Appunti dal corso di Comunicazioni Elettriche tenuto dal prof. Bienati per gli studenti dei D.U. in Ing. Elettronica, Informatica, Biomedica, delle Telecomunicazioni A.A. 2000-2001

4. Calcolo delle probabilità e segnali casuali.

8. Elementi di calcolo delle probabilità e statistica.

Tutti i segnali trattati da un sistema di comunicazione, sia che contengano informazione, sia che rappresentino dei disturbi, hanno natura casuale. Non è perciò possibile predirne esattamente il segnale ricevuto, ma è comunque possibile caratterizzarlo statisticamente e definire così il comportamento medio di un sistema di comunicazione. Gli strumenti matematici che consentono questa caratterizzazione sono quelli forniti dalla teoria della probabilità.

8.1. Probabilità.

Consideriamo l'esperimento "lancio di una moneta (non truccata)". Supponiamo che il risultato di un singolo lancio è impredicibile; sappiamo però anche che se si effettua un numero N sufficientemente grande di lanci il risultato sarà, con buona approssimazione, N/2 volte testa e N/2 volte croce. Definita la frequenza relativa di un risultato (o evento) come il numero di volte che tale risultato si è verificato diviso per il numero totale di prove, abbiamo che, per l'esperimento "lancio di una moneta", la frequenza dell'evento "il risultato è testa" è 1/2 e la frequenza relativa dell'evento "il risultato è croce" 1/2. Allo stesso modo è evidente che per l'esperimento "lancio di un dado", per ogni n con $1 \leq n \leq 6$ la frequenza relativa dell'evento "il risultato è n" vale 1/6. Se invece passiamo all'esperimento "estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte" l'assortimento dei possibili eventi si allarga. Infatti fissata una singola carta, per esempio l'asso di quadri, possiamo definire l'evento elementare "estrazione dell'asso di quadri" per il quale è evidente che la frequenza relativa è 1/52; possiamo però definire degli eventi composti, come ad esempio "estrazione di un asso e di un re", per i quali la valutazione della frequenza relativa non è più così scontata. La teoria della probabilità rappresenta il tentativo di definire un modello matematico per esperimenti di natura casuale che permetta di ottenere una previsione delle frequenze relative di eventi ottenuti dall'unione di eventi elementari (per i quali la frequenza relativa può essere ragionevolmente definita a priori). La validità di questo modello è confermata dal fatto che le previsioni ottenute in base alla teoria della probabilità vengono confermate dai risultati degli esperimenti.

8.2. Definizioni, assiomi delle probabilità e teoremi elementari.

Dato un esperimento casuale definiamo:

- **Spazio degli eventi** l'insieme di tutti i possibili risultati.
- **Evento** un qualunque sottoinsieme dello spazio degli eventi. In particolare un evento si dice <u>elementare</u> se contiene un solo risultato.

Diciamo allora che un *evento si verifica* se il risultato dell'esperimento appartiene all'evento stesso; per esempio l'evento "estrazione di un asso" si verifica quando viene estratto uno qualunque dei quattro assi. Un evento C **unione** di due eventi A e B ($C=A \cup B$) si verifica se il risultato appartiene ad A oppure a B. Un evento C **intersezione** di due eventi A e B ($C=A \cap B$) si verifica se il risultato appartiene sia ad a che a B. Per esempio A="estrazione di un re" e B="la carta estratta appartiene ai cuori" allora $C=A\cap B$ si verifica quando viene estratto il re di cuori. Si assumono quindi i seguenti assiomi:

1) ad ogni evento A è sempre associata una **probabilità** $P(A)$ con $0\le P(A)\le 1$; ad esempio all'evento "estrazione asso di cuori" è associata la probabilità 1/52.
2) Se S è l'evento che coincide con l'intero spazio degli eventi allora $P(S)=1$; ogni possibile risultato appartiene ad S, per cui ad ogni prova l'evento S è sicuramente verificato.
3) Dati due eventi ad intersezione nulla, $A\cap B=\emptyset$, ovvero senza risultati comuni, allora si ha che $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Teorema. Dati due eventi A e B a intersezione non nulla , $A\cap B\neq\emptyset$, si ha che:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

La probabilità dell'evento intersezione $P(A\cap B)$ è anche indicata con $P(A,B)$.

