Strutture algebriche

Chiamiamo struttura algebrica un insieme non vuoto A nel quale sono assegnate una o più leggi di composizioni interne binarie. Ad esempio $(A,*)$ è una struttura algebrica dove A è il sostegno della struttura e * è la legge di composizione interna binaria.

Gruppo

E' un insieme A su cui è definita un'operazione binaria (*) in modo che siano verificati i seguenti assiomi:

1. l'operazione * è ovunque definita (ad ogni coppia ordinata di elementi di A resta sempre associato un elemento di A);
2. vale la proprietà associativa $\forall a,b,c \quad a*b*c = a*(b*c)$;
3. esiste l'elemento neutro $u / \forall a \in A \;\; u*a = a*u = a$;
4. esiste l'elemento inverso o simmetrico $\forall a \in A \;\; \exists_1 \; a^{-1} / \; a*a^{-1} = u$.

L'insieme dei numeri razionali $Q^+{}_0$ è un gruppo rispetto all'operazione di moltiplicazione.
Se vale anche la proprietà commutativa $a*b = b*a$ il gruppo si dice " abeliano ".
Ad esempio l'**insieme dei numeri interi relativi rispetto all'operazione di addizione** $(Z\;;+)$ è un gruppo abeliano.

Anello

E' un insieme A in cui sono definite due leggi di composizione interna ($\oplus$ e $\bullet$) in modo che siano verificati i seguenti assiomi:

1. A è un gruppo abeliano rispetto all'operazione $\oplus$;
2. l'operazione $\bullet$ è associativa;
3. l'operazione $\bullet$ è distributiva rispetto all'operazione $\oplus$.

L'insieme Z dei numeri interi relativi strutturato con le leggi di addizione e moltiplicazione $Z\,(+\,;\cdot)$ è un anello.

Corpo

Sia N (+;*) un anello e sia 0 l'elemento neutro rispetto all'operazione +.
Diciamo che N è un corpo se l'insieme $N - \{0\}$ è un gruppo rispetto all'operazione *.
Ad esempio **l'insieme dei numeri reali** strutturato con le leggi di addizione e moltiplicazione $R\,(+\,;\cdot)$ è un corpo.

Campo

Se oltre alle condizioni precedenti si verifica anche che l'operazione * è commutativa diremo che C è un campo.
L'insieme C dei numeri complessi è un campo rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione.