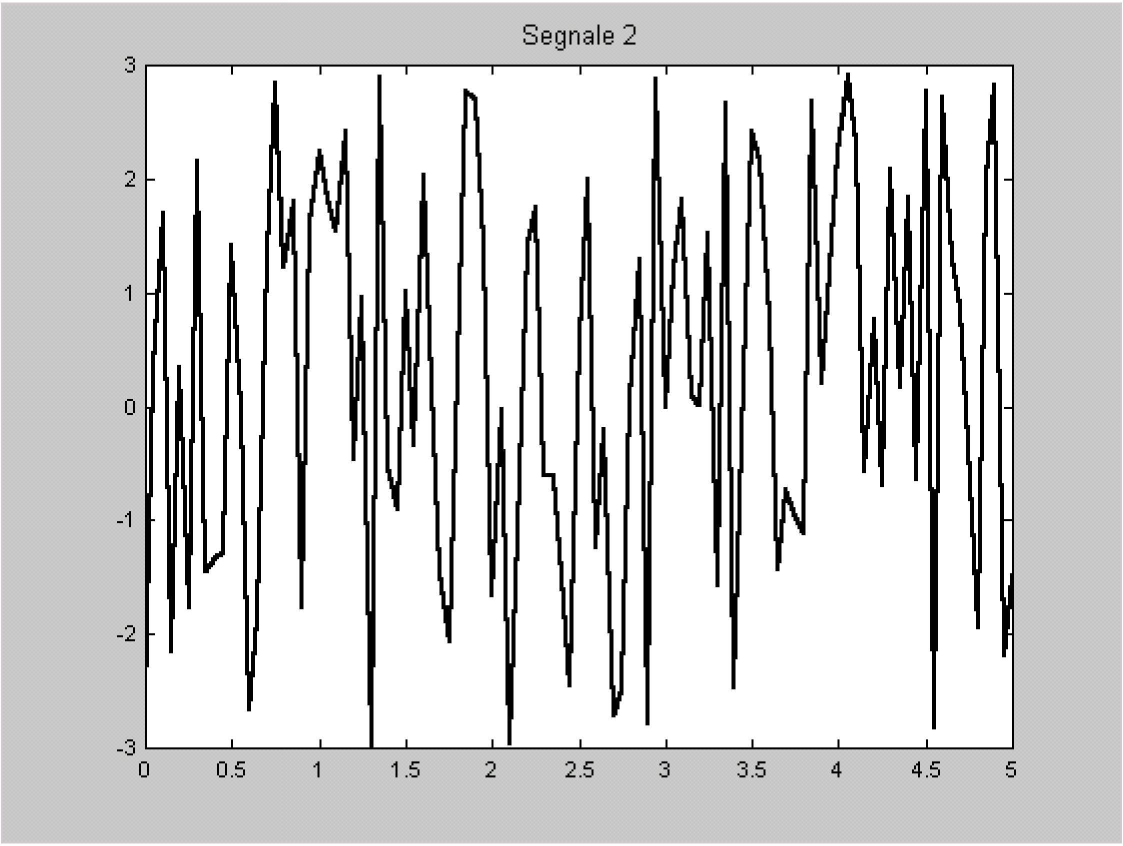
$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\, x(t-\tau)\, dt$$