Es. A="estrazione di un re"
B="la carta estratta appartiene ai cuori"
$A\cap B$="estrazione del re di cuori"
$P(A)=4/52$
$P(B)=13/52$
$P(A\cap B)=1/52$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=4/52+13/52-1/52=16/52$
Si osservi che in $P(A\cup B)$="estrazione di un re o di una carta di cuori" sono compresi gli eventi di estrazione di una qualsiasi delle 13 carte di segno cuori (compreso il re) o di uno dei 3 re con segno diverso da cuori. I casi favorevoli sono perciò 16, ovvero $P(A\cup B)=16/52$.

Ess. A="estrazione di un re"
B="estrazione di un asso di quadri"
Calcolare $P(A\cup B)$.
Risultato: $P(A\cup B)=5/52$ perché $P(A\cup B)$="estrazione di una carta che sia contemporaneamente un re e l'asso di quadri"=0

Ess. A="estrazione di una carta appartenente ai cuori"
B="estrazione di una carta maggiore di cinque"
Calcolare $P(A\cup B)$.
Risultato: $P(A)=13/52$, $P(B)=24/52$, $P(A\cap B)=8/52$, $P(A\cup B)=29/52$

8.3. Probabilità condizionata.

Consideriamo un esempio: il campionato di calcio. All'inizio della stagione c'è sempre un certo numero di squadre ritenute più forti (*no comment!*), e quindi probabili vincitrici alla fine del campionato, alle quali possiamo assegnare (*più o meno*) la stessa probabilità di vittoria finale. A metà campionato è verosimile che solo alcune delle squadre che all'inizio erano state date per favorite siano in testa alla classifica; conseguentemente si modifica l'assegnazione della probabilità di vittoria finale. L'assegnazione di questa nuova probabilità risulta condizionata ai risultati delle partite sinora disputate (la squadra che ha vinto più partite ha una probabilità maggiore di vincere il campionato). Nel calcolo delle probabilità questa situazione è stata formalizzata con la cosiddetta **probabilità condizionata**. Vediamo ora di cosa si tratta. Consideriamo due eventi A e B, si definisce probabilità condizionata dall'evento A all'evento B, la probabilità:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

P(A|B) è data dalla probabilità dell'evento intersezione divisa per la probabilità di B.

Es. Si consideri un'urna contenente cinque palline nere numerate da uno a cinque e tre palline rosse numerate da uno a tre. Si vuole determinare qual è la probabilità che, estratta una pallina rossa, questa sia un tre.
La risposta può essere data immediatamente senza fare alcun calcolo. Infatti delle tre palline rosse una sola ha il numero tre, per cui, sapendo di avere estratto una rossa, i casi utili sono uno su tre, per cui P(tre|rossa)=1/3.
Proviamo però ad applicare la formula per il calcolo della probabilità condizionata. La probabilità dell'evento $A \cap B$="estrazione del tre rosso" è 1/8 perché delle otto palline una sola è il tre rosso. Allo stesso modo l'evento B="estrazione pallina rossa" ha probabilità 3/8. Abbiamo perciò:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}$$

8.4. Eventi statisticamente indipendenti.

Due eventi A e B si dicono **statisticamente indipendenti** se si verifica che P(A|B)=P(A) ; ovvero se sapere che si è verificato l'evento B non modifica le nostre attese sull'evento A, in altre parole l'evento B non fornisce informazioni sulla possibilità che si verifichi A. Siccome

$$P(A \mid B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

nel caso di eventi statisticamente indipendenti si ha:

$$P(A,B) = P(A|B)\,P(B) = P(A)\,P(B) \qquad \Rightarrow \qquad P(B|A) = P(B)$$

Es. Consideriamo un'urna contenente cinque palline rosse numerate da 1 a 5 e cinque palline nere numerate anch'esse da 1 a 5. In questo caso gli eventi A="estrazione di un tre" e B="estrazione pallina rossa" sono indipendenti. Infati la probabilità di estrarre un tre è P(A)=2/10=1/5; estratta una pallina rossa, la probabilità P(A|B)=1/5 (un solo tre su 5 palline rosse) per cui P(A|B)=P(A) e i due eventi sono statisticamente indipendenti. Sapere di avere estratto una pallina rossa non modifica la previsione sulla possibilità che sia stato estratto un cinque.

