Elementi di logica

I primi a servirsi di principi logici furono i filosofi greci della prima metà del V secolo a. C. Aristotele (384-322 a.C.) iniziò uno studio organico delle regole del ragionamento e introdusse, tra l'altro, il concetto di sillogismo: ragionamento che si basa su due proposizioni dette premesse e un'altra proposizione detta conclusione

Ad esempio: A = il leone è un felino prima premessa
B = il felino ha gli artigli seconda premessa
C = il leone ha gli artigli conclusione

Il filosofo matematico Frege (1848-1925) diede un notevole impulso alla logica matematica e la portò ad essere fondamento di tutte le altre scienze. Egli, tra l'altro, introdusse i quantificatori $\forall$ (per ogni) e $\exists$ (esiste almeno).

La logica ha come scopo fondamentale quello di analizzare le regole di coerenza dei discorsi, cioè le condizioni secondo le quali è possibile sviluppare argomentazioni e ragionamenti corretti.
In particolare, la logica delle proposizioni mira all'analisi delle leggi di combinazione delle proposizioni. Le proposizioni che interessano la logica, cioè le cosiddette proposizioni logiche (o forme enunciative), sono quelle che esprimono giudizi oggettivi, in corrispondenza ai quali si deve poter assegnare inequivocabilmente uno ed uno solo dei due "valori di verità": Vero o Falso (**logica bivalente**). Non sono quindi proposizioni logiche le proposizioni interrogative o esclamative, cioè quelle che esprimono un ordine o una preghiera, un'esortazione, una domanda ecc., e nemmeno quelle che esprimono incertezza, possibilità, previsione, giudizi soggettivi.
Associando ad una proposizione **Vera** il numero **1** e ad una proposizione **Falsa** il numero **0,** possiamo considerare i seguenti esempi:

La rosa è un fiore 1
Madrid è una città italiana 0
12 è un numero naturale 1
Domani non pioverà non è una proposizione

Calcolo preposizionale

In analogia al calcolo numerico, la logica delle proposizioni si propone di studiare le operazioni che si possono compiere con le proposizioni.
Le operazioni del calcolo proposizionale sono i connettivi logici: **AND, OR, NOT, XOR, Se….allora, Se e solo se.**

connettivi	simboli	Significato
AND	$\wedge$	$p \wedge q$ è vera se e solo se entrambe le proposizioni sono vere
OR	$\vee$	$p \vee q$ è vera se p o q o entrambe sono vere
NOT	$\neg$	Negazione, inverte il valore di verità
XOR	$\dot{\vee}$	$p \dot{\vee} q$ è vera se e solo se è vera solo una delle due proposizioni
Se…allora	$\Rightarrow$	(Implicazione) è falsa solo se p è vera e q è falsa

Se e solo se	$\Leftrightarrow$	(Doppia implicazione) è vera solo quando le proposizioni sono entrambe vere o entrambe false

Il valore di verità di una proposizione logica composta, mediante i connettivi logici, può essere determinato a partire dai valori di verità delle proposizioni che la compongono secondo le seguenti regole:

1) connettivo AND

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p=9 è multiplo di 3; q=9 è un numero dispari
$p \wedge q$ = 9 è un multiplo di 3 ed è un numero dispari.

2) connettivo OR (disgiunzione inclusiva vel)

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p = A è un insieme finito q = B è un insieme infinito
$p \vee q$ = A è un insieme finito o B è un insieme infinito.

3) negazione NOT

p	$\neg p$
1	0
0	1

p = Antonio è americano $\neg p$ = Antonio non è americano

4) connettivo XOR (disgiunzione esclusiva aut)

p	q	$p \dot{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p = a è un numero pari q = a è un numero dispari
$p \dot{\vee} q$ = il numero a è pari o è dispari

5) implicazione $\Rightarrow$ se…allora, quindi, implica

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p = Roberta è nata a Messina q = Roberta è siciliana
$p \Rightarrow q$ = Se Roberta è nata a Messina allora è siciliana.

Il simbolo $\Rightarrow$ è l'equivalente di "condizione necessaria ma non sufficiente"
Ad es. Teorema: se una funzione è derivabile in x_0 è ivi continua.

6) doppia implicazione o equivalenza logica $\Leftrightarrow$

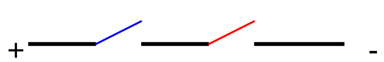
p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

p = "a" è un numero pari
q = "a" è un multiplo di 2
$p \Leftrightarrow q$ = se "a" è un numero pari allora "a" è multiplo di 2(e viceversa).

Il simbolo $\Leftrightarrow$ è l'equivalente di "condizione necessaria e sufficiente"
Teoremi in cui vale il viceversa (è possibile scambiare p con q)
Ad esempio: Se un quadrilatero è circoscrittibile ad una circonferenza la somma di due suoi lati opposti è uguale alla somma degli altri due.

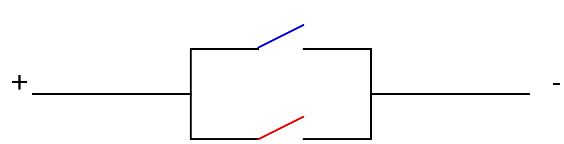
Ad ogni connettivo logico è possibile associare un appropriato circuito elettrico come indicato nelle seguenti figure:

Circuito AND (prodotto logico - interruttori in serie)



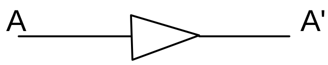
la corrente passa ($p \wedge q$ è vera) solo quando entrambi gli interruttori sono chiusi (p e q sono entrambe vere)

Circuito OR (soma logica - interruttori in parallelo)



la corrente passa ($p \vee q$ è vera) quando almeno uno degli interruttori è chiuso

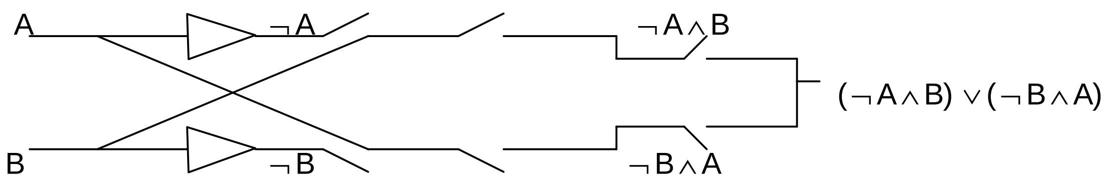
Circuito NOT (invertitore)



L'interruttore A' aperto solo quando l'interruttore A è chiuso

Circuito XOR

Poiché p $\dot{\vee}$ q è vera solo se A è vera e B è falsa o se A è falsa e B è vera possiamo dire che p $\dot{\vee}$ q è equivalente a $(\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge A)$, il circuito associato al connettivo $\dot{\vee}$ è:



Cenni sui quantificatori

Sono operatori logici caratteristici del linguaggio matematico

simbolo	significato	origine	tipo
$\forall$	per ogni	Deriva dal termine tedesco aller	universale
$\exists$	esiste almeno	Proviene dal latino existis	esistenziale

Con il simbolo $\exists! x_0$ s'intende indicare l'esistenza e l'unicità di un dato elemento x_0.