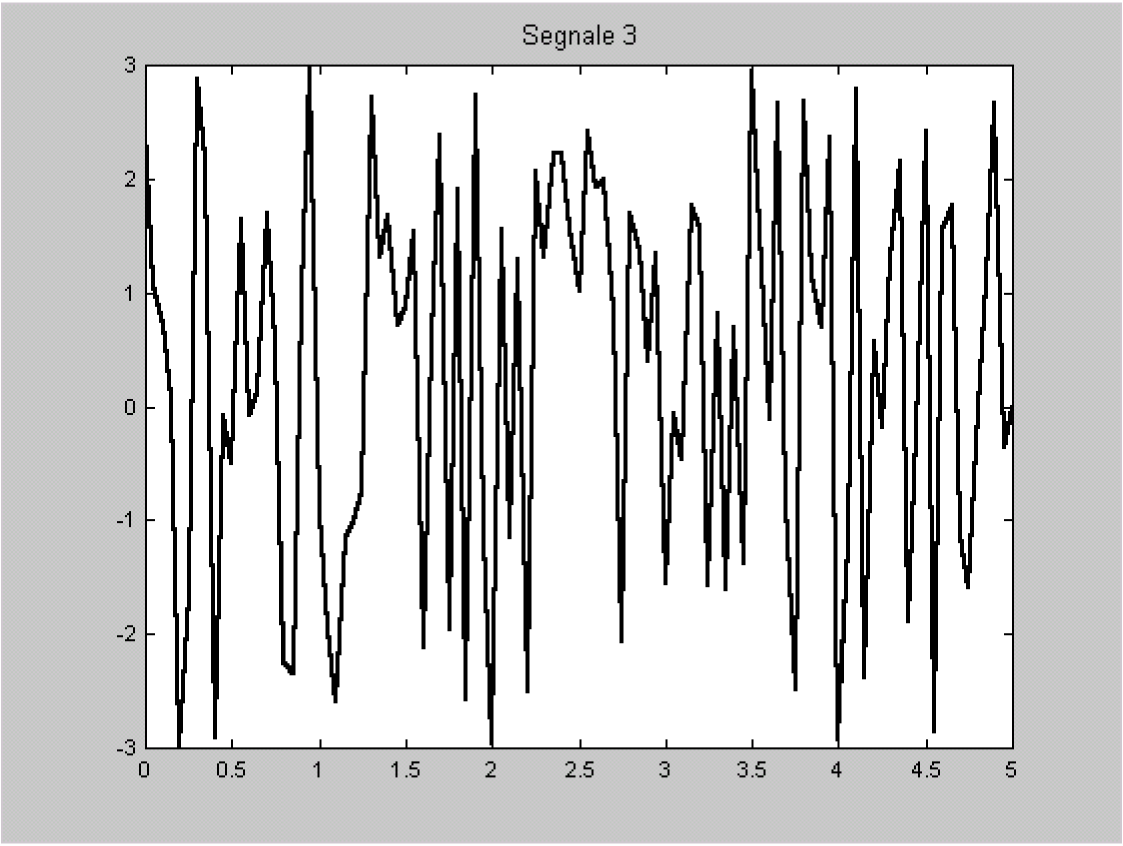
per valori di T sempre più grandi. Nell'esempio che segue una sorgente di rumore bianco è applicata all'ingresso di un circuito RC. Sono mostrati quattro esempi di segnali *y(t)* ottenuti in uscita: i quattro segnali sono tra loro differenti, e nessuno dei quattro mostra alcuna particolare regolarità. Per ciascun segnale *y(t)* è stata calcolata (a partire dal segnale stesso misurato all'uscita del circuito RC) la funzione di autocorrelazione come:

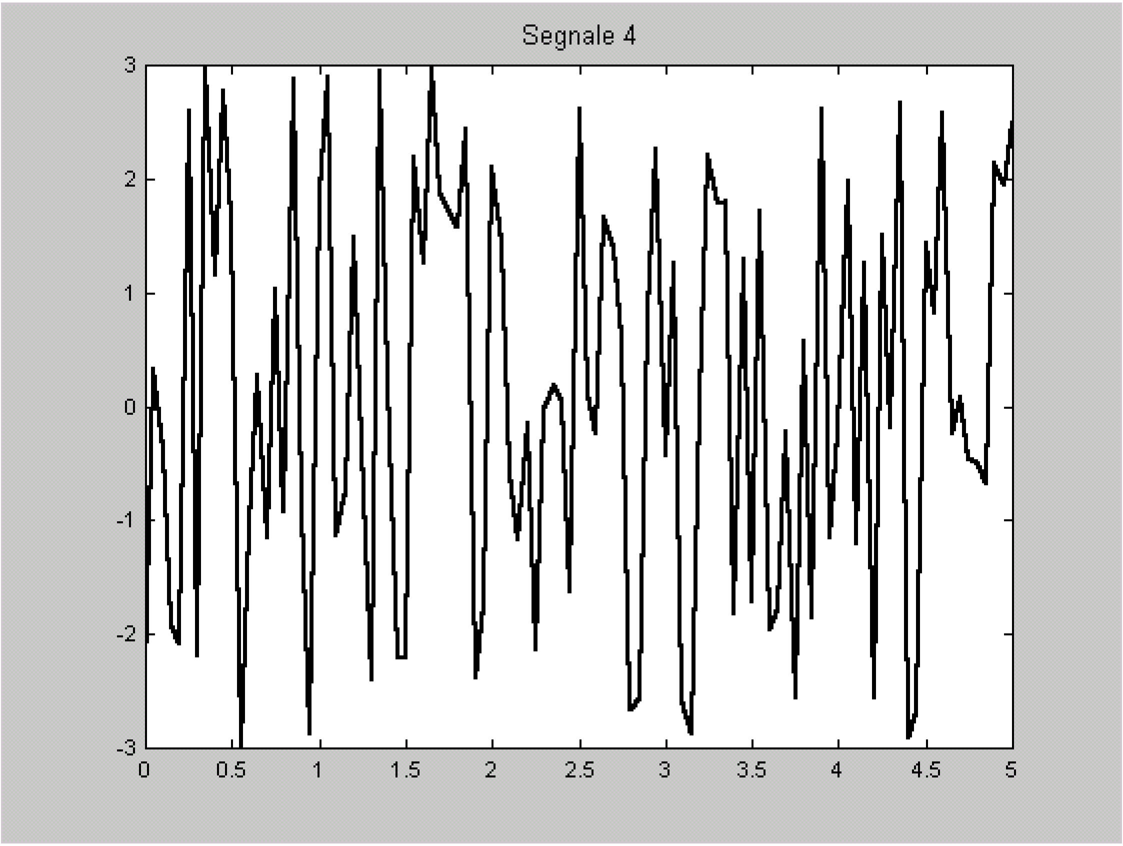
$$r_x(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)\,x(t-\tau)\,dt$$

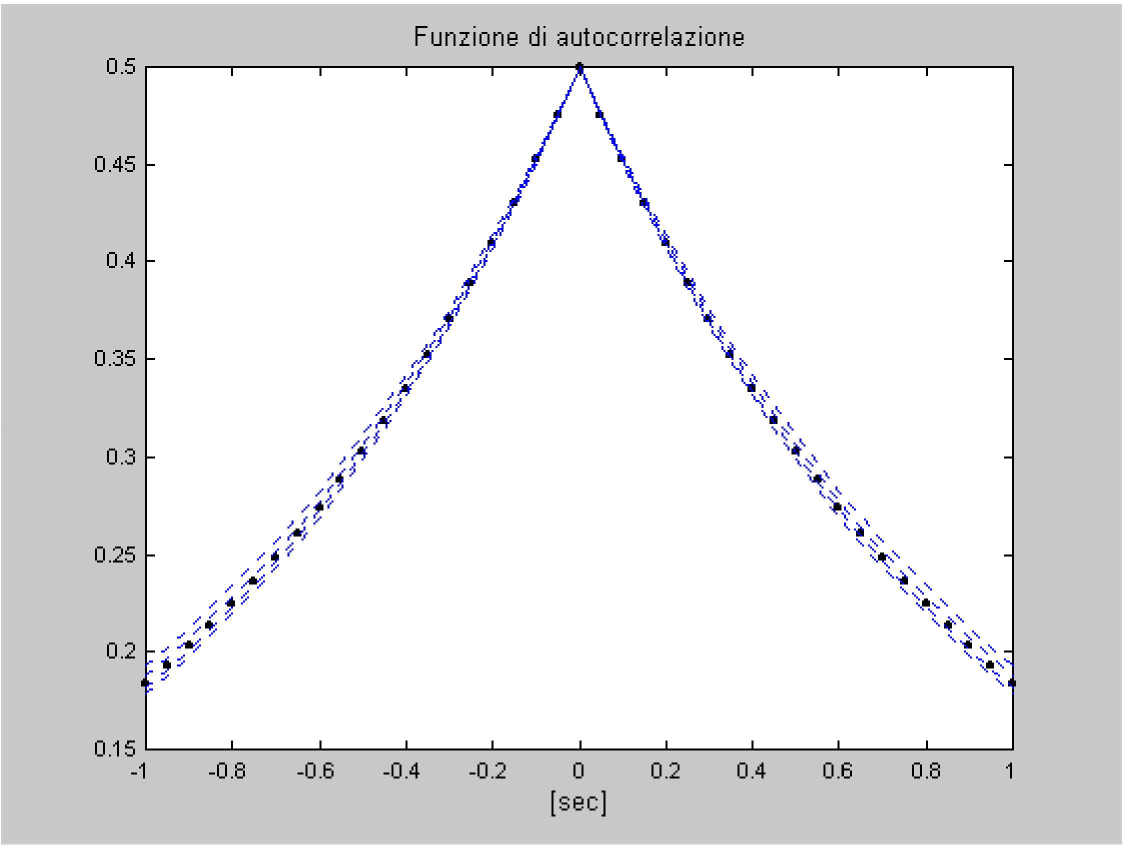
con T=2500 secondi. Come si può notare le quattro funzioni di autocorrelazione ottenute non hanno andamento casuale e seguono in modo molto fedele l'andamento calcolato a partire dalla densità spettrale di potenza. Se si fosse considerato un valore di T più grande sarebbero diminuiti gli scostamenti dalla curva teorica.