8.5. Formula di Bayes.

Dalla definizione della probabilità condizionata si ha che:

$$P(A|B)=\frac{P(A,B)}{P(B)} \qquad \Rightarrow \qquad P(A,B)=P(A|B)P(B)$$

$$P(B|A)=\frac{P(B,A)}{P(A)}=\frac{P(A,B)}{P(A)}$$

per cui sostituendo si ottiene la formula di Bayes:

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)\ P(B)}{P(A)}$$

Es. Supponiamo di avere due esperimenti casuali in cascata. Il primo esperimento fornisce due risultati possibili, A e B, con P(A)=P(B)=1/2. Il secondo esperimento ha invece tre risultati possibili: α,β e γ con differenti probabilità a seconda dell'esito del primo esperimento, in particolare si ha che:

$P(\alpha|A)=4/6$ $\qquad$ $P(\alpha|B)=3/6$
$P(\beta|A)=1/6$ $\qquad$ $P(\beta|B)=2/6$
$P(\gamma|A)=1/6$ $\qquad$ $P(\gamma|B)=1/6$

Si vuole calcolare la probabilità che il risultato del primo esperimento sia stato A avendo osservato α come risultato del secondo esperimento.
Applicando la formula di Bayes abbiamo:

$$P(A|\alpha)=\frac{P(\alpha|A)P(A)}{P(\alpha)}$$

Per calcolare ciò che vogliamo manca però il dato $P(\alpha)$. Possiamo osservare che il risultato α viene osservato quando si verifica α e A oppure α e B, ovvero:

$P(\alpha) = P((\alpha,A)\cup(\alpha,B)) = P(\alpha,A) + P(\alpha,B) - P((\alpha,A)\cap(\alpha,B))$

Poiché il primo esperimento non può dare come risultato contemporaneamente A e B, si ha che:

$P((\alpha,A)\cap(\alpha,B)) = 0$

E quindi:

$P(\alpha) = P(\alpha,A) + P(\alpha,B) = P(\alpha|A)\ P(A) + P(\alpha|B)\ P(B) = \frac{4}{6}\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$

Si ottiene infine:

$$P(A|\alpha)=\frac{P(\alpha|A)P(A)}{P(\alpha)}=\frac{4/6\cdot 1/2}{7/12}=\frac{4}{7}$$

$$P(B|\alpha)=\frac{P(\alpha|B)P(B)}{P(\alpha)}=\frac{3/6\cdot 1/2}{7/12}=\frac{3}{7}$$

Mediante la formula di Bayes siamo perciò riusciti a determinare la <u>probabilità della causa</u> (il risultato del primo esperimento) a partire <u>dall'osservazione dell'effetto</u> (ovvero il risultato del secondo esperimento). Questo risultato ha importanti applicazioni ai sistemi di comunicazioni in quanto capita spesso di dover determinare la probabilità che sia stata trasmessa una certa informazione a partire dal segnale osservato all'uscita del ricevitore.

8.6. Variabili casuali.

Si consideri l'esperimento casuale "misurazione della temperatura alle ore 12:00" ; l'osservatore si reca ogni giorno nel medesimo luogo e, alle ore 12:00, misura la temperatura ambiente. È chiaro che in questo caso il risultato dell'esperimento è un numero reale (i risultati possibili sono perciò infiniti), che prende il nome di **variabile casuale** (o aleatoria). La descrizione probabilistica di una variabile casuale x si ottiene definendo la sua funzione di distribuzione cumulativa: $F_x(a)$. Fissato un valore a, la funzione di distribuzione della variabile casuale x è data da:

$$F_x(a) = P(x \leq a)$$

Ad esempio, nel caso della temperatura sicuramente risulta:

$$F_x(-273°C) = P(x \leq -273°C) = 0$$

Se inoltre la temperatura è misurata all'equatore è verosimile che:

$$F_x(0°C) = 0 \quad , \quad F_x(100°C) = 1$$

La funzione di distribuzione cumulativa gode delle seguenti proprietà:

1) $0 \leq F_x(a) \leq 1 \quad \forall a$
2) $F_x(a_1) \leq F_x(a_2) \qquad se\ a_1 < a_2$
3) $P(a_1 \leq x \leq a_2) = F_x(a_2) - F_x(a_1) \quad se\ a_1 < a_2$