Segnale 2
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


Segnale 3
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


Segnale 4
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


Funzione di autocorrelazione
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
[sec]

7. Caratterizzazione dei segnali deterministici.

7.1.Densità spettrale di energia.

Così come per i segnali a potenza finita è possibile definire la densità spettrale di potenza, per i segnali a energia finita è possibile introdurre la **densità spettrale di energia** che è una funzione che descrive la distribuzione dell'energia del segnale fra le sue componenti spettrali. Dato un segnale a energia finita *g(t)* e la sua trasformata *G(f)* definiamo la sua densità spettrale di energia come:

$$S_g(f) = |G(f)|^2$$

Poiché *g(t)* è un segnale ad energia deterministici siamo in grado di calcolarne la trasformata di Fourier. Possiamo enunciare le seguenti proprietà della densità spettrale di energia:

1. $S_g(f) \geq 0$ e reale $\forall f$;
2. $E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_g(f)df$
3. $S_g(f) = S_g(-f)$
4. $S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$

Es. Calcolare la densità spettrale di energia del segnale $x(t) = A\, sinc(2wt)$ e calcolare l'energia *E* di *x(t)*.

$$A\, sinc(2wt) \Leftrightarrow \frac{A}{2w} rect\left(\frac{f}{2w}\right)$$

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{A^2}{4w^2} rect\left(\frac{f}{2w}\right)$$

si osservi che $rect^2(t) = rect(t)$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df = \frac{A^2}{4w^2} \int_{-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{f}{2w}\right)df = \frac{A^2}{4w^2}\int_{-w}^{+w} df = \frac{A^2}{2w}$$

Si osservi come in questo caso è molto più semplice calcolare l'energia del segnale partendo da $S_x(f)$ piuttosto che $x^2(t)$.

7.2. Autocorrelazione.

Come per la densità spettrale di potenza, anche alla densità spettrale di potenza è possibile, mediante l'antitrasformata di Fourier, associare un segnale funzione del tempo che prende il nome di **autocorrelazione**. Essendo *x(t)* un segnale deterministico, l'autocorrelazione può essere calcolata in funzione di *x(t)* stesso, si dimostra che:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)\,dt \Leftrightarrow S_x(f) = |X(f)|^2$$

Valgono le seguenti proprietà:

1. $R_x(\tau) = R_x(\tau)$

2. $E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = R_x(0)$

3. $R_x(0) \geq |R_x(\tau)| \qquad \forall\tau$

Es. Calcolare l'autocorrelazione del segnale $x(t) = A\,sinc(2wt)$.

Poiché $S_x(f) = \frac{A^2}{4w^2} rect\left(\frac{f}{2w}\right)$ si ha:

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2w} sinc(2w\tau) \Leftrightarrow S_x(f) = \frac{A^2}{4w^2} rect\left(\frac{f}{2w}\right)$$

7.3. Crosscorrelazione.

Dati due segnali ad energia finita $g_1(t)$ e $g_2(t)$ la loro **crosscorrelazione** è definita come:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)\,g_2(t-\tau)\,dt$$

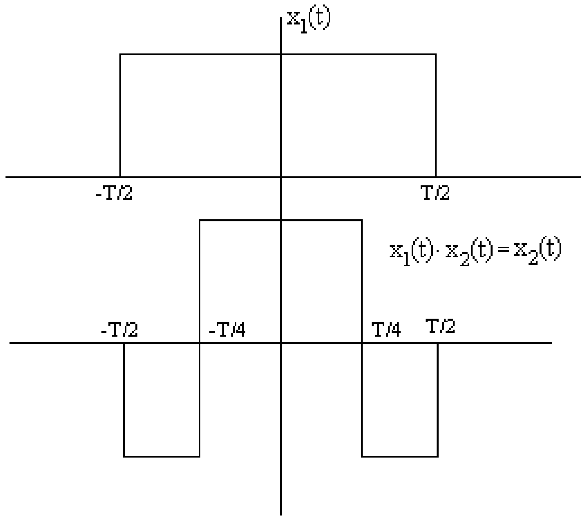
La crosscorrelazione è una misura della somiglianza fra due segnali. Due segnali $g_1(t)$ e $g_2(t)$ si dicono ortogonali se risulta:

$$R_{12}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)\,g_2(t)\,dt = 0$$

Es. Verificare se i seguenti segnali sono ortogonali:

$$x_1(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$x_2(t) = rect\left(\frac{2t}{T}\right) - rect\left(\frac{2t - \frac{3}{8}}{T}\right) - rect\left(\frac{2t + \frac{3}{8}}{T}\right)$$



$$R_{12}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)x_2(t)dt=-\frac{T}{4}+\frac{T}{2}-\frac{T}{4}=0$$

I segnali $g_1(t)$ e $g_2(t)$ sono ortogonali.

7.4. Decibel

Nei sistemi di comunicazione spesso il modulo della risposta in frequenza è espresso mediante una unità di misura logaritmica: il decibel [dB]. Posto $R=|H(f)|$ si ha che:

$$R_{[dB]}=20\ log_{10}\ R \qquad \leftrightarrow \qquad R=10^{\frac{R_{[dB]}}{20}}$$

Uno dei vantaggi principali connessi con l'utilizzo di questa unità di misura è che lavorando in dB la risposta in frequenza (espressa in dB) della cascata di più sistemi lineari è data dalla somma delle singole risposte in frequenza (espresse in dB). Infatti poiché:

$$log_{10}(ab)=log_{10}a+log_{10}b$$

si ha che:

$$R=R_1R_2 \qquad \rightarrow \qquad R_{[dB]}=R_{1[dB]}+R_{2[dB]}$$

Si hanno poi altre proprietà:

- $R=(R_1)^n \qquad \rightarrow \qquad R_{[dB]}=n\,R_{1[dB]}$
- $R=\dfrac{1}{R_1} \qquad \rightarrow \qquad R_{[dB]}=-R_{1[dB]}$

Es.

$$R=1 \qquad \rightarrow \qquad R_{[dB]}=0\,dB$$
$$R=\sqrt{2} \qquad \rightarrow \qquad R_{[dB]}=3\,dB$$
$$R=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \rightarrow \qquad R_{[dB]}=-3\,dB$$
$$R=10 \qquad \rightarrow \qquad R_{[dB]}=20\,dB$$
$$R=20 \qquad \rightarrow \qquad R_{[dB]}=26\,dB$$
$$\lim_{R\to 0}(20\,log_{10}R)=-\infty$$

Si noti che la banda dei canali di comunicazione è spesso definita come "banda a -3 dB".

Spesso vengono espresse in dB anche le potenze ed i rapporti tra potenze; in questo caso la definizione cambia lievemente, si ha infatti:

$$P_{[dB]}=10\,log_{10}P$$

Infine in molti campi è diffusa un'altra unità di misura logaritmica per le potenze che è però riferita ad 1 mW, e che perciò prende il nome di dB_m, ed è così definita:

$$P_{[dB_m]}=10\,log_{10}\frac{P}{1mW}$$

Per eventuali errori contattatemi
desaparecido@lombardiacom.it