Normalmente, anziché far riferimento alla distribuzione cumulativa, risulta molto più comodo utilizzare la funzione di densità di probabilità $f_x(a)$ che è data da:

$$f_x(a) = \frac{d}{da} F_x(a)$$

Per la funzione di densità di probabilità valgono le seguenti proprietà:

1) $f_x(a) \geq 0 \qquad \forall a$
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(a)\,da = 1$
3) $P(a_1 \leq x \leq a_2) = \int_{a_1}^{a_2} f_x(a)\,da \qquad se\ a_1 \leq a_2$

Alla funzione densità di probabilità è possibile dare la seguente interpretazione: si consideri un valore a fissato ed un incremento infinitesimo da ; poiché risulta:

$$F_x(a + da) = F_x(a) + \frac{d}{da} F_x(a)\,da = F_x(a) + f_x(a)\,da$$

allora si può dedurre che:

$$P(a \leq x \leq a + da) = F_x(a + da) - F_x(a) = f_x(a)\,da$$

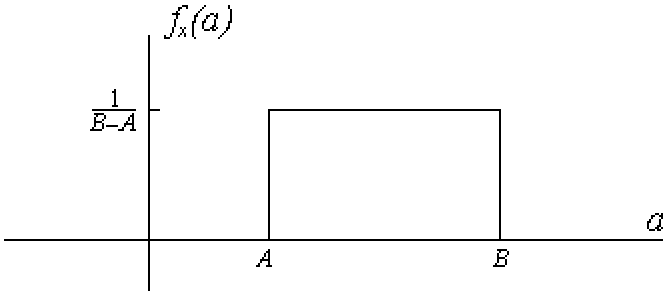
Es. Densità di probabilità uniforme.

$$f_x(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{B - A} & A \leq a \leq B \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Si osservi che:

- $f_x(a) \geq 0 \qquad \forall a$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(a)\,da = 1$ (rettangolo di base B−A e altezza 1/B−A)



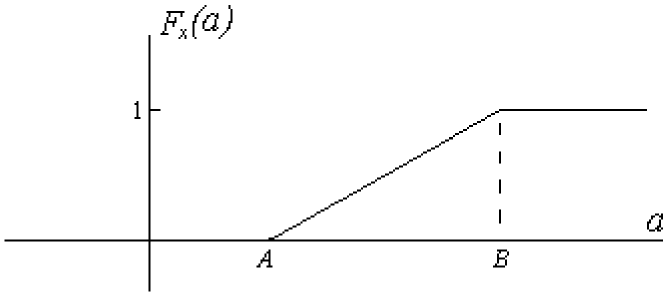
Si determini l'espressione della funzione di distribuzione cumulativa.

$$F_x(a) = \int_{-\infty}^{a} F_x(\tau)\,d\tau$$

$$a \le A \rightarrow \int_{-\infty}^{a} F_x(\tau)\,d\tau = 0$$

$$A \le a \le B \rightarrow \int_{-\infty}^{a} F_x(\tau)\,d\tau = \frac{a-A}{B-A}$$

$$a > B \rightarrow \int_{-\infty}^{a} F_x(\tau)\,d\tau = 1$$



Determinare ora il valore di $P(a \le x \le b)$ con $A \le a \le b \le B$.

$$P(a \le x \le b) = F_x(b) - F_x(a) = \frac{b-a}{B-A}$$

per $A \le a \le b \le B$ la probabilità che x assuma valori nell'intervallo $a \le x \le b$ dipende solo dalla lunghezza dell'intervallo $b-a$ ma non dalla sua posizione, ovvero se $A \le a+c \le b+c \le B$ allora si ha:

$$P(a \le x \le b) = P(a + c \le x \le b + c) = \frac{b-a}{B-A}$$

8.7. Momenti statistici.

Tutta l'informazione disponibile su una variabile causale è contenuta nella sua distribuzione di densità di probabilità. Si possono introdurre delle quantità, i <u>momenti</u>

statistici, che riassumono le caratteristiche di una funzione di densità di probabilità e che risultano molto utili nelle applicazioni pratiche.
Definiamo anzitutto il **valore medio** o valore atteso di una variabile casuale x come:

$$m_x = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx$$

dove E[.] prende il nome di operatore di aspettazione (o speranza matematica).
Abbiamo poi il **valore quadratico medio** definito da:

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_x(x)\, dx$$

ed infine la **varianza**, misura della dispersione, come:

$$\sigma_x^2 = var[x] = E\left[(x - m_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2\, f_x(x)\, dx$$

In generale, data una funzione $g(x)$ di una variabile casuale x, si ha:

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_x(x)\, dx$$

Media e varianza danno un'idea dell'ampiezza dell'intervallo di valori assunti con maggior probabilità da una variabile casuale. Si dimostra infatti il teorema di Chebychev per cui:

$$P(|x - m_x| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}$$

Per qualunque variabile casuale. Si osservi che:

$$P(|x - m_x| \geq \sigma_x) \leq 1$$

$$P(|x - m_x| \geq 2\sigma_x) \leq \frac{1}{4}$$

Es. Calcolare valore medio, valore quadratico medio e varianza di una variabile casuale con densità di probabilità uniforme.

$$m_x = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} a\, f_x(a)\, da = \int_A^B \frac{a}{B-A}\, da = \left[\frac{a^2}{2}\right]_A^B \frac{1}{B-A} = \frac{B+A}{2};$$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} a^2\, f_x(a)\, da = \int_A^B \frac{a^2}{B-A}\, da = \left[\frac{a^3}{3}\right]_A^B \frac{1}{B-A} = \frac{B^3 - A^3}{3(B-A)};$$

$$\sigma_x^2 = var[x] = E\left[(x - m_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (a - m_x)^2\, f_x(a)\, da =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 f_x(a) da - 2m_x \int_{-\infty}^{+\infty} a\, f_x(a) da + m_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(a) da = E[x^2] - 2m_x^2 + m_x^2 =$$

$$= E[x^2] - m_x^2 = \ldots = \frac{(B-A)^2}{12}$$

8.8. Distribuzione gaussiana.

Le variabili casuali con distribuzione gaussiana sono quelle che si incontrano più frequentemente nell'analisi dei sistemi di comunicazione. Una variabile casuale gaussiana x con media m_x e varianza σ_x^2 ha come densità di probabilità la funzione $f_x(a)$ data da:

$$f_x(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{(a-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

La funzione di distribuzione si ottiene da:

$$F_x(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

Questo integrale non può essere espresso in termini di funzioni elementari e perciò deve essere calcolato numericamente. Normalmente vengono tabulati i valori della funzione *erf*, cioè *error function*, definita come:

$$erf(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{u} e^{-z^2} dz$$

da cui si ottiene la funzione cumulativa:

$$F_x(a) = \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{a-m_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)\right)$$

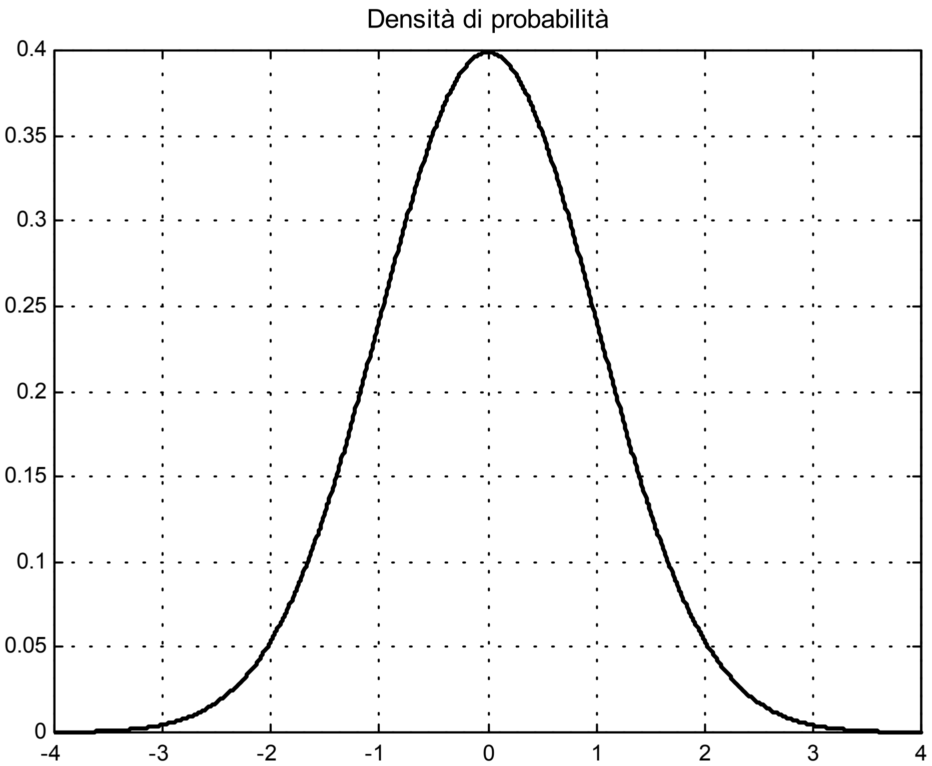
È possibile verificare che per una variabile casuale x gaussiana con media m_x e varianza σ_x^2 risulta:

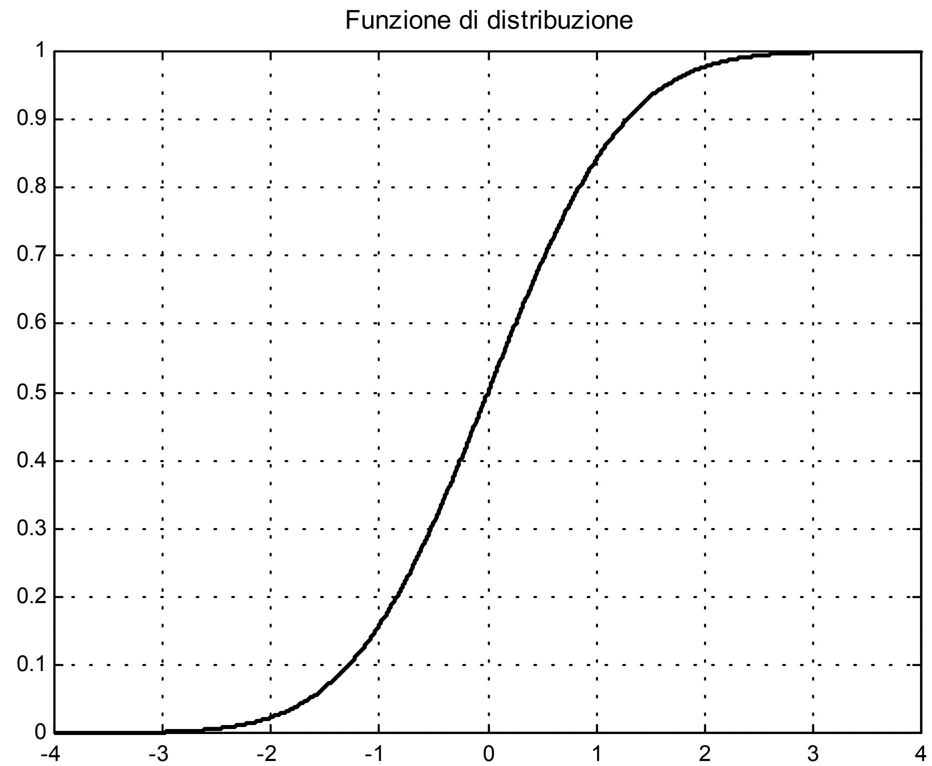
$$P(m_x - 3\sigma_x \le x \le m_x + 3\sigma_x) = 0.997$$

Es. Andamento di una variabile aleatoria gaussiana:

$$f_x(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}$$

$$F_x(a) = \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right)$$


Densità di probabilità
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4


Funzione di distribuzione
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

8.9. Variabili casuali congiunte.

Vi sono situazioni in cui la descrizione del risultato di un esperimento casuale richiede più di una variabile casuale. In questo caso si può estendere l'approccio introdotto per una singola variabile casuale; in particolare per due variabili casuali si definisce funzione di distribuzione congiunta $F_{x,y}(a,b)$ la funzione:

$$F_{x,y}(a,b) = P(x \le a, y \le b) = P(x \le a \cap y \le b)$$

e la funzione di densità di probabilità congiunta $f_{x,y}(a,b)$ la funzione:

$$f_{x,y}(a,b) = \frac{\partial^2}{\partial a\, \partial b} F_{x,y}(a,b)$$

Valgono dunque le seguenti proprietà:

1) $0 \le F_{x,y}(a,b) \le 1$
2) $f_{x,y}(a,b) \ge 0$
3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(a,b)\,da\,db = 1$ (il volume sotteso da $f_{x,y}(a,b)$ è unitario)

Es. Densità di probabilità congiunta uniforme.

$$f_{x,y}(a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{(B-A)(C-D)} & per\ \ A \le a \le B, C \le b \le D \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Date due variabili casuali congiunte ,x e y, si definiscono densità di probabilità marginali, di x e y, rispettivamente le funzioni $f_x(a)$ ed $f_y(b)$ date da:

$$f_x(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(a,b)\,db$$

$$f_y(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(a,b)\,da$$

Si possono poi definire le densità di probabilità condizionali:

$$f_y(b \mid x = a) = \frac{f_{x,y}(a,b)}{f_x(a)}$$

$$f_x(a \mid y = b) = \frac{f_{x,y}(a,b)}{f_y(b)}$$

Due variabili casuali sono statisticamente indipendenti se:

$$f_{x,y}(a,b) = f_x(a)\, f_y(b)$$

Se x e y sono variabili casuali indipendenti e si costruisce la variabile casuale $Z=Ax+By$ con A e B costanti note, allora si avrà:

$$m_z = Am_x + Bm_y$$

$$\sigma_z^2 = A^2\sigma_x^2 + B^2\sigma_y^2$$

9. Segnali casuali gaussiani.

Consideriamo un segnale casuale *x(t)*: poiché non è possibile predire l'andamento nel tempo del segnale si ha che ad ogni istante t_0 l'ampiezza del segnale $x(t=t_0)$ è una variabile casuale. Se vogliamo caratterizzare statisticamente il segnale *x(t)* possiamo definire, per ogni istante t_0, la densità di probabilità dell'ampiezza del segnale nell'istante considerato, ovvero $f_{x(t=t_0)}(a)$. Fortunatamente si riscontra che nelle applicazioni reali si può assumere che vengano trattati solo segnali casuali **stazionari** per i quali la densità di probabilità delle ampiezze è la stessa per tutto il segnale, ovvero $f_{x(t)}(a)$. Sostanzialmente nel campo delle comunicazioni si ha a che fare per la maggior parte dei casi con segnali a densità di probabilità gaussiana.

Un segnale casuale è detto **gaussiano** se la sua densità di probabilità delle ampiezze è di tipo gaussiano:

$$f_{x(t)}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{(a-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

dove m_x e σ_x^2 sono rispettivamente il valore medio e la varianza del segnale. Valore medio e varianza possono essere calcolati direttamente dal segnale mediante le seguenti formule:

$$m_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)dt$$

$$\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (x(t) - m_x)^2 dt$$

Se poi m_x=0 si ha che:

$$\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t)dt$$

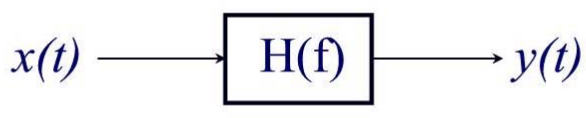
ovvero, ricordando la seconda definizione dell'autocorrelazione del segnale casuale:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\,x(t-\tau)dt$$

si ottiene:

$$\sigma_x^2 = R_x(0) = P$$

dove P è la potenza del segnale casuale gaussiano. La proprietà più importante per i segnali casuali gaussiana si riferisce ai sistemi lineari. Se il segnale gaussiano *x(t)* è applicato all'ingresso di un sistema lineare, l'uscita *y(t)* è ancora un segnale casuale gaussiano. In generale il valore medio e la varianza del segnale cambiano passando dall'ingresso all'uscita ed in particolare si ha che:



$$m_y = H(f=0)\,m_x$$

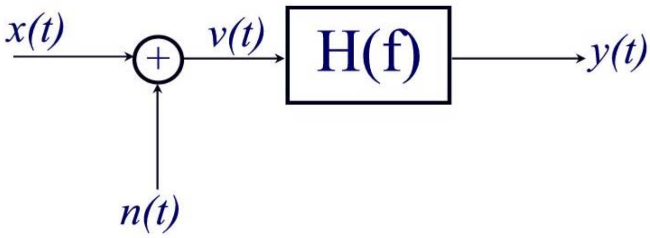
$$\sigma_y^2 = P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\left|H(f)\right|^2 df$$

dove $S_x(f)$ è la densità spettrale di potenza di $x(t)$. I segnali gaussiani sono molto diffusi nei sistemi di comunicazione in quanto si dimostra che il rumore termico (e molti altri tipi di rumori presenti, per es. il rumore captato da un'antenna) è stazionario ed ha distribuzione gaussiana con valore medio nullo. La potenza del rumore termico, essendo la banda di questo segnale illimitata, dovrebbe essere infinita:

$$\sigma_x^2 = P = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df = 2KTR\int_{-\infty}^{+\infty} df \to \infty$$

in realtà questo non è un problema perché in qualche modo il rumore passa sempre attraverso sistemi a banda limitata per cui la potenza del rumore alla fine assume sempre valori finiti.

Es. Consideriamo il seguente sistema di comunicazione con canale passa basso ideale.



Dove:

- $H(f) = \frac{1}{B} rect\left(\frac{f}{B}\right) e^{-j2\pi f t_0}$
- $n(t)$ è un rumore termico con $S_n(f) = N \quad \left[\frac{V^2}{Hz}\right]$
- $x(t) = A\delta(t)$ dove A è una variabile casuale discreta con:

  $P(A=1) = P(A=-1) = \frac{1}{2}$

Si vuole calcolare la densità di probabilità delle ampiezze di $y(t=t_0)$, cioè del segnale di uscita campionato all'istante t_0. Il sistema è lineare ed essendo $y(t) = u(t) + n_u(t)$ dove $u(t)$ è l'uscita quando in ingresso è applicato solo $x(t)$ e $n_u(t)$ è l'uscita quando in ingresso è applicato solo $n(t)$. Caratterizziamo i due segnali $u(t)$ e $n_u(t)$. Siccome $x(t) = A\delta(t)$, abbiamo che $u(t)$ è data dalla risposta all'impulso del sistema, scalata per il fattore A:

$$sinc(B(t-t_0)) \Leftrightarrow \frac{1}{B} rect\left(\frac{f}{B}\right) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$u(t) = A\, sinc(B(t-t_0)) \to u(t_0) = A\, sinc(0) = A$$

Per quanto riguarda il rumore possiamo dire che $n_u(t)$ è ancora un rumore gaussiano a media nulla (in ingresso abbiamo un rumore gaussiano a media nulla); per determinarne la potenza (ovvero la varianza) dobbiamo passare per la densità spetrale di potenza:

$$S_n(f) = N$$

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{B^2} rect\left(\frac{f}{B}\right)$$

$$P_{n_u} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_u}(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)|H(f)|^2 df = \frac{1}{B^2}\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} N\, df = \frac{N}{B} = \sigma_{n_u}^2$$

A questo punto consideriamo il campione :

$u(t = t_0) = u(t_0) + n_u(t_0) = A + n_u(t_0)$

A e $n_u(t_0)$ sono entrambi delle variabili casuali. È facile esprimere la densità di probabilità dell'ampiezza condizionata all'ampiezza A trasmessa: infatti, se A=1, in uscita osserviamo all'istante t_0 una variabile casuale gaussiana con valore medio −1 e varianza $\sigma_{n_u}^2$:

$$f_{y(t=t_0)}(b \mid A = 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n_u}} e^{-\frac{(b-1)^2}{2\sigma_{n_u}^2}}$$

$$f_{y(t=t_0)}(b \mid A = -1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n_u}} e^{-\frac{(b+1)^2}{2\sigma_{n_u}^2}}$$

Abbiamo determinato la densità di probabilità dell'uscita dato l'ingresso; a questo punto, applicando la formula di Bayes, possiamo calcolare la probabilità dell'ampiezza dell'impulso trasmesso avendo osservato un certo valore in uscita e stabilire, fra A=1 ed A=−1, quale delle due ampiezze è più probabile che sia stata trasmessa.

Per eventuali errori contattatemi
desaparecido@lombardiacom